

一定ひずみ速度入力による粘弾性体の力学的応答に関する理論解

塚 本 光 夫

Theoretical Solutions for Response of Visco-Elastic Body under Constant Strain Rate Loading

Mitsuo TSUKAMOTO

(Received September 4, 1995)

The Maxwell model or Voigt model is the typical model that shows a visco-elastic behavior for material subjected to external forces and/or deformation. The mechanical response for some materials, e.g., plastics, however, cannot be shown by such simple models as these or three-element models including spring elements and dashpot elements. Solutions for the Maxwell model, Voigt model and three-element models have been obtained under a step or an impulse load-input. However, solutions for a model under constant strain rate loading were not obtained. Differential equations of several visco-elastic models with many elements, for example, spring elements and dashpot elements, under constant strain rate loading have been obtained. The theoretical solutions for response of a visco-elastic body have been obtained using Laplacian transformation and reverse Laplacian transformation. The solutions have attenuating vibrations with sine and/or cosine series terms.

Key words : visco-elasticity, constant strain rate, theoretical solution, stress-strain relation

1. 緒 言

弾性体は外から与えられた力あるいは変形に対して弾性応力波の速度で急速に応答する。しかし、粘性挙動を示す材料に外力あるいは変形を与えたときには、その力学的応答は時間依存性の挙動を示し、その変形は時間の経過とともに変化する。このような力学的応答を表現するものとしてはばねやダッシュポットの要素を用いた粘弾性論¹⁾がある。粘弾性論は弾性応答をばね要素で、粘性流動をダッシュポット要素で表現するもので、その組み合わせ方や要素の数で粘弾性体の粘性挙動を表現できる。

粘弾性挙動を表現するモデルとして代表的なものは Maxwell モデルや Voigt モデル、あるいはそれらが結合したモデルがあり、単純な粘弾性挙動を示す材料は Maxwell モデルや Voigt モデルあるいはばねとダッシュポットの要素が高々 3 個程度のモデルで表現できる。しかし、高分子材料ではこのような比較的単純なモデルで表現できない場合もあり、多数の要素を結合したモデルで実際の力学的挙動を表現できることが予想される。

しかしながら、従来まではステップ波形あるいはパルス波形の荷重負荷条件でしかも高々 3 個のばねとダッシュポットが結合した比較的単純なモデルでのみ解法されているだけで、近年主流となっているインストロン形引張試験機のような一定のひずみ速度で試験を行うものに対して、正しい負荷条件を考慮した解が得られているわけではない。また、高々 3 個程度の要素しかないモデルはプラス

チックのような高分子材料の力学的特性を表現するのに不十分であり、多数の要素をもつモデルの解を得ることが必要である。

そこで、粘弾性論に基づいた微分方程式の解法を用い、ばね要素やダッシュポット要素の、あるいはそれらが複合化したモデルの端部に単軸一定ひずみ速度の条件を与えたときモデルに生じる応力・ひずみ関係を求めることを本研究の目的とする。

2. 負荷条件と初期条件

一定ひずみ速度入力の場合の負荷条件を

$$\left. \begin{aligned} \epsilon(t) &= R \cdot t & (t > 0) \\ \epsilon(t) &= 0 & (t \leq 0) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

ただし、
 ϵ : ひずみ
 t : 負荷開始からの時間
 R : 定数

とする。なお、以後の記述において

$$\dot{\quad} = \frac{d}{dt}, \quad \ddot{\quad} = \frac{d^2}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{d}{dt} \right) \dots\dots\dots (2)$$

と定義する。また、初期条件は

$$\sigma = \frac{d\sigma}{dt} = \frac{d^2\sigma}{dt^2} = \dots = \frac{d^n\sigma}{dt^n} = 0 \quad (t \leq 0) \dots\dots\dots (3)$$

とする。以上の負荷条件と初期条件を図示したものが Fig. 1 である。

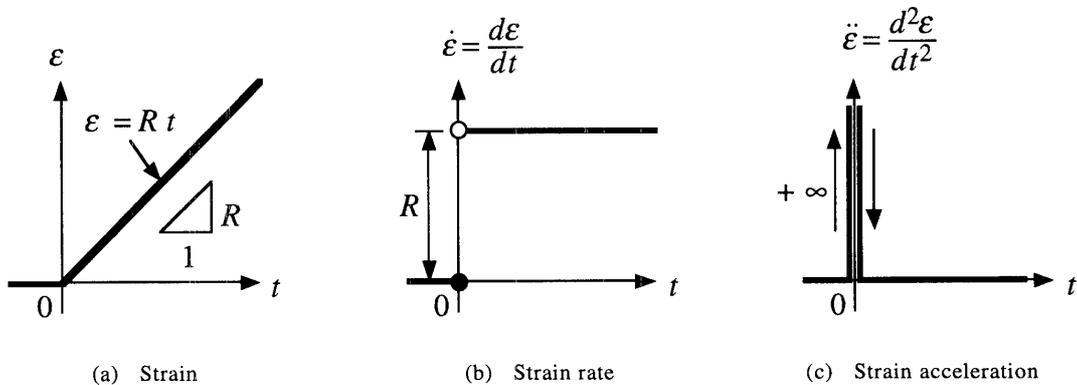


Fig. 1 Time dependence for loading conditions

3. ばね要素とダッシュポット要素を組み合わせたモデルの応答

3.1 ばね要素とダッシュポット要素

Fig. 2 (a) のようなばね定数 k のばね要素に生じる応力 σ とひずみ ϵ は線形関係にあり、次式のように定義される。このばね要素は物体の弾性挙動を表現できる。

$$\sigma = k\epsilon \dots\dots\dots (4)$$

Fig. 2 (b) のような粘性係数 η のダッシュポット要素に生じる応力 σ はひずみ速度 $d\epsilon/dt$ に線形に比例し、次式のように定義される。このダッシュポット要素は物体の粘性流動を表現できる。

$$\sigma = \eta \frac{d\epsilon}{dt} = \eta \dot{\epsilon} \dots\dots\dots (5)$$

3.2 Maxwell モデル

Fig. 3 (a) のようにばね定数 k のばねと粘性係数 η のダッシュポットが直列に結合した Maxwell モデルの場合、ばねとダッシュポットに負荷される応力 σ は同じであり、全体ひずみ ϵ はばねに生じるひずみ ϵ_k とダッシュポットに生じるひずみ ϵ_η との和であることから、応力 σ とひずみ ϵ の関係は次式になる。

$$\dot{\sigma} + \frac{k}{\eta} \sigma = k \dot{\epsilon} \dots\dots\dots (6)$$

ひずみ負荷条件を代入すると

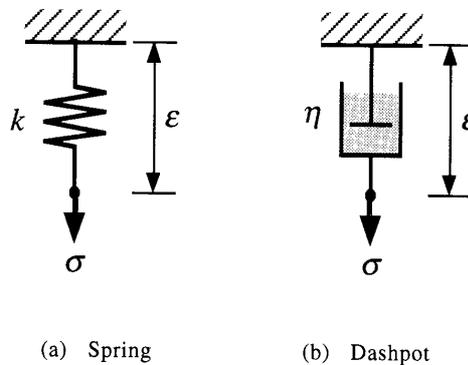


Fig. 2 Spring element and dashpot element

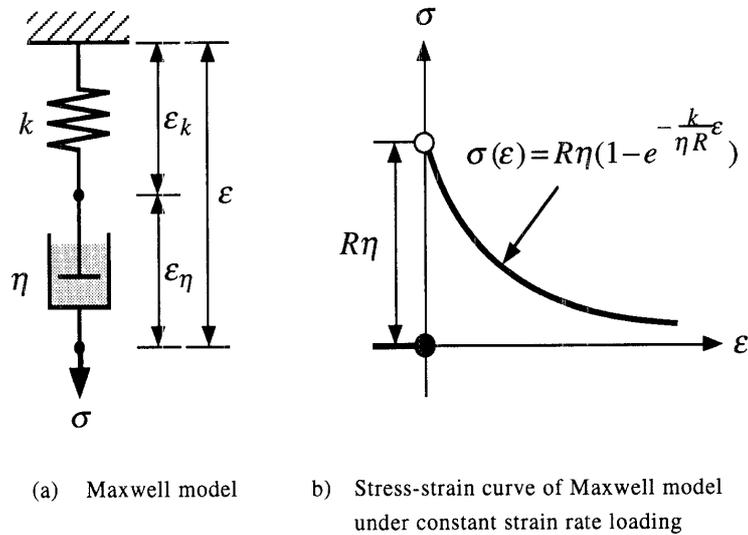


Fig. 3 Maxwell model and its response under constant strain rate loading

$$\dot{\sigma} + \frac{k}{\eta}\sigma = kRu(t) \dots\dots\dots (7)$$

ただし、 $u(t)$ は以下に示すようなステップ関数である。

$$\left. \begin{aligned} u(t) &= 1 && (t > 0) \\ u(t) &= 0 && (t \leq 0) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (8)$$

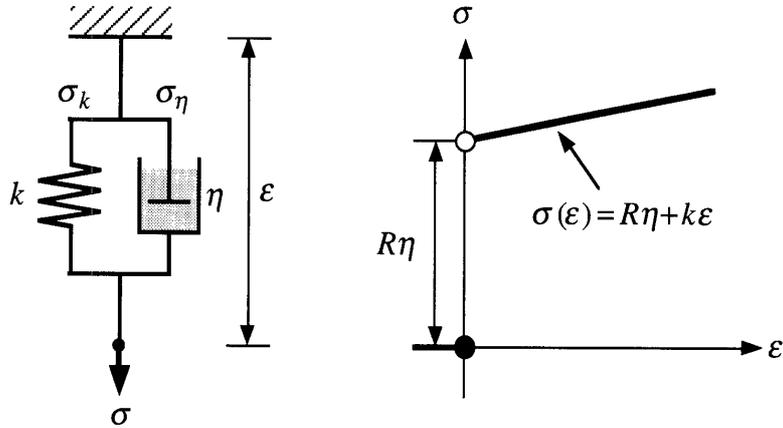
式 (7) をラプラス変換および逆ラプラス変換を用いて解く³⁾⁴⁾と、

$$\begin{aligned} \sigma(t) &= kR \cdot \frac{\eta}{k} (1 - e^{-\frac{k}{\eta}t}) \\ &= R \cdot \eta (1 - e^{-\frac{k}{\eta}t}) \end{aligned} \dots\dots\dots (9)$$

となり、式 (1) の負荷条件

$$t = \frac{\epsilon}{R} \dots\dots\dots (10)$$

の関係式から、応力 σ をひずみ ϵ で表示すると、次式になる。



(a) Maxwell model b) Stress-strain curve of Voigt model under constant strain rate loading

Fig. 4 Voigt model and its response under constant strain rate loading

$$\sigma(\epsilon) = R \cdot \eta \left(1 - e^{-\frac{k}{\eta R} \epsilon} \right) \dots\dots\dots (11)$$

上式を図示したものが Fig. 3 (b) である.

3.3 Voigt モデル

Fig. 4 (a) のようにばね定数 k のばねと粘性係数 η のダッシュポットが並列に結合した Voigt モデルの場合、ばねとダッシュポットそれぞれに生じるひずみ ϵ は同じであり、全体に生じる応力 σ はばねに生じる応力 σ_k とダッシュポットに生じる応力 σ_η との和であることから、応力 σ とひずみ ϵ の関係は以下の式になる.

$$\sigma = \eta \dot{\epsilon} + k \epsilon \dots\dots\dots (12)$$

ひずみの条件を代入すると、次式になる.

$$\begin{aligned} \sigma(t) &= \eta R u(t) + k R t u(t) \\ &= R(\eta + kt) \cdot u(t) \dots\dots\dots (13) \end{aligned}$$

上式において、式 (8) と式 (10) より、応力 σ をひずみ ϵ で表示すると、次式になる.

$$\sigma(\varepsilon) = R\eta + k\varepsilon \dots\dots\dots (14)$$

上式を図示したものが Fig. 4 (b) である.

4. 3要素モデルの応答

4.1 3要素 Maxwell モデル

Fig. 5 (a) のようにばね定数 k_1 のばねと粘性係数 η のダッシュポットが直列に結合したもの (Maxwell モデル) にばね定数 k_0 のばねが並列に結合した3要素モデルの場合, 一つの Maxwell モデルとばね定数 k_0 のばねのそれぞれに生じるひずみ ε は同じであり, 全体に生じる応力 σ はばねに生じる応力 σ_0 とダッシュポットに生じる応力 σ_1 との和であることから, 応力 σ とひずみ ε の関係は以下の式になる.

$$\left. \begin{aligned} \sigma_0 &= k_0 \varepsilon \\ \dot{\sigma}_1 + \frac{k_1}{\eta} \sigma_1 &= k_1 \dot{\varepsilon} \\ \sigma &= \sigma_0 + \sigma_1 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (15)$$

ひずみ負荷条件

$$\varepsilon(t) = R \cdot t, \quad \dot{\varepsilon}(t) = R \dots\dots\dots (16)$$

を用いると, 次式に示すモデルに生じる応力とひずみの関係を表す微分方程式が得られる.

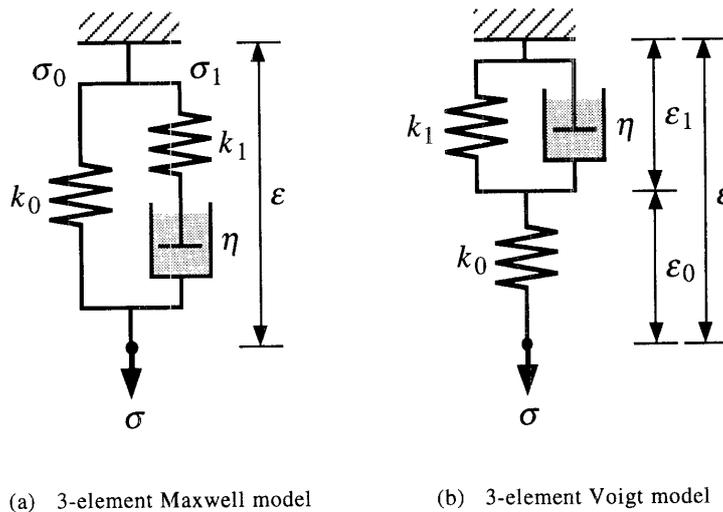


Fig. 5 3-element models

$$\dot{\sigma} + \frac{k_1}{\eta} \sigma = R(k_0 + k_1) + R \frac{k_0 k_1}{\eta} t \quad (17)$$

ラプラス変換および逆ラプラス変換を用いて上式を解くと、次式になる。

$$\sigma(t) = R \left\{ k_0 t + \eta \left(1 - e^{-\frac{k_1}{\eta} t} \right) \right\} \quad (18)$$

上式を応力 σ とひずみ ε の関係で表示すると、次式になる。

$$\sigma(\varepsilon) = k_0 \varepsilon + R \eta \left(1 - e^{-\frac{k_1}{\eta R} \varepsilon} \right) \quad (19)$$

4.2 3要素 Voigt モデル

Fig.5 (b) のようにばね定数 k_1 のばねと粘性係数 η のダッシュポットが並列に結合したもの (Voigt モデル) にばね定数 k_0 のばねが直列に結合した3要素モデルの場合、一つの Voigt モデルとばね定数 k_0 のばねのそれぞれに生じる応力 σ は同じであり、全体に生じるひずみ ε はばね定数 k_0 のばねに生じるひずみ ε_0 と Voigt モデルに生じるひずみ ε_1 との和であることから、応力 σ とひずみ ε の関係は次式になる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma &= k_0 \varepsilon_0 \\ \sigma &= \eta \dot{\varepsilon}_1 + k_1 \varepsilon_1 \\ \varepsilon &= \varepsilon_0 + \varepsilon_1 \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

上式より次式に示す微分方程式が得られる。

$$\dot{\sigma} + \frac{k_0 + k_1}{\eta} \sigma = R k_0 \left(1 + \frac{k_1}{\eta} t \right) \quad (21)$$

ラプラス変換と逆ラプラス変換を用いて上式を解くと、次式になる。

$$\sigma(t) = R \frac{k_0}{k_0 + k_1} \left\{ k_1 t + \frac{k_0 \eta}{k_0 + k_1} \eta \left(1 - e^{-\frac{k_0 + k_1}{\eta} t} \right) \right\} \quad (22)$$

上式を応力 s とひずみ e の関係で表示すると、次式になる。

$$\sigma(\varepsilon) = \frac{k_0}{k_0 + k_1} \left\{ k_1 \varepsilon + R \frac{k_0 \eta}{k_0 + k_1} \left(1 - e^{-\frac{k_0 + k_1}{\eta R} \varepsilon} \right) \right\} \quad (23)$$

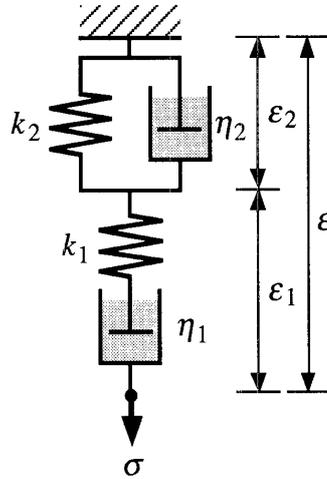


Fig. 6 4-element model

5. Maxwell モデルと Voigt モデルが結合したモデルの応答

Fig. 6 のような一つの Maxwell モデルと一つの Voigt モデルとが直列に結合した 4 要素モデルの場合、Maxwell モデルと Voigt モデルのそれぞれに生じる応力 σ は同じであり、全体に生じるひずみ ϵ は Maxwell モデルに生じるひずみ ϵ_1 と Voigt モデルに生じるひずみ ϵ_2 との和であることから、応力 σ とひずみ ϵ の関係は次式になる。

$$\left. \begin{aligned} \dot{\sigma} + \frac{k_1}{\eta_1} \sigma &= k_1 \dot{\epsilon}_1 \\ \sigma &= \eta_2 \dot{\epsilon}_2 + k_2 \epsilon_2 \\ \epsilon &= \epsilon_1 + \epsilon_2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (24)$$

上式より次式に示す微分方程式が得られる。

$$\ddot{\sigma} + \left\{ \frac{k_1}{\eta_1} + \left(1 + \frac{k_1}{k_2} \right) \frac{k_2}{\eta_2} \right\} \dot{\sigma} + \frac{k_1 k_2}{\eta_1 \eta_2} \sigma = k_1 \ddot{\epsilon} + k_1 \frac{k_2}{\eta_2} \dot{\epsilon} \dots\dots\dots (25)$$

上式を書き換えると次式になる。

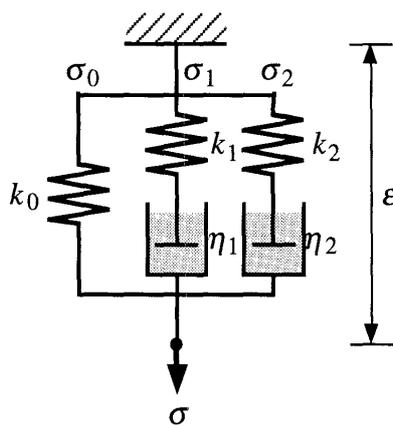
$$\ddot{\sigma} + a_1 \dot{\sigma} + a_0 \sigma = b_2 \ddot{\epsilon} + b_1 \dot{\epsilon} \dots\dots\dots (26)$$

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= \frac{k_1}{\eta_1} + \left(1 + \frac{k_1}{k_2}\right) \frac{k_2}{\eta_2} \\ a_0 &= \frac{k_1 k_2}{\eta_1 \eta_2} \\ b_2 &= k_1 \\ b_1 &= k_1 \frac{k_2}{\eta_2} \end{aligned} \right\}$$

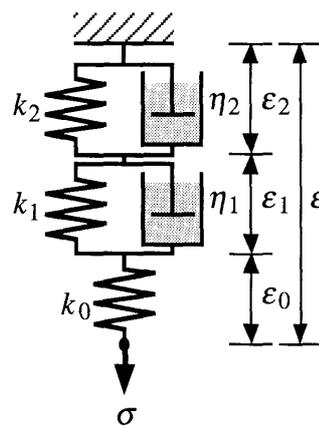
上式の微分方程式を解くと次式になる.

$$\sigma(t) = \alpha_1 \left\{ 1 - e^{-\alpha_2 t} \cos \alpha_3 t + \alpha_4 e^{-\alpha_2 t} \sin \alpha_3 t \right\} \dots\dots\dots (27)$$

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 &= R \eta_1 \\ \alpha_2 &= \frac{a_1}{2} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{k_1}{\eta_1} + \left(1 + \frac{k_1}{k_2}\right) \frac{k_2}{\eta_2} \right\} \\ \alpha_3 &= \sqrt{a_0 - \frac{a_1^2}{4}} \\ \alpha_4 &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\left\{ \frac{k_2}{\eta_1} + \left(1 + \frac{k_1}{k_2}\right) \frac{k_2}{\eta_2} \right\}}{\sqrt{a_0 - \frac{a_1^2}{4}}} \end{aligned} \right\}$$



(a) 5-element Maxwell model



(b) 5-element Voigt model

Fig. 7 5-element models

上式を応力 σ とひずみ ε の関係で表示すると、次式のようになる。ただし、ここで $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ を改めて定義する。

$$\sigma(\varepsilon) = \alpha_1 \left\{ 1 - e^{-\alpha_2 \varepsilon} \cos \alpha_3 \varepsilon + \alpha_4 e^{-\alpha_2 \varepsilon} \sin \alpha_3 \varepsilon \right\} \dots\dots\dots (28)$$

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 &= R\eta_1 \\ \alpha_2 &= \frac{1}{2R} \left\{ \frac{k_1}{\eta_1} + \left(1 + \frac{k_1}{k_2} \right) \frac{k_2}{\eta_2} \right\} \\ \alpha_3 &= \sqrt{a_0 - \frac{a_1^2}{4}} / R \\ \alpha_4 &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\left\{ \frac{k_2}{\eta_1} + \left(1 + \frac{k_1}{k_2} \right) \frac{k_2}{\eta_2} \right\}}{\sqrt{a_0 - \frac{a_1^2}{4}}} \end{aligned} \right\}$$

6. 5要素モデルの応答

6.1 5要素 Maxwell モデル

Fig. 7 (a) のような 5 要素モデル、すなわち二つの Maxwell モデルと一つのばねとが並列に結合したモデルの場合、ばねと二つの Maxwell モデルのそれぞれに生じるひずみ ε は同じであり、全体に生じる応力 σ はばねに生じる応力 σ_0 と Maxwell モデルに生じる応力 σ_1 と σ_2 との和であることから、応力 σ とひずみ ε の関係は次式になる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_0 &= k_0 \dot{\varepsilon} \\ \dot{\sigma}_1 + \frac{k_1}{\eta_1} \sigma_1 &= k_1 \dot{\varepsilon} \\ \dot{\sigma}_2 + \frac{k_2}{\eta_2} \sigma_2 &= k_2 \dot{\varepsilon} \\ \sigma &= \sigma_0 + \sigma_1 + \sigma_2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (29)$$

上式の第 1, 第 2, 第 3 式をそれぞれ解き、上式の第 4 式に代入すると、応力 σ は次式になる。

$$\sigma(t) = R \left\{ k_1 t + \eta_2 \left(1 - e^{-\frac{k_2}{\eta_2} t} \right) + \eta_3 \left(1 - e^{-\frac{k_3}{\eta_3} t} \right) \right\} \dots\dots\dots (30)$$

上式を応力 σ とひずみ ε の関係で表示すると、次式になる。

$$\sigma(\varepsilon) = k\varepsilon + R\eta_2 \left(1 - e^{-\frac{k_2}{\eta_2 R} \varepsilon} \right) + R\eta_3 \left(1 - e^{-\frac{k_3}{\eta_3 R} \varepsilon} \right) \dots\dots\dots (31)$$

6.2 5要素 Voigt モデル

Fig. 7 (b) のような 5 要素モデル, すなわち二つの Voigt モデルと一つのばねとが直列に結合したモデルの場合, ばねと二つの Voigt モデルのそれぞれに生じる応力 σ は同じであり, 全体に生じるひずみ ε はばねに生じるひずみ ε_0 と Voigt モデルに生じるひずみ ε_1 と ε_2 との和であることから, 応力 σ とひずみ ε の関係は次式になる.

$$\left. \begin{aligned} \sigma &= k_0 \varepsilon_0 \\ \sigma &= \eta_1 \dot{\varepsilon}_1 + k_1 \varepsilon_1 \\ \sigma &= \eta_2 \dot{\varepsilon}_2 + k_2 \varepsilon_2 \\ \varepsilon &= \varepsilon_0 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (32)$$

上式より次式の微分方程式が得られる.

$$\begin{aligned} \ddot{\sigma} + \left(\frac{k_0 + k_1}{\eta_1} + \frac{k_0 + k_2}{\eta_2} \right) \dot{\sigma} + \frac{k_0 k_1 + k_1 k_2 + k_2 k_0}{\eta_1 \eta_2} \sigma \\ = k_0 \ddot{\varepsilon} + k_0 \left(\frac{k_1}{\eta_1} + \frac{k_2}{\eta_2} \right) \dot{\varepsilon} - k_0 \frac{k_1 k_2}{\eta_1 \eta_2} \varepsilon \end{aligned} \dots\dots\dots (33)$$

上式を整理すると以下のように表示できる.

$$\begin{aligned} \ddot{\sigma} + a_1 \dot{\sigma} + a_0 \sigma &= k_0 (\ddot{\varepsilon} + b_1 \dot{\varepsilon} - b_0 \varepsilon) \dots\dots\dots (34) \\ \left. \begin{aligned} a_1 &= \frac{k_0 + k_1}{\eta_1} + \frac{k_0 + k_2}{\eta_2} \\ a_0 &= \frac{k_0 k_1 + k_1 k_2 + k_2 k_0}{\eta_1 \eta_2} \\ b_1 &= \frac{k_1}{\eta_1} + \frac{k_2}{\eta_2} \\ b_0 &= \frac{k_1 k_2}{\eta_1 \eta_2} \end{aligned} \right\} \end{aligned}$$

上式を解くと次式になる.

$$\begin{aligned} \sigma(\varepsilon) &= R k_0 p \left\{ 1 + \frac{q}{pR} \varepsilon - e^{-\frac{a_1}{2R} \varepsilon} \cos \left(\frac{1}{R} \sqrt{a_0 - \frac{a_1^2}{4}} \cdot \varepsilon \right) + \left(\frac{a_1}{2} + \frac{r}{p} \right) e^{-\frac{a_1}{2R} \varepsilon} \sin \left(\frac{1}{R} \sqrt{a_0 - \frac{a_1^2}{4}} \cdot \varepsilon \right) \right\} \\ &\dots\dots\dots (35) \\ \left. \begin{aligned} p &= \frac{b_0}{a_0} \left(\frac{b_1}{b_0} + \frac{a_1}{a_0} \right) \\ q &= \frac{b_0}{a_0} \\ r &= 1 - \frac{a_1}{a_0} b_1 + \frac{a_1^2}{a_0^2} b_0 - \frac{b_0}{a_0} \end{aligned} \right\} \end{aligned}$$

上式を整理すると、応力とひずみの関係は最終的には次式のようになり、減衰項をもつ sine と cosine の関数であることがわかる。

$$\sigma(\varepsilon) = \alpha_1 \left\{ 1 + \alpha_2 \varepsilon - e^{-\alpha_3 \varepsilon} \cos \alpha_4 \varepsilon + \alpha_5 e^{-\alpha_3 \varepsilon} \sin \alpha_4 \varepsilon \right\} \dots\dots\dots (36)$$

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 &= Rk_0 \frac{b_0}{a_0} \left(\frac{b_1}{b_0} - \frac{a_1}{a_0} \right) \\ \alpha_2 &= \frac{1}{\left(\frac{b_1}{b_0} - \frac{a_1}{a_0} \right)} \\ \alpha_3 &= \frac{a_1}{2} \\ \alpha_4 &= \sqrt{a_0 - \frac{a_1^2}{4}} \\ \alpha_5 &= \frac{a_1}{2} + \frac{1 - \frac{a_1}{a_0} b_1 + \frac{a_1^2}{a_0^2} b_0 - \frac{b_0}{a_0}}{\frac{b_0}{a_0} \left(\frac{b_1}{b_0} + \frac{a_1}{a_0} \right)} \end{aligned} \right\}$$

7. 一般化モデルの応答のまとめ

これまで種々のばね要素とダッシュポット要素の組み合わせたものの解について述べてきたが、さらに数多くの組み合わせのときの解を求めたところ Fig. 8 (a) に示す一般化 Maxwell モデルと Fig. 8 (b) に示す一般化 Voigt モデルの場合の解を求めることができる。

なお、以下の式において $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n, \beta_j, \gamma_j, \delta_j$ はそれぞれ定数で、Fig. 8 に示す粘弾性モデルのばね定数 $k_0, k_1, k_2, \dots, k_n$ と粘弾性定数 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ で定まるものである。

Fig. 8 (a) に示す一般化 Maxwell モデルの場合には

$$\sigma(\varepsilon) = k_0 \varepsilon + R \sum_i^n \eta_i \left(1 - e^{-\frac{k_i}{\eta_i R} \varepsilon} \right) \dots\dots\dots (37)$$

となる。一方、Fig. 8 (b) に示す一般化 Voigt モデルの場合には

$n = 2i - 1$ ($i = 1, 2, \dots, m - 1, m$) のとき

$$\sigma(\varepsilon) = \alpha_1 (1 + \alpha_2 \varepsilon - e^{-\alpha_3 \varepsilon} + \sum_{j=1}^{n-1} \beta_j e^{-\gamma_j \varepsilon} \sin \delta_j \varepsilon) \dots\dots\dots (38)$$

$n = 2i$ ($i = 1, 2, \dots, m - 1, m$) のとき

$$\sigma(\varepsilon) = \alpha_1 (1 + \alpha_2 \varepsilon - e^{-\alpha_3 \varepsilon} \cos \alpha_4 \varepsilon + \alpha_5 e^{-\alpha_3 \varepsilon} \sin \alpha_4 \varepsilon + \sum_{j=1}^{n-4} \beta_j e^{-\gamma_j \varepsilon} \sin \delta_j \varepsilon) \dots\dots\dots (39)$$

となる。

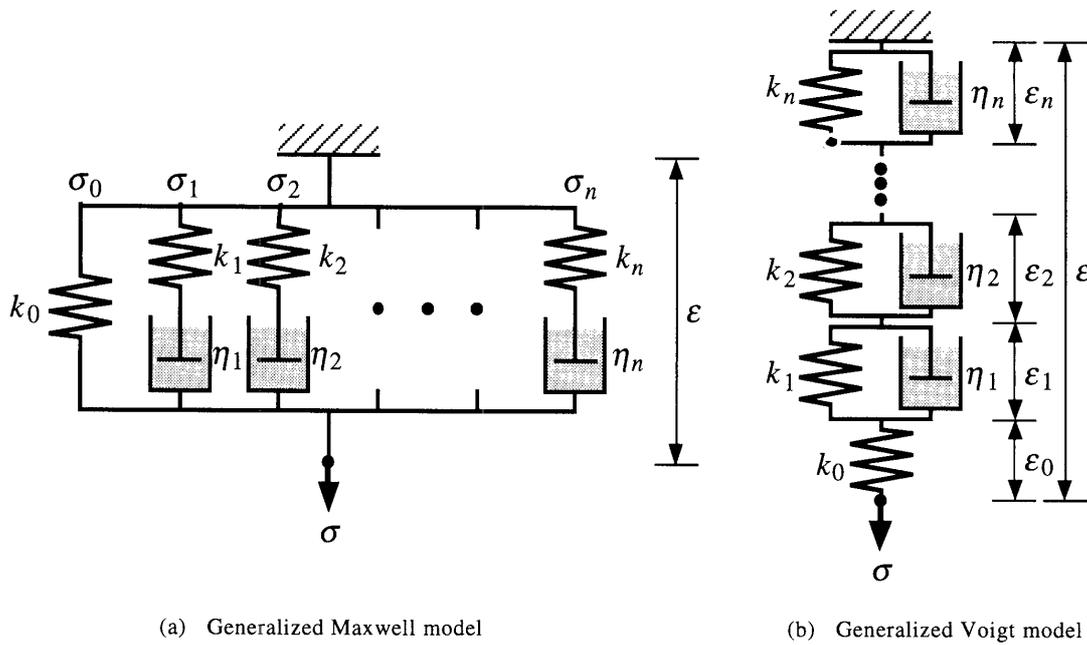


Fig. 8 Generalized models

8. 結 言

ばね要素とダッシュポット要素が種々結合したモデルの端部に単軸一定ひずみ速度入力を与えた場合について応力とひずみの関係の微分方程式を求め、ラプラス変換を用いて応力の時間依存性を表す式と応力・ひずみ関係式を求めた。その結果 sine と cosine の項を含んだ減衰振動形式の応力・ひずみ関係式が得られた。

参 考 文 献

- 1) 山田義昭：塑性・粘弾性，コンピュータによる構造工学講座 II-2-A，11-17，1970，培風館。
- 2) C.R.Barrett, W.D.Nix, A.S.Tetelman著，岡村弘之，井形直弘，堂山昌男訳：材料力学2 材料の強度特性，155，1981，培風館。
- 3) 城憲三：応用数学解析，326-329，1974，養賢堂。
- 4) 数学ハンドブック編集委員会：理工学のための数学ハンドブック，155-160，1981，丸善。