

# 地震入力エネルギーに基づくポリリニア系の最大地震応答の予測に関する研究

## PREDICTION OF MAXIMUM SEISMIC RESPONSE OF POLYLINEAR SYSTEMS BASED ON EARTHQUAKE INPUT ENERGY

小川 厚治\*  
Koji OGAWA

This paper proposes a method to predict the maximum seismic response of the single-degree-of-freedom systems whose load-displacement relationships are represented by polylinear models. Based on the balance between earthquake input energy and absorbed energy during a half-cycle of vibration, the maximum seismic response is derived as functions of damage-causing earthquake input energy and the maximum half-cycle energy input ratio. The applicability of the proposed method is confirmed through comparisons with numerical results of various single-degree-of-freedom systems.

**Keywords:** *single-degree-of-freedom system, polylinear system, seismic response, maximum displacement, damage-causing earthquake input energy, half-cycle earthquake input energy*

1 自由度系, ポリリニア系, 地震応答, 最大変位, 損傷に寄与する地震入力エネルギー,  
半サイクルの地震入力エネルギー

### 1. 序

座屈などの不安定現象が起こらない限り、鋼構造骨組構成部材の履歴挙動は完全弾塑性型や Bilinear 型で近似できるので、それらの部材によって構成される鋼構造骨組は、多数の完全弾塑性要素と弾性要素の並列結合で表される移動硬化型の履歴特性を持つものが多い。このとき、単調載荷時の荷重-変位関係は多数の折れ曲がり点をもち剛性が順次低下していく Polylinear 型となるが、その単調載荷時の荷重-変位関係の形状は様々である。履歴型ダンパーを利用すれば、設計目標に合わせて、鋼構造骨組の単調載荷時の荷重-変位関係を自由な形状に制御することも可能となっている<sup>1-3)</sup>。

本論では、任意の Polylinear 型の荷重-変位関係をもつ 1 自由度系（以下、Polylinear 系と呼ぶ。）を対象に、損傷に寄与する地震入力エネルギー  $E_{dm}$  の関数として、最大変位応答の予測式を導く。筆者は既に、Bilinear 型の荷重-変位関係をもつ 1 自由度系（以下、Bilinear 系と呼ぶ。）を対象に、損傷に寄与する地震入力エネルギー  $E_{dm}$  の関数として、最大変位応答を予測する方法を提案している<sup>4)</sup>。本論では、この Bilinear 系に関して得た結果を拡張する形で、複数の完全弾塑性要素と弾性要素の並列結合で表される移動硬化型の履歴特性を持つ Polylinear 系の最大変位応答の予測法を提案する。

損傷に寄与する地震入力エネルギー  $E_{dm}$  が同じであっても、地震波形によって最大変位応答は通常大きなばらつきをもつので、既往の強震記録などを用いた地震応答解析結果から荷重-変位関係の形状が最大変位応答に及ぼす影響を読み取ることは必ずしも容易ではない。本論は、入力地震波形によって変動する最大変位応答の上限値の予測式を、半サイクルの履歴挙動の間の地震入力エネルギーと系の吸収エネルギーとの釣合に基づいて導き、損傷に寄与する地震入力エネルギー  $E_{dm}$  の関数として表すものである。荷重-変位関係の形状が地震応答に及ぼす影響を明確に定量化するための手段を確立することが、本論の目的である。

### 2. 基本仮定と考察対象

本論では、(1) 式に示すように、損傷に寄与する地震入力エネルギー  $E_{dm}$  を弾性歪エネルギー  $E_e$  と塑性変形による消費エネルギー  $E_p$  の和の最大応答値と定義し<sup>5)</sup>、 $E_{dm}$  の関数として最大変位応答の予測式を導く。なお、Polylinear 系の損傷に寄与する地震入力エネルギー  $E_{dm}$  の予測については、既に報告している<sup>6)</sup>。

$$E_{dm} = (E_e + E_p)_{\max} \quad (1)$$

最大変位応答を予測するために用いた最も重要な仮定は、次の通りである。

\* 熊本大学工学部環境システム工学科 教授・工博

Prof., Dept. of Architecture and Civil Eng., Faculty of Eng., Kumamoto Univ., Dr. Eng.

## [ 基本仮定 ]

変形が 1 方向に進む半サイクルの間の、弾性歪エネルギー  $E_e$  と塑性変形による消費エネルギー  $E_p$  の和の増分  $\Delta E_j$  の最大値は  $r_{cycle} E_{dm}$  であり、大きい順に  $i$  番目までの  $\Delta E_j$  の和を求めると次式となる。

$$\sum_{j=1}^i \Delta E_j = \{1 - (1 - r_{cycle})^i\} E_{dm} \quad (2)$$

ここで、 $r_{cycle}$  は半サイクルの最大地震入力エネルギー率と呼ぶ値であり、直下型地震と直下型以外の地震（以下、標準地震と呼ぶ。）に分けて、次の値を用いる。

$$\text{標準地震： } r_{cycle} = 0.25 \quad (3.a)$$

$$\text{直下型地震： } r_{cycle} = 0.4 \quad (3.b)$$

以上の仮定は文献 4) で提案したものであり、Bilinear 系の地震応答を予測する際にも用いている。

本論では、荷重  $P$  と変位  $u$  の関係が図 1 (a) に太線で示すような Polylinear 型で表される 1 自由度系を考察対象とする。単調載荷時の接線剛性は、変位の増大と共に単調に減少すること、負とはならないことが前提である。単調載荷時の荷重-変位関係の折れ曲がり点の数は  $m$  個とし、第  $i$  番目の折れ曲がり点までの接線剛性を  $K_i$ 、第  $i$  番目の折れ曲がり点での変位を  $u_{yi}$ 、荷重を  $P_{yi}$  とする。繰り返し載荷時の履歴則は移動硬化を仮定し、図 1 (a) に細線で示すような  $m$  個の完全弾塑性要素と 1 個の弾性要素の並列結合で表されるものとする。 $m$  個の完全弾塑性要素は、弾性限変位が小さいものから順に第  $i$  番目の弾塑性要素と呼ぶ。第  $i$  番目の弾塑性要素の弾性限変位は  $u_{yi}$  であり、弾性剛性  $S_i$ 、弾性限荷重  $Q_{yi}$  は次式で表される。

$$S_i = K_i - K_{i+1} \quad (4.a)$$

$$Q_{yi} = S_i u_{yi} \quad (4.b)$$

弾性要素の剛性  $S_{m+1}$  は  $K_{m+1}$  である。

$$S_{m+1} = K_{m+1} \quad (4.c)$$

履歴曲線の例を図 1 (b) に示す。単調載荷によって変位  $u_A$  の A 点に到達した後、除荷して逆方向に載荷する場合を考える。A 点で降伏していた第  $i$  番目の弾塑性要素が再び降伏するまでの変位増分は  $2u_{yi}$  となるので、変位  $-u_A$  の B 点に到達するまでの A→B の履歴曲線の形状は、単調載荷時の荷重-変位関係と相似で丁度 2 倍の大きさとなり、B 点以降は単調載荷時の荷重-変位関係に復帰する。B 点に到達する前の C 点から再び逆方向に載荷したときも同様であり、C→A の履歴曲線の形状は、単調載荷時の荷重-変位関係と相似で 2 倍の大きさとなり、A 点に復帰した後は A→C→A の履歴がな

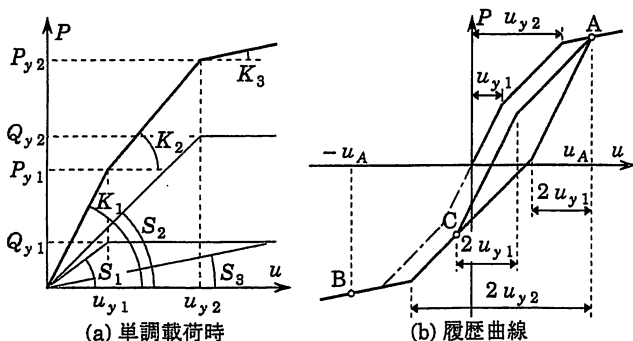


図 1 考察対象

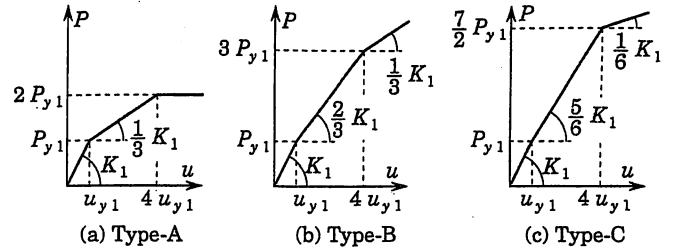


図 2 Trilinear 系の解析モデル

表 1 入力地震波形

	名称	最大加速度 (m/sec <sup>2</sup> )	継続時間 (sec)
標準地震	El Centro NS, 1940	3.417	53.8
	Taft EW, 1952	1.759	54.4
直下型地震	JMA Kobe NS, 1995	8.206	30.0
	NTT Kobe NS, 1995	3.307	50.6

い場合と全く同じ挙動を示す。

本論では、図 1 に示した Polylinear 型の履歴特性をもつ 1 自由度系を対象に、一般的な形で最大変位応答の予測式を導いているが、検討に用いる数値解析例では、図 2 に単調載荷時の荷重-変位関係の形状を示す 3 種の Trilinear 系を主に用いている。Type-A は第 2 分枝剛性と第 3 分枝剛性共に比較的小さい Trilinear 型であり、その逆に、Type-B は第 2 分枝剛性と第 3 分枝剛性共に比較的大きい Trilinear 型として考えている。Type-C は第 2 分枝剛性が初期弾性剛性に近い値をとり第 3 分枝剛性が小さい Trilinear 型であり、第 2 分枝剛性と第 3 分枝剛性が極端に異なる例である。単調載荷時の荷重-変位関係の第 2 折れ曲がり点と第 1 折れ曲がり点の変位の比  $u_{y2}/u_{y1}$  はいずれも 4 としている。

動的応答解析例に用いた入力地震波形は、表 1 に示すように標準地震 2 波と直下型地震 2 波の計 4 波である。

運動方程式の数値積分には Newmark  $\beta$  法 ( $\beta = 1/4$ ) を用い、時間増分は固有周期の 1/500 以下となるように設定した。粘性減衰定数は、すべて 0.01 としている。

## 3. 半サイクルの履歴挙動

振幅（変位の絶対値）を増大させながら最大変位に到達するまでの半サイクルの履歴挙動を考える。図 3 は、 $i$  回目の塑性変形によって、振幅が  $u_{i-1}$  から  $u_i$  に増大する半サイクルの履歴を例示したものである。このような履歴挙動に必要なエネルギーは、この変形で系が吸収したエネルギー（図 3 の灰色部分の面積）から、既に蓄えていた弾性歪エネルギー（図 3 の斜線部の面積）を減じた値で表される。したがって、この半サイクルの間の地震入力エネルギーを  $R_i E_{dm}$  とすると、次のエネルギーの釣合式が成立する。

$$\begin{aligned} R_i E_{dm} = & \sum_{j=1}^{m_i} \frac{S_j}{2} u_{yj}^2 + \sum_{j=m_{i-1}+1}^{m_i} \frac{S_j}{2} u_i^2 \\ & - \sum_{j=1}^{m_{i-1}} \frac{S_j}{2} u_{yj}^2 - \sum_{j=m_{i-1}+1}^{m_{i-1}+1} \frac{S_j}{2} u_{i-1}^2 \\ & + \sum_{j=1}^{m_{i-1}} Q_{yj} (u_i + u_{i-1} - 2u_{yj}) + \sum_{j=m_{i-1}+1}^{m_i} Q_{yj} (u_i - u_{yj}) \end{aligned} \quad (5)$$

上式で、 $m_{i-1}$  は振幅  $u_{i-1}$  で降伏している弾塑性要素の数であり、

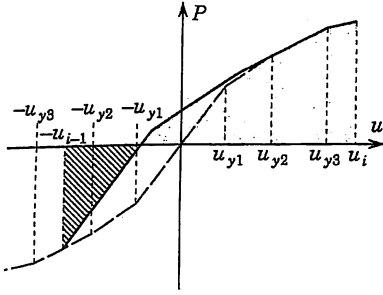


図3 半サイクルの履歴挙動

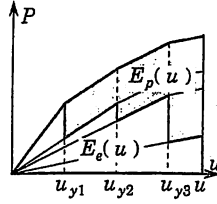


図4 変形に必要なエネルギー

$m_i$  は振幅  $u_i$  で降伏する弾塑性要素の数である。すなわち、

$$u_{i-1} \leq u_i \quad (6.a)$$

$$u_{y m_{i-1}} \leq u_{i-1} < u_{y m_{i-1}+1} \quad (6.b)$$

$$u_{y m_i} \leq u_i < u_{y m_i+1} \quad (6.c)$$

$$m_{i-1} \leq m_i \quad (6.d)$$

図3の例では、 $m_{i-1}$  は2であり、 $m_i$  は3である。

(5)式は次のようにも表現できる。

$$R_i E_{dm} = E_e(u_i) - E_e(u_{i-1}) + E_p(u_i) + E_p(u_{i-1}) \quad (7)$$

ここで、

$$E_e(u_i) = \sum_{j=1}^{m_i} \frac{S_j}{2} u_{y j}^2 + \sum_{j=m_i+1}^{m_i+1} \frac{S_j}{2} u_i^2 \quad (8.a)$$

$$E_e(u_{i-1}) = \sum_{j=1}^{m_{i-1}} \frac{S_j}{2} u_{y j}^2 + \sum_{j=m_{i-1}+1}^{m_{i-1}+1} \frac{S_j}{2} u_{i-1}^2 \quad (8.b)$$

$$E_p(u_i) = \sum_{j=1}^{m_i} Q_{y j} (u_i - u_{y j}) \quad (8.c)$$

$$E_p(u_{i-1}) = \sum_{j=1}^{m_{i-1}} Q_{y j} (u_{i-1} - u_{y j}) \quad (8.d)$$

上式で、 $E_p(u)$  は、図4の灰色部分の面積で表されるように、初期状態から単調載荷で変位  $u$  に到達するまでに各弾塑性要素が塑性変形で消費したエネルギーの総和（以下、塑性歪エネルギー<sup>6)</sup>と略称する。）を表し、 $E_e(u)$  は変位  $u$  での各要素の弾性歪エネルギーの総和を表している。

#### 4. 最大地震応答の予測（その1）

この章ではまず、Bilinear系に関する文献4)と同様の方法で、Polylinear系の最大変位の予測式を導く。

系は、正負交互に  $n$  回の塑性変形を受けて最大変位  $u_{max}$  に到達すると仮定し、この塑性変形を受ける以前に初期弾性限歪エネルギー  $E_y$  を蓄える過程を第0回とする。すなわち、第1回目の塑性履歴直前の変位  $u_0$  は  $u_{y1}$  であり、それまでの入力エネルギーは  $E_y$  である。各半サイクルのエネルギーの釣合は、(7)式の表現を使って次のように表される。

$$\begin{aligned} R_0 E_{dm} &= E_y \\ R_1 E_{dm} &= E_e(u_1) - E_e(u_0) + E_p(u_1) + E_p(u_0) \\ &\downarrow \\ R_i E_{dm} &= E_e(u_i) - E_e(u_{i-1}) + E_p(u_i) + E_p(u_{i-1}) \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} &\downarrow \\ R_n E_{dm} &= E_e(u_n) - E_e(u_{n-1}) + E_p(u_n) + E_p(u_{n-1}) \end{aligned}$$

ただし、

$$E_y = \frac{K_1}{2} u_{y1}^2 = E_e(u_0) \quad (10)$$

(9)式の左辺と右辺それぞれの和を取ると次式を得る。

$$E_{input} = E_{deform} \quad (11)$$

ただし、

$$E_{input} = E_{dm} \sum_{i=0}^n R_i \quad (12.a)$$

$$E_{deform} = E_e(u_n) + \sum_{i=1}^n \{E_p(u_i) + E_p(u_{i-1})\} \quad (12.b)$$

上式の  $E_{input}$  は  $n$  回の塑性変形を生じるまでの地震入力エネルギーを表し、 $E_{deform}$  は  $n$  回の塑性履歴を経て変位  $u_n$  に到達するのに必要なエネルギーを表す。

$E_{input}$  の計算で総和を取る  $R_i$  ( $i=1 \sim n$ ) は、半サイクル毎の地震入力エネルギーの内、大きいものから順に  $n$  個を取ることになると、 $E_{input}$  は次式で表される。

$$E_{input} = E_y + \{1 - (1 - r_{cycle})^n\} E_{dm} \leq E_{dm} \quad (13)$$

$E_{deform}$  の計算で総和を取る  $E_p(u_i)$  は、最大値が  $E_p(u_n)$  であり最小値は  $E_p(u_0) = 0$  であるので平均値を  $E_p(u_n)/2$  で近似する。

$$\frac{\sum_{i=1}^n \{E_p(u_i) + E_p(u_{i-1})\}}{2n} = \frac{E_p(u_n)}{2} \quad (14)$$

(14)式を仮定すれば、 $E_{deform}$  は次のように表される。

$$E_{deform} = E_e(u_n) + n E_p(u_n) \quad (15)$$

(11),(13),(15)式を満たす最大の  $u_n$  の値として、最大変位  $u_{max}$  は次式で表される<sup>4)</sup>。

$$u_{max} = \min \{0u_{max}, \max \{1u_{max}, 2u_{max}\}\} \quad (16)$$

上式において、 $0u_{max}$  は1方向変形で  $E_{dm}$  をすべて吸収するとしたときの最大変位であり、 $u_{max}$  の上界となる。 $0u_{max}$  は  $E_{dm}$  が初期弾性限歪エネルギー  $E_y$  を若干超える範囲 ( $E_{dm} < E_y / (1 - r_{cycle})$ ) でだけ、(16)式において  $u_{max}$  として採用される値で、この塑性変形が軽微な範囲を除けば  $1u_{max}$  と  $2u_{max}$  の大きい方の値が最大変位  $u_{max}$  の予測値となる。

$1u_{max}$  は  $n=1$  で(11)式が成立するとしたときの  $u_n$  の値で、弾性限に達した後の初回の塑性変形で半サイクルの最大地震入力エネルギー  $r_{cycle} E_{dm}$  を吸収すると考えたときの最大変位である。 $2u_{max}$  は、(13),(15)式で表される2つの曲線が  $n>1$  で接点をもつという条件から求めた  $u_n$  の値で、塑性変形を伴う繰り返し載荷によって系が大きな弾性歪エネルギーを蓄えた後に到達する最大変位を表している。これら3つの値  $0u_{max}$ 、 $1u_{max}$ 、 $2u_{max}$  はそれぞれ、以下に示す式の解として求められる。

$$E_{dm} = E_e(0u_{max}) + E_p(0u_{max}) \quad (17.a)$$

$$r_{cycle} E_{dm} = E_e(1u_{max}) + E_p(1u_{max}) - E_y \quad (17.b)$$

$$\begin{aligned} \{E_y + E_{dm} - E_e(2u_{max})\} \ln(1 - r_{cycle}) \\ + E_p(2u_{max}) \left\{1 - \ln\left(\frac{-E_p(2u_{max})}{E_{dm} \ln(1 - r_{cycle})}\right)\right\} = 0 \end{aligned} \quad (17.c)$$

文献4)では、(14)式の仮定の代わりに、次の関係を仮定して、Bilinear系の最大変位を予測している。

$$\frac{\sum_{i=1}^n (u_i + u_{i-1})}{2n} = \frac{u_n + u_{y1}}{2} \quad (18)$$

このBilinear系について用いた仮定を、Polylinear系に適用できるように塑性歪エネルギーの表現を用いて一般化したものが(14)式である。したがって、(16),(17)式から算定される最大変位  $u_{max}$  は、

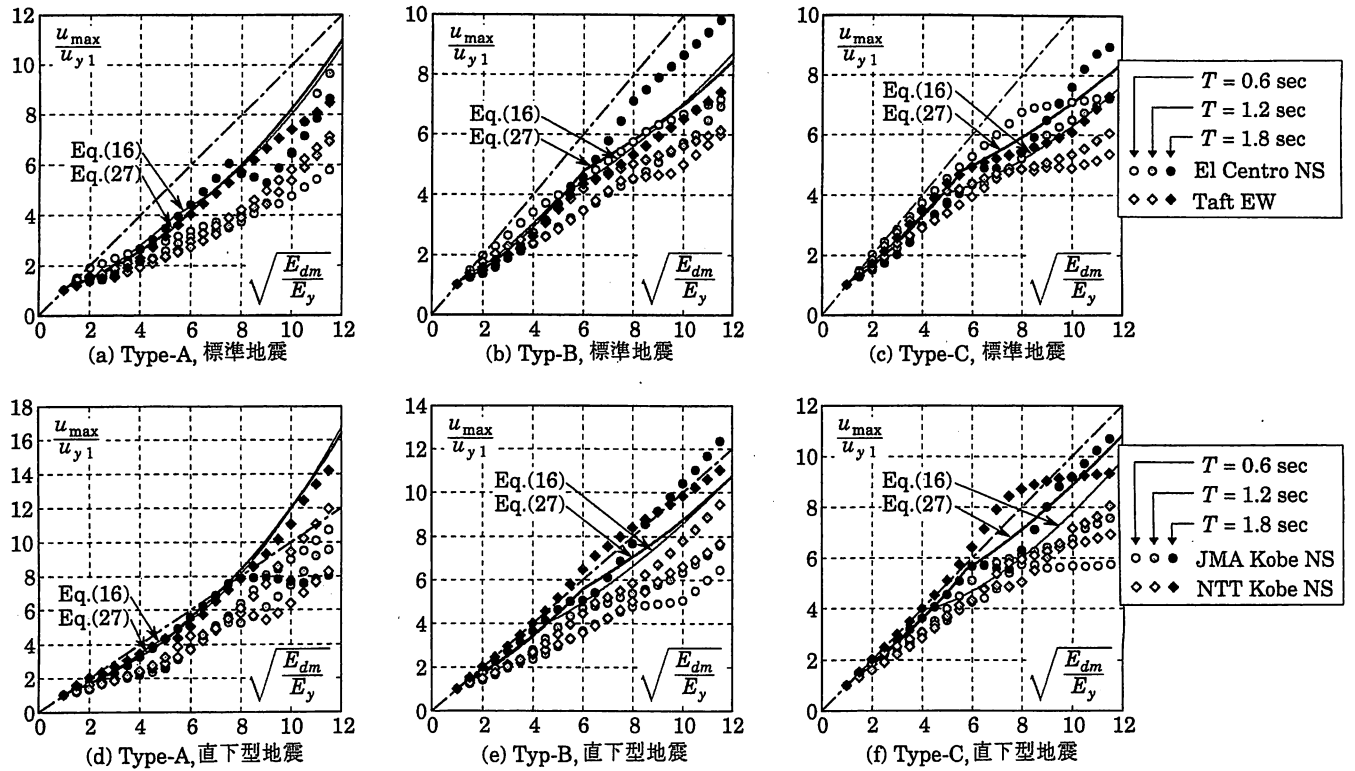


図5  $\sqrt{E_{dm}/E_y} - u_{max}/u_{y1}$  関係

Bilinear 系については文献 4) と同じである。Bilinear 系に関する (18) 式の仮定の妥当性については、文献 4) で検討している。

(16) 式を用いて算定した最大変位  $u_{max}$  を地震応答解析結果と比較する。図 2 に示した 3 種の Trilinear 系について、 $\sqrt{E_{dm}/E_y}$  と  $u_{max}/u_{y1}$  との関係を図 5 に示す。ただし、応答解析においては、固有周期  $T$  および  $\sqrt{E_{dm}/E_y}$  は次の値を用いている。

$$T : 0.6, 1.2, 1.8 \text{ sec の 3 種}$$

$$\sqrt{E_{dm}/E_y} : 1 \sim 11.5 \text{ の 22 種}$$

図 5 中には細線で (16) 式による予測値を示している。また、図中の鎖線は弾性系の最大変位であり、変位一定説<sup>7)</sup>から予測される最大変位として参考のために示している。

図 5 によると、(16) 式による予測値を示す細線は、最大変位の応答値の上限値を概ね近似している。しかし、図 5 (c), (f) に示す Type-C の結果で特に顕著であるように、細線で示した予測値によると  $\sqrt{E_{dm}/E_y}$  の増大に伴う  $u_{max}/u_{y1}$  の増大速度は  $u_{max}/u_{y1} = 4$  を越えると急激に小さくなっているが、応答値にはそのような傾向は認められない。したがって、図 5 (c), (f) によると、 $\sqrt{E_{dm}/E_y}$  が 6 ~ 8 程度の範囲で、細線の予測値より大きな応答値が非常に多く現れている。Type-C では、大部分の領域で  $2u_{max}$  の値が (16) 式において最大変位  $u_{max}$  の予測値として採用されている。Type-C の系では、 $u_{max}/u_{y1}$  が 4 を越えると  $E_p(u_{max})$  が急増し変形に必要なエネルギー  $E_{deform}$  も急増するので、 $E_{dm}$  が増えても  $2u_{max}$  の増大量は小さくなっている。

## 5. 最大地震応答の予測 (その 2)

前章で述べたように、(16) 式による予測値算定に用いた  $1u_{max}$  は、初期弾性限界エネルギー  $E_y$  を蓄えた直後に半サイクルの最大地

震入力エネルギー  $r_{cycle} E_{dm}$  が入力されて最大変位に到達すると考えて求めた値である。一方、 $2u_{max}$  は、最大変位に到達する最後の半サイクルまで、各振幅  $u_i$  に関する塑性歪エネルギー  $E_p(u_i)$  を等差級数的に増大させ、その最終の半サイクルで最大変位に到達すると考えて求めた値である。したがって、 $2u_{max}$  の算定においても、最大変位に到達する最後の半サイクルに入力されるエネルギーは、半サイクルの地震入力エネルギーの最大値であると考えているが、その半サイクルの開始点の振幅は、半サイクルの最大地震入力エネルギーを除いた残りの入力エネルギーで到達できる最大値を想定していることになる。したがって、最大変位に到達する半サイクルの開始点での振幅を初期弾性限界変位として導いた値が  $1u_{max}$  であり、到達可能な最大値として導いた値が  $2u_{max}$  である。最大変位に至る半サイクルの開始点での振幅として上記の 2 つの値を仮定し、この半サイクル終了時の振幅として算定される値の大きい方の値として、(16) 式では最大変位  $u_{max}$  を予測している。逆に言えば、最大変位に至る半サイクルの開始点での振幅が上記の 2 つの値以外であることを全く考慮していない。本章では、最大変位に到達する半サイクルの開始点での振幅について検討を加えることによって、前章の (16) 式より信頼性の高い最大変位  $u_{max}$  の予測式を導く。

半サイクルの最大地震入力エネルギー  $r_{cycle} E_{dm}$  が入力されて、最大変位  $u_{max}$  に至る半サイクルの間のエネルギーの釣合は、(7) 式から次のように表される。

$$E_e(u_{max}) + E_p(u_{max}) = r_{cycle} E_{dm} + E_e(u_{pre}) - E_p(u_{pre}) \quad (19)$$

ここで、 $u_{pre}$  はこの半サイクルの開始点での振幅である。

(19) 式の左辺は、初期状態から単調載荷で変位  $u_{max}$  に到達するのに必要な歪エネルギーを表すので、右辺の値が決まれば  $u_{max}$  は (19)

式から算定できる。右辺はこの変形に利用できるエネルギー量であり、 $r_{\text{cycle}} E_{dm}$  は地動によって供給される。直前の振幅  $u_{\text{pre}}$  が  $u_{\text{max}}$  に及ばず影響は、 $E_e(u_{\text{pre}}) - E_p(u_{\text{pre}})$  によって表されている。

$u_{\text{pre}}$  と  $E_e(u_{\text{pre}}) - E_p(u_{\text{pre}})$  との関係を、図 2 に示した 3 種の Trilinear 系について図 6 に示す。また、半サイクルの最大地震入力エネルギー  $r_{\text{cycle}} E_{dm}$  を初期弾性限歪エネルギー  $E_y$  の 5, 25, 50 倍としたとき、(19) 式から算定される  $u_{\text{pre}}$  と  $u_{\text{max}}$  との関係を図 7 に示す。半サイクルの最大地震入力エネルギー  $r_{\text{cycle}} E_{dm}$  が一定でも、直前の変位  $u_{\text{pre}}$  によって  $E_e(u_{\text{pre}}) - E_p(u_{\text{pre}})$  は変わるので、到達できる最大変位  $u_{\text{max}}$  は変動する。

まず、直前の振幅  $u_{\text{pre}}$  の上限を得るために、半サイクルの最大地震入力エネルギー  $r_{\text{cycle}} E_{dm}$  を除いた残りの地震入力エネルギー  $(1 - r_{\text{cycle}}) E_{dm}$  によって到達できる最大変位  $\max u_{\text{pre}}$  を求める。ただし、図 7 に示すように、直前の変位  $u_{\text{pre}}$  の増大に伴って最大変位  $u_{\text{max}}$  が増大する範囲では、 $u_{\text{max}}$  は  $u_{\text{pre}}$  の緩やかな関数であるので、 $\max u_{\text{pre}}$  の算定には厳密な精度は要求しない。 $\max u_{\text{pre}}$  は、4 章と同様の方法によっても算定できるが、ここでは更に単純化した方法を採用する。すなわち、4 章では初期弾性限歪エネルギー  $E_y$  を蓄える過程を別途考慮しているが、弾性域での繰り返しも含めて  $\max u_{\text{pre}}$  に至るまでの半サイクルの数を  $n$  とすると、(9)~(15) 式と同様に誘導してエネルギーの釣合式は次のように表される。

$$E_{\text{input}} = E_{\text{deform}} \quad (20)$$

ここで、

$$E_{\text{input}} = \{1 - (1 - r_{\text{cycle}})^n\} (1 - r_{\text{cycle}}) E_{dm} \quad (21.a)$$

$$E_{\text{deform}} = E_e(u_n) + n E_p(u_n) \quad (21.b)$$

上式の誘導においても、半サイクル毎の振幅に対する塑性歪エネルギー  $E_p(u_i)$  の平均値は  $E_p(u_n)/2$  であることを仮定している。

$\max u_{\text{pre}}$  は (20), (21) 式を満たす最大の  $u_n$  であり、次式の解として算定できる。

(1 -  $r_{\text{cycle}}$ )  $E_{dm} > E_y$  のとき、

$$\left\{ (1 - r_{\text{cycle}}) E_{dm} - E_e(\max u_{\text{pre}}) \right\} \ln(1 - r_{\text{cycle}}) - E_p(\max u_{\text{pre}}) \left\{ 1 - \ln \left( \frac{E_p(\max u_{\text{pre}})}{(1 - r_{\text{cycle}}) E_{dm} \ln(1 - r_{\text{cycle}})} \right) \right\} = 0 \quad (22.a)$$

(1 -  $r_{\text{cycle}}$ )  $E_{dm} \leq E_y$  のとき、

$$\max u_{\text{pre}} = u_{y1} \sqrt{\frac{(1 - r_{\text{cycle}}) E_{dm}}{E_y}} \quad (22.b)$$

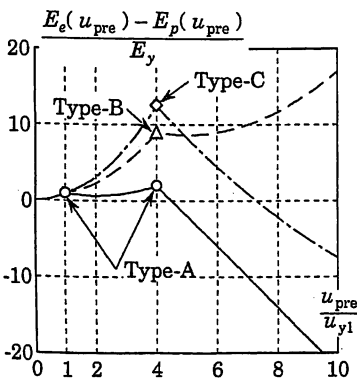
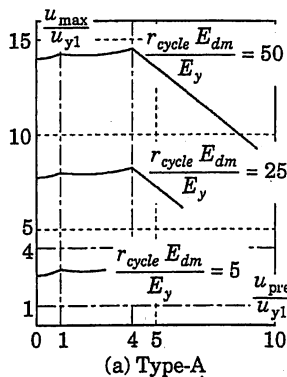
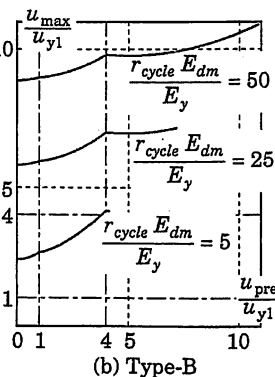


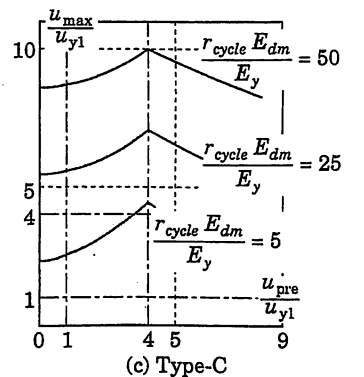
図 6  $E_e(u_{\text{pre}}) - E_p(u_{\text{pre}})$



(a) Type-A



(b) Type-B



(c) Type-C

図 7  $u_{\text{pre}} - u_{\text{max}}$  関係

さて、図 6 に示したように  $E_e(u_{\text{pre}}) - E_p(u_{\text{pre}})$  は特定の  $u_{\text{pre}}$  の値で極大値をとる性質がある。したがって、Type-A や Type-C の Trilinear 系では、入力エネルギー  $E_{dm}$  が十分に大きく、 $\max u_{\text{pre}}$  が  $u_{y2} = 4 u_{y1}$  を遙かに越えるとしても、図 7 に示すように、 $u_{\text{pre}}$  は  $u_{y2} = 4 u_{y1}$  であると仮定した方が到達できる最大変位  $u_{\text{max}}$  は大きくなる。

$E_e(u_{\text{pre}}) - E_p(u_{\text{pre}})$  が極大値をとる  $u_{\text{pre}}$  の値  $u_{cr}$  を明確に定義するために、 $u_{\text{pre}} - \{E_e(u_{\text{pre}}) - E_p(u_{\text{pre}})\}$  関係の勾配を考える。

まず、 $E_e(u_{\text{pre}}) + E_p(u_{\text{pre}})$  は単調載荷時の荷重  $P$  - 変位  $u$  関係の下面積として次式で得られる。

$$E_e(u_{\text{pre}}) + E_p(u_{\text{pre}}) = \int_0^{u_{\text{pre}}} P du \quad (23)$$

変位  $u$  で弾性である要素の剛性係数は  $dP/du$ 、荷重和は  $u dP/du$  であるので、弾性歪エネルギー  $E_e(u_{\text{pre}})$  は次式で表される。

$$E_e(u_{\text{pre}}) = \int_0^{u_{\text{pre}}} \frac{dP}{du} u du = \int_0^{u_{\text{pre}}} u dP \quad (24)$$

上式で  $P_{\text{pre}}$  は、単調載荷時の荷重  $P$  - 変位  $u$  関係上の変位  $u_{\text{pre}}$  に応じた荷重である。(23), (24) 式から、 $E_e(u_{\text{pre}}) - E_p(u_{\text{pre}})$  は次式となる。

$$E_e(u_{\text{pre}}) - E_p(u_{\text{pre}}) = 2 \int_0^{u_{\text{pre}}} \frac{dP}{du} u du - \int_0^{u_{\text{pre}}} P du \quad (25)$$

また、 $u_{\text{pre}} - \{E_e(u_{\text{pre}}) - E_p(u_{\text{pre}})\}$  関係の勾配は次式で得られる。

$$\frac{d\{E_e(u_{\text{pre}}) - E_p(u_{\text{pre}})\}}{du_{\text{pre}}} = 2 \frac{dP}{du} u - P = u \left( 2 \frac{dP}{du} - \frac{P}{u} \right) \quad (26)$$

上式から分かるように、 $E_e(u_{\text{pre}}) - E_p(u_{\text{pre}})$  が極大値をとる  $u_{\text{pre}}$  の値  $u_{cr}$  は、接線剛性  $dP/du$  が割線剛性  $P/u$  の 1/2 以下に低下するときの荷重 - 変位関係の折れ曲がり点での変位となる。なお、 $u_{cr}$  の値は図 6 に○、△、◇印で示しているが、Type-A では 2 点ある。Polylinear 系の  $m$  個の折れ曲がり点での変位すべてを  $u_{cr}$  として考慮しなければならない可能性はあるが、多数の折れ曲がり点をもつ Polylinear 系についても、 $u_{cr}$  の数は通常 1 または 2 程度と考えている。

半サイクルの最大地震入力エネルギー  $r_{\text{cycle}} E_{dm}$  が与えられる直前の振幅  $u_{\text{pre}}$  は、(22) 式で表した上限値  $\max u_{\text{pre}}$  以下の任意の値を取り得ることを考慮すると、最大変位  $u_{\text{max}}$  の上限は次式の解として算定できる。

$$E_e(u_{\text{max}}) + E_p(u_{\text{max}}) = r_{\text{cycle}} E_{dm} + E_e(u_{\text{pre}}) - E_p(u_{\text{pre}}) \quad (27)$$

ここで,

$$E_e(u_{pre}) - E_p(u_{pre}) = \max \{ E_e(\max u_{pre}) - E_p(\max u_{pre}), E_e(u_{cr}) - E_p(u_{cr}) \} \quad (28)$$

上式の  $\max u_{pre}$  は (22) 式で算定した値である。また,  $u_{cr}$  は, 接線剛性  $dP/du$  が割線剛性  $P/u$  の 1/2 以下に低下するときの荷重-変位関係の折れ曲がり点での変位のうち,  $\max u_{pre}$  以下の値である。したがって,  $E_e(u_{cr}) - E_p(u_{cr})$  は 0 個または複数個存在する場合がある。ただし,

$$u_{cr} \leq \max u_{pre} \quad (29)$$

本章で示した (27) 式による最大変位  $u_{max}$  の予測値は, 図 5 に太線で示している。前述したように, 図 5 (c), (f) に示す Type-C の結果において, 4 章で示した (16) 式による予測値は,  $u_{max}/u_{y1} = 4$  を越えると  $\sqrt{E_{dm}/E_y}$  の増大に伴う  $u_{max}/u_{y1}$  の増大速度は急激に小さくなる。太線で示した本章 (27) 式の予測値には, そのような傾向は認められず, 図 5 に示す全領域で応答値の上限を近似している。

図 8 には, 図 5 とは異なる表現で, 応答値と予測値とを比較している。図 8 は, 損傷に寄与する地震入力エネルギー  $E_{dm}$  を一定とし, 初期弾性限荷重  $P_{y1}$  を変化させたときの荷重と変位の最大応答値 ( $P_{max}, u_{max}$ ) を示したもので, それぞれ固有周期が等しい弾性系の最大応答値 ( $eP_{max}, e u_{max}$ ) で無次元化している。解析パラメータは次の通りである。

$T$  : 0.5, 1.0, 1.5 sec の 3 種

$P_{y1}/eP_{max}$  : 0.05 ~ 1 の 20 種

図 8 においても, 本章で示した (27) 式による予測値は太線で, 4 章で示した (16) 式による予測値は細線で示している。この図においても, 太線で示す (27) 式による予測値は, 応答値のほぼ上限を近似している。

4 章で示した (16) 式による予測値と本章で示した (27) 式による予測値の差は, この図 8 においても図 5 と同様に Type-C について示した (c), (f) 図に明確に現れている。

一方, Type-A と Type-B については, 2 つの予測値の差は, 図 5, 8 のいずれにおいてもあまり小さくなく, いずれの予測値も応答の上限を近似している。これは, 下記の理由による。

まず, Type-A については, 4 章で示した (16) 式による予測値としては  ${}_1u_{max}$  が採用されることが多く,  ${}_1u_{max}$  が採用されない場合も (16) 式による予測値と  ${}_1u_{max}$  の差は小さい。  ${}_1u_{max}$  は, 既に述べたように,  $u_{pre} = u_{cr} = u_{y1}$  として (27) 式から求められる値である。本章の予測値に用いられている  $u_{pre}$  の値は  $E_{dm}$  の大きさに応じて変動しているが, 図 6 に示したように,  $E_e(u_{pre}) - E_p(u_{pre})$  の値は  $u_{pre} = u_{cr} = u_{y2}$  としても  $u_{pre} = u_{cr} = u_{y1}$  のときに比べてあまり増大しない。したがって, 本章で示した (27) 式による予測値も  ${}_1u_{max}$  と近い値をとっている。以上のように 2 つの予測値のいずれもが  ${}_1u_{max}$  と近い値を取るの, 2 つの予測値の差は小さくなっている。

次に, Type-B については, 4 章で示した (16) 式による予測値としては, ほぼ全領域で  ${}_2u_{max}$  が採用されている。  ${}_2u_{max}$  は, 最大変位に到達するまで半サイクル毎に振幅を可能な限り増大し続けると考えて求めた値であり,  $u_{pre} = \max u_{pre}$  として (27) 式から求めた値に近い値をとる。図 6 によると, Type-B の  $E_e(u_{pre}) - E_p(u_{pre})$  は  $u_{pre}$  が  $u_{cr} = u_{y2}$  を越えた直後に一旦減少するが, その減少量は僅かであり, 全体的には  $u_{pre}$  の増大に伴って  $E_e(u_{pre}) - E_p(u_{pre})$  は概ね単調増大する傾向が強い。したがって, 本章の方法による予測値は  $u_{pre} = \max u_{pre}$  として (27) 式から求めた値と大差はない。このように 2 つの予測値がいずれも  $u_{pre} = \max u_{pre}$  として (27) 式から求めた値と

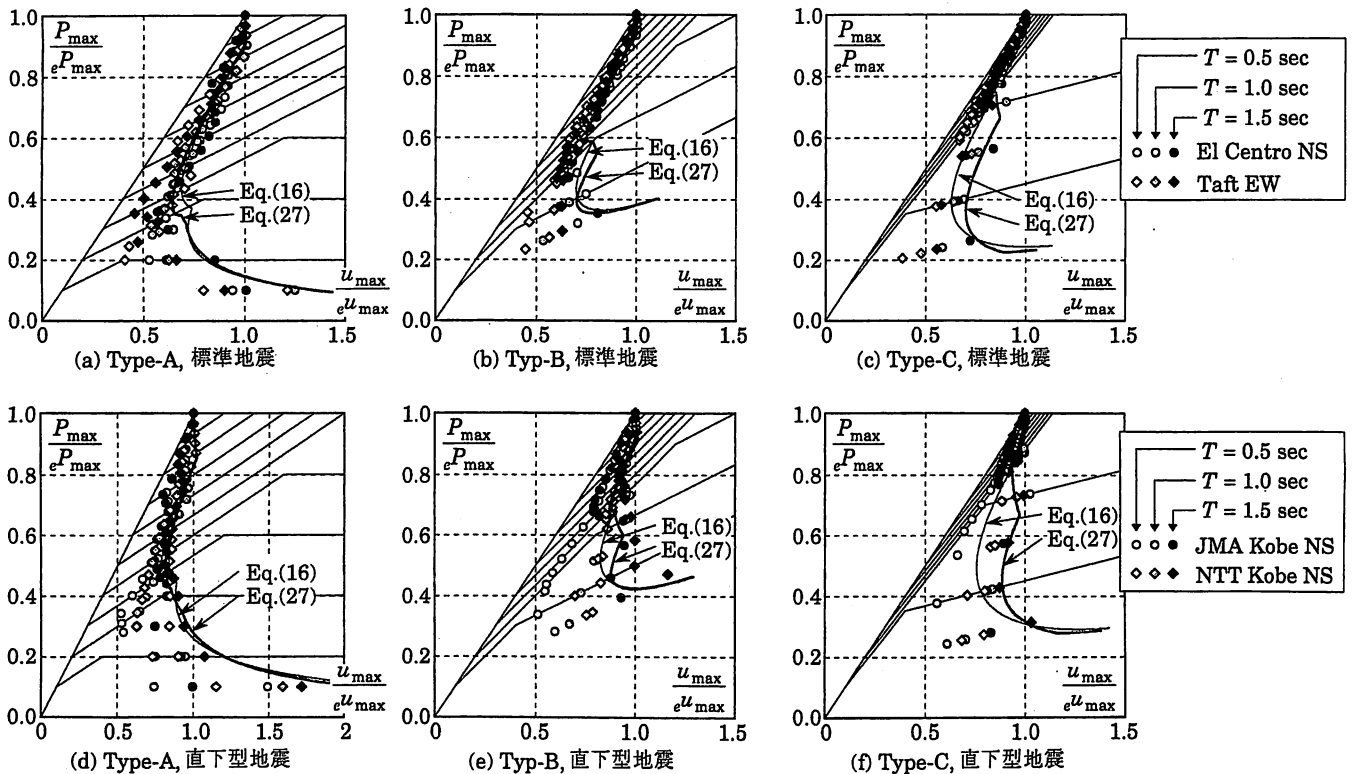


図 8  $P_{max}/eP_{max} - u_{max}/eu_{max}$  関係 (Trilinear 系)

近い値を取るの、2つの予測値の差は小さくなっている。

以上に述べたように、Type-Aのように降伏後の接線剛性が比較的小さく、荷重-変位関係のほぼ全領域で接線剛性が割線剛性の1/2程度以下とみなせる Polylinear 系については(17.b)式の ${}_1u_{\max}$ が、本章の予測値と近い値を取り、Type-Bのように、降伏後の接線剛性が比較的大きく、荷重-変位関係のほぼ全領域で、接線剛性が割線剛性の1/2程度以上とみなせる Polylinear 系については(17.c)式の ${}_2u_{\max}$ が、本章の予測値と近い値をとる。したがって、対象を明確に限定することができれば、前章に示した ${}_1u_{\max}$ や ${}_2u_{\max}$ の値は、この章で提案した方法より簡便な最大変位の予測式として利用することが可能である。筆者は既に、Type-Aのような Trilinear 系に対して、(17.b)式の ${}_1u_{\max}$ を最大変位の予測式として採用し、地震応答の適切な近似値が得られることを報告している<sup>8)</sup>。

## 6. Ramberg-Osgood 系の最大応答値

5章で提案した最大変位の予測法のより一般的な Polylinear 系への適用性を検討するために、折れ曲がり点の数が無限の Polylinear 型として Ramberg-Osgood 型の荷重-変位関係をもつ1自由度系(以下、Ramberg-Osgood 系と呼ぶ。)を取り挙げた。

Ramberg-Osgood 系の単調載荷時の荷重  $P$  - 変位  $u$  関係は次式で与えた。

$$\frac{u}{u_y} = \frac{P}{P_y} + \left(\frac{P}{P_y}\right)^R \quad (30)$$

Ramberg-Osgood 系では、上記のように単一関数で荷重-変位関係を表しているの、諸量の数式表現は容易である。ただし、前章まででは各量を変位  $u$  の関数として表示したが、Ramberg-Osgood 系については荷重  $P$  の関数として表した方が簡単になる。初期状態

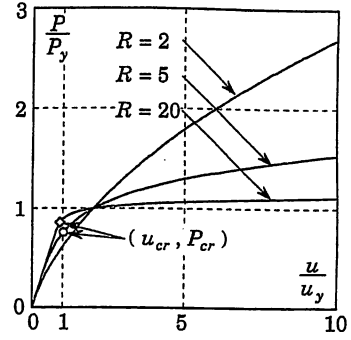


図9 Ramberg-Osgood 系の解析モデル

から荷重  $P$  に到達するまでの弾性歪エネルギー  $E_e(P)$  および塑性歪エネルギー  $E_p(P)$  は次式で表される。

$$E_e(P) = P_y u_y \left\{ \left(\frac{P}{P_y}\right)^2 + \frac{1}{R+1} \left(\frac{P}{P_y}\right)^{R+1} \right\} \quad (31.a)$$

$$E_p(P) = P_y u_y \frac{R-1}{R+1} \left(\frac{P}{P_y}\right)^{R+1} \quad (31.b)$$

また、 $E_e(P) - E_p(P)$  が極大値を取るときの荷重  $P_{cr}$  は、(26)式の値が零になるという条件から算定でき、 $R \leq 2$  のときには存在せず、 $R > 2$  のときには次式の1点が得られる。

$$P_{cr} = P_y \left(\frac{1}{R-2}\right)^{\frac{1}{R-1}} \quad \text{ただし、} R > 2 \quad (32)$$

以上の式を用いることによって、前章で示した方法によって Ramberg-Osgood 系の最大変位応答は予測できる。

数値解析例では、硬化指数  $R$  は 2, 5, 20 の3種とした。単調載荷時の荷重-変位関係の形状を図9に示しておく。 $E_e(P) - E_p(P)$  が極大値を取る時の変位・荷重  $(u_{cr}, P_{cr})$  は図9中に○、◇印で示し

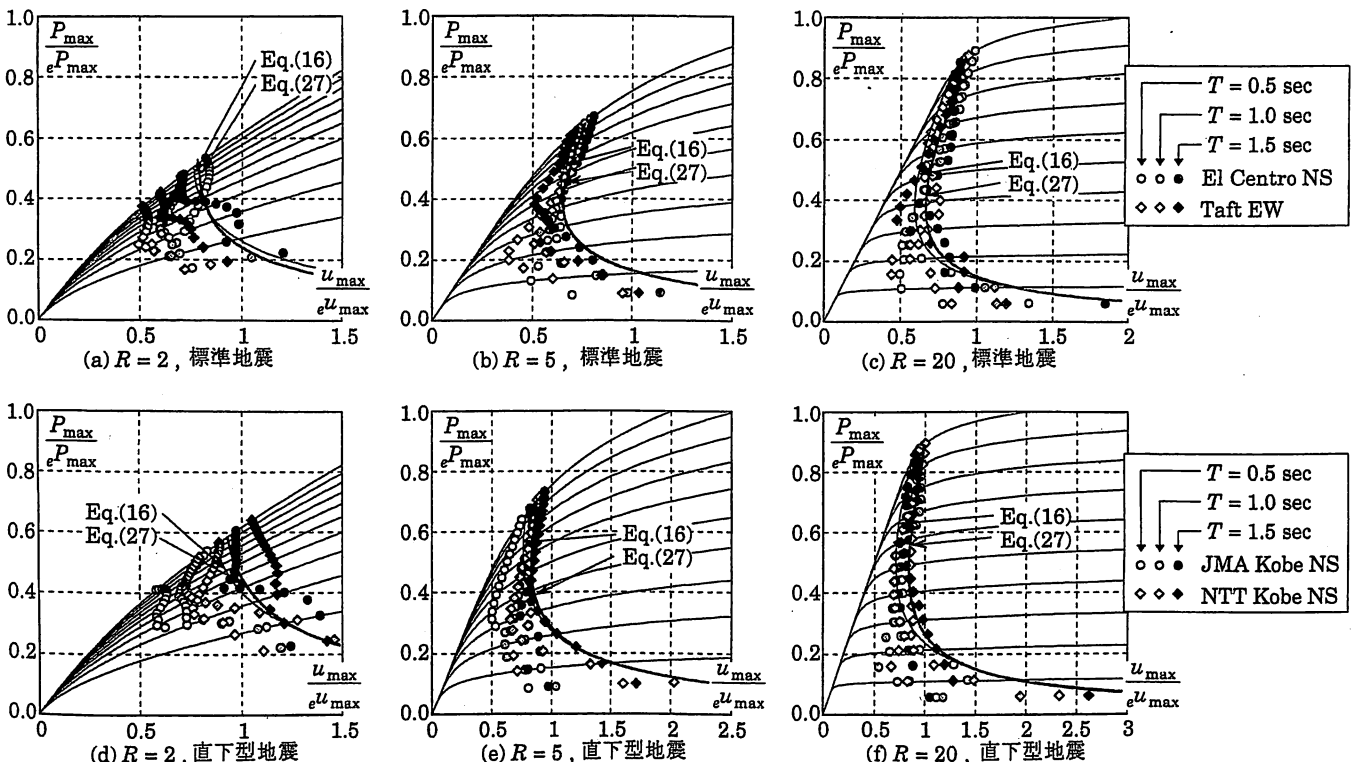


図10  $P_{\max}/P_{\max} - u_{\max}/u_{\max}$  関係 (Ramberg-Osgood 系)

ているが、 $R=2$ のときは存在せず、他は次の値をとる。

$$R=5 \text{ のとき, } u_{cr}=1.01 u_y, \quad P_{cr}=0.76 P_y \quad (33.a)$$

$$R=20 \text{ のとき, } u_{cr}=0.91 u_y, \quad P_{cr}=0.86 P_y \quad (33.b)$$

図 10 は、図 8 と同様に、損傷に寄与する地震入力エネルギー  $E_{dm}$  を一定とし、 $P_y$  を変化させたときの荷重と変位の最大応答値 ( $P_{max}, u_{max}$ ) を示したもので、それぞれ同じ固有周期をもつ弾性系の最大応答値 ( ${}_eP_{max}, {}_e u_{max}$ ) で無次元化している。ただし、解析パラメータは次の通りである。

$$T : 0.5, 1.0, 1.5 \text{ sec の 3 種}$$

$$P_y / {}_eP_{max} : 0.05 \sim 1 \text{ の 20 種}$$

上記の固有周期  $T$  は、初期剛性  $P_y / u_y$  を用いて求めた値である。

図 10 には、5 章に示した (27) 式による予測値を太線で示している。この図においても、(27) 式による予測値は応答値の上限を近似している。

図 10 中には、細線で 4 章に示した (16) 式による予測値を示している。ただし、Ramberg-Osgood 系では初期弾性域は存在しないので、 $E_y$  は零として (16) 式による予測値を求めている。細線は、全体的に太線 ((27) 式) と近い値をとっているが、 $P_y / {}_eP_{max}$  が大きい系について太線の予測値より小さくなり、この領域では細線の予測値を超える応答値が非常に多く現れている。

## 7. 結論

本論では、多数の完全弾塑性要素と弾性要素の並列結合で表される移動硬化型の履歴特性をもつ 1 自由度系を対象に、損傷に寄与する地震入力エネルギーの関数として、最大変位応答を予測する方法を 5 章で提案した。

本論で提案した方法と地震応答解析結果との比較は、初期降伏直後の接線剛性と大変形域での接線剛性が異なる 3 種の Trilinear 系と共に、無限の折れ曲がり点をもつ Polylinear 系として Ramberg-Osgood 系について行っている。これらの比較結果は、本論で提案した方法によって、種々の荷重-変位関係をもつ系の最大変位応答を精度よく予測できることを示している。

紙面の都合もあり、上記の応答解析例に用いた地震波形や荷重-変位関係の種類は、必ずしも十分ではない。しかし、本予測方法は応答解析結果から求めた実験式に基づくものではないので、解析例の量は適用範囲に影響しない。本論で提案した方法は、移動硬化型の履歴特性をもつ Polylinear 系に対して、広範な適用性をもつもの

と著者は判断している。ただし、単調載荷時の接線剛性が変位の増大と共に低下すること、負とならないことが、本論の前提条件である。

本論 5 章で提案した最大変位の予測法は、(22.a) 式から  $\max u_{pre}$  を得るために収束計算が必要なこと、 $\max u_{pre}$  の値に基づいて (28) 式で用いる  $u_{cr}$  の値が決まるので単一の算定式では表し得ないことなど、計算が面倒である。この問題を解決するための式の簡略化は今後の課題である。ただし、具体的な問題においては、対象はかなり限定されているはずであり、簡略化は対象を限定して検討するのが適当と考えている。すなわち、5 章で述べたように、降伏後の接線剛性が比較的小さい系については (17.b) 式の  ${}_1u_{max}$  を用いることや、降伏後の接線剛性が比較的大きな系については (17.c) 式の  ${}_2u_{max}$  を用いることも、簡略化の 1 つの方法である。

## 謝辞

本研究は、平成 13 年度科学研究費補助金 (基盤研究 C) の助成を受けて行いました。ここに記して、謝意を表します。

## 参考文献

- 1) (社)日本鋼構造協会 耐震要素の効果と耐震設計法WG：履歴型ダンパー付骨組の地震応答と耐震設計法，(社)日本鋼構造協会・(社)鋼材倶楽部，1998.9
- 2) 中川隆・浅野幸一郎：Poly-linear 型履歴ダンパーを用いた多層構造物の最適地震応答制御について，日本建築学会構造系論文集，第 506 号，pp.93-99，1998.4
- 3) 中川隆・浅野幸一郎：Poly-linear 型履歴ダンパーを用いた多層構造物の最適地震応答制御について—Poly-linear 型履歴ダンパーの最適剛性分布の評価—，日本建築学会構造系論文集，第 530 号，pp.45-51，2000.4
- 4) 小川厚治：半サイクルの地震入力エネルギーとバイリニア系の最大変位応答，日本建築学会構造系論文集，第 532 号，pp.185-192，2000.6
- 5) 小川厚治・井上一朗・中島正愛：損傷に寄与する地震入力エネルギーに関する研究，日本建築学会構造系論文集，第 530 号，pp.177-184，2000.4
- 6) 平野智久・小川厚治：Polylinear 型の復元力特性をもつ 1 自由度系の地震入力エネルギーに関する研究，構造工学論文集，Vol.46B，pp.629-640，2000.3
- 7) A. S. Veletsos and N. M. Newmark：Effect of Inelastic Behavior on the Response of Simple Systems to Earthquake Motions，Proc. of 2nd WCEE，Tokyo and Kyoto，pp.895-912，1960
- 8) 小川厚治・井上一朗・中島正愛・澤泉紳一：梁降伏型鋼構造ラーメン部材の必要塑性変形性能に関する研究，日本建築学会構造系論文集，第 537 号，pp.121-128，2000.11