

四角形及び多角形への垂心のある種の拡張

伊藤 仁一・Jamsran BUYANT

Some Extension of Orthocenter for Quadrilaterals or Polygons

Jin-ichi ITOH, Jamsran BUYANT

(Received October 3, 2011)

In this paper we study some kind of orthocenter for quadrilaterals. For any quadrilateral $ABCD$, let E be the intersection of 2 diagonals. We proved that the 4 perpendiculars from the orthocenter of triangle ABE , (resp. BCE , CDE , DAE) to the line CD (resp. DA , AB , BC) are concurrent (have the common point). Moreover this point coincides with the intersection of two lines going through the orthocenters of ABC , ACD and going through the orthocenters of ABD , BCD .

Key words : elementary geometry, quadrilateral, polygon, orthocenter

1. はじめに

三角形の垂心（三角形の3頂点からそれぞれ対辺に下した3垂線は一点で交わりその点を垂心という）については古くから知られているが、垂心に関しては、日本の算額でも他の三角形の心よりは扱われる場合が少ないように感じられるし、球面三角形では成立しないこともよく知られた事実である。また、昨年公表した論文 [1] においては、三角形と円から決まる点について議論したが、円が三角形の外接円の場合は垂心と一致するもので、ある意味で三角形の垂心の拡張について論じたものであるともいえる。

この論文では、四角形や多角形に対しても垂心に相当する点の存在の可能性を調べることを目的とし、以下のような結果を得た。まず、四角形を2つの対角線によりその対角線の交点も用いて4つの三角形に分け、各三角形の垂心から元の対辺に下した垂線が一点で交わる。

定理 1. 四角形 $ABCD$ の対角線の交点を E とするとき、三角形 EAB の垂心から CD へ下ろした垂線、三角形 EBC の垂心から DA へ下ろした垂線、三角形 ECD の垂心から AB へ下ろした垂線、三角形 EDA の垂心から BC へ下ろした垂線は1点 H_1 で交わる。

また、四角形を対角線で2つの三角形に分ける場合、その分け方は二通りあり（対角線が二本であることより）、各場合に2つの三角形の垂心を結ぶ2直線が得られるがこの交点は定理1の4垂線の交点 H_1 と一致する。

定理 2. 四角形 $ABCD$ に対し、三角形 ABC , BCD , CDA , DAB それぞれの垂心を H_a , H_b , H_c , H_d とするとき、直線 H_aH_c と H_bH_d の交点は定理1の3垂線の交点 H_1 と一致する。

更に、この点 H_1 を一般化された垂心と呼ぶことにすると、以下のような多角形への拡張が考えられる。五角形の場合、三角形と四角形に分ける分け方は4通りあり、各場合に三角形の垂心と四角形の一般化された垂心（定理1、定理2の H_1 ）を結ぶ5つの直線は一点で交わりこの点を五角形の一般化された垂心とみなす。すると一般的多角形に対しても帰納的に一般化された垂心に当たるものが定義できる。（定理3）

次に、円に内接する四角形に対して以下のような結果を得た。

定理 4. 円に内接する四角形 $ABCD$ の対角線の交点を E とする。三角形 ABE , BCE , CDE , DAE の外心から辺

CD, DA, AB, BC におろした 4 垂線は一点 E で交わる.

定理 5. 円に内接する四角形 ABCD の辺 AB, BC, CD, DA のそれぞれの中点から対辺におろした 4 垂線は一点で交わる.

定理 6. 円に内接する ABCD 四角形の対角線の交点を E とする. 三角形 ABE, BCE, CDE, DAE の重心から辺 CD, DA, AB, BC におろした 4 垂線は一点 E で交わる.

最後に, 三角形の重心, 外心, 垂心は同一直線上にあり, この直線はオイラー線と呼ばれることはよく知られているが, 四角形についても一般化された垂心を定理 2 のように定義することに対応して, ある意味での重心, 外心に相当するような点を同様に定義する場合において, 三角形のオイラー線のアナロジーについて考察し, 以下の結果を得た.

定理 8. 四角形 ABCD の対角線 AC, BD それぞれの中点を M, N とし, E を対角線の交点, G_a, G_b, G_c, G_d をそれぞれ三角形 BCD, CDA, DAB, ABC の重心, O_a, O_b, O_c, O_d をそれぞれ三角形 BCD, CDA, DAB, ABC の外心, H_a, H_b, H_c, H_d をそれぞれ三角形 BCD, CDA, DAB, ABC の垂心, $G_a G_c \cap G_b G_d = G_1$, $O_a O_c \cap O_b O_d = O_1$, $H_a H_c \cap H_b H_d = H_1$ とするとき,

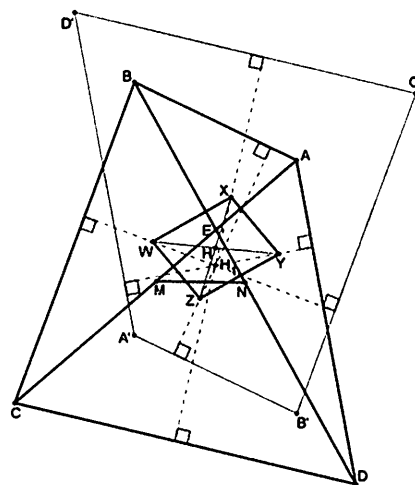
- 1) 点 G_1, O_1, H_1 は一直線上にある.
- 2) $2O_1 G_1 = G_1 H_1$ となる.

更に 2 つの予想についても述べる.

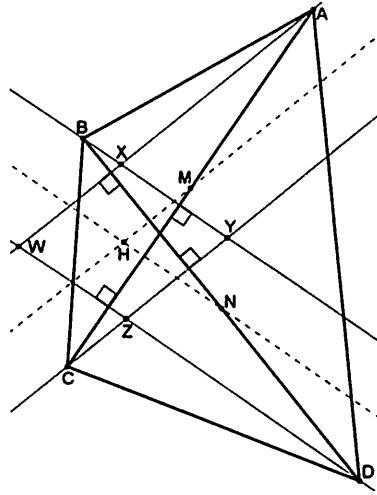
2. 定理 1 の証明

ここで, 以下の定理 1 の証明を与える.

定理 1. 四角形 ABCD の対角線の交点を E とするとき, 三角形 EAB の垂心から CD へ下ろした垂線, 三角形 EBC の垂心から DA へ下ろした垂線, 三角形 ECD の垂心から AB へ下ろした垂線, 三角形 EDA の垂心から BC へ下ろした垂線, は 1 点 H_1 で交わる.



証明: 四角形 ABCD について, 対角線の交点を E, 2 つの対角線の中点を M, N として, 三角形 EMN の垂心を H とする. 4 つの三角形 EAB, EBC, ECD, EDA の垂心をそれぞれ, X, Y, Z, W とする. このとき, 四角形 XYZW は平行四辺形となり, この平行四辺形の中心 (対角線の交点) が, 上記の H となる. このことは, $XY \perp AC, ZW \perp AC, YZ \perp BD, XW \perp BD$ と M から BD 到下ろした垂線が XW と平行で, XY の中点を通ること等から示される (次の図参照).



このとき、E と X, Y, Z, W のそれぞれを結ぶと、垂心であったことから、各々、元の四角形 ABCD の1つの辺と垂直となる。

また、A, B, C, D, E を、H に関して点対称変換した点を A', B', C', D', H₁ とおくと、平行四辺形は点対称であることから、H₁ と X, Y, Z, W のそれぞれを結ぶと、各々、四角形 A'B'C'D' の1つの辺と垂直となる。ところが、点対称移動で動かしたから、ABCD の辺と A'B'C'D' の辺は平行なので、H₁ は、X, Y, Z, W から CD, DA, AB, BC へ下ろした垂線上にある。

つまり、H₁ が題意の共通交点となる。

尚、この初等幾何的証明は濱中裕明（兵庫教育大学）氏によるものである。勿論、定理 2 の証明のように座標を用いて示すことも出来る。

3. 定理 2 の証明

ここでは、まず以下の命題（複素座標も用いた垂心の表現公式）を紹介する。

命題. 複素平面上の三角形 ABC の各頂点の複素座標を a, b, c とするとき、垂心の複素座標 h は $h = \{ (c-b)(c-a+b)\bar{a} + (a-c)(a-b+c)\bar{b} + (b-a)(b-c+a)\bar{c} \} / \{ (c-b)\bar{a} + (a-c)\bar{b} + (b-a)\bar{c} \}$ と表される。

証明: 垂心を表わす複素数を h とすると、 $AH \perp BC$ より $(h-a)/(c-b) + (\bar{h}-\bar{a})/(\bar{c}-\bar{b}) = 0$ が成り立つ。

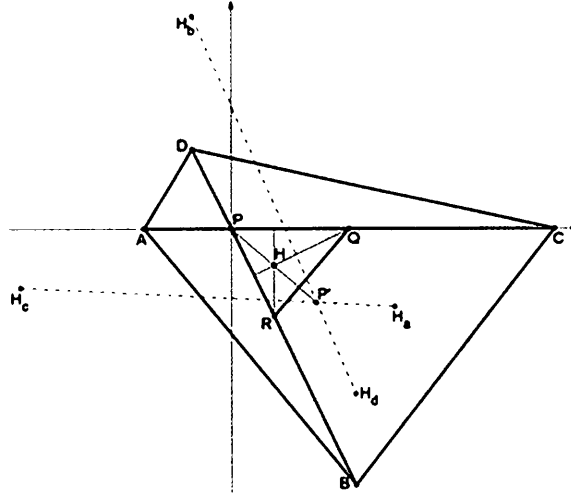
$BH \perp AC$ より $(h-b)/(c-a) + (\bar{h}-\bar{b})/(\bar{c}-\bar{a}) = 0$ が成り立つ。 \bar{h} を消去すれば、

$$h = \{ (c-b)(c-a+b)\bar{a} + (a-c)(a-b+c)\bar{b} + (b-a)(b-c+a)\bar{c} \} / \{ (c-b)\bar{a} + (a-c)\bar{b} + (b-a)\bar{c} \}$$

を得る。

特に $|a| = |\beta| = |\gamma| = 1$ のとき、 $h = a + \beta + \gamma$ という簡単な形に帰着する。

定理 2. 四角形 ABCD に対し、三角形 ABC, BCD, CDA, DAB それぞれの垂心を H_a, H_b, H_c, H_d とするとき、直線 $H_a H_c$ と $H_b H_d$ の交点は定理 1 の 4 垂線の交点 H_1 と一致する。



証明：四角形 ABCD を複素平面上に以下のようにとっても一般性を失わない。頂点 A, B 実軸上。対角線の交点 P を原点 0 とし各頂点 A, B, C, D の複素座標を a, b, c, d とする。このとき a, c と更に b/d は実数となることに注意する。また対角線の中点 Q, R の複素座標はそれぞれ $(a+c)/2, (b+d)/2$ となる。命題より三角形 PQR の垂心 H の座標は

$$\begin{aligned} H &= \{ (0 - (b+d)/2) (0 - (a+c)/2 + (b+d)/2) (\bar{a} + \bar{c})/2 + ((a+c)/2 - 0) ((a+c)/2 - (b+d)/2 + 0) (\bar{b} + \bar{d})/2 \\ &+ ((b+d)/2 - (a+c)/2) ((b+d)/2 - 0 + (a+c)/2) \bar{0} \} / \{ (0 - (b+d)/2) (\bar{a} + \bar{c})/2 + ((a+c)/2 - 0) (\bar{b} + \bar{d})/2 \\ &+ ((b+d)/2 - (a+c)/2) \bar{0} \} \\ &= \{ (1/8) (a+c) (b+d-a-c) (b+d-\bar{b}-\bar{d}) \} / \{ (1/4) (a+c) (\bar{b} + \bar{d} - b - d) \} \\ &= (1/2) (a+c-b-d) \end{aligned}$$

となる。よって、定理 1 の 4 垂線の交点の複素座標は $a+c-b-d$ と表される (定理 1 の証明より)。

一方、三角形 ABC, BCD, CDA, DAB の垂心 H_d, H_a, H_b, H_c の複素座標は

$$\begin{aligned} H_d &= \{ (c-b)(c-a+b)\bar{a} + (a-c)(a-b+c)\bar{b} + (b-a)(b-c+a)\bar{c} \} / \{ (c-b)\bar{a} + (a-c)\bar{b} + (b-a)\bar{c} \} = X_d / Y_d \\ H_a &= \{ (d-c)(d-b+c)\bar{b} + (b-d)(b-c+d)\bar{c} + (c-b)(c-d+b)\bar{d} \} / \{ (d-c)\bar{b} + (b-d)\bar{c} + (c-b)\bar{d} \} = X_a / Y_a \\ H_b &= \{ (a-d)(a-c+d)\bar{c} + (c-a)(c-d+a)\bar{d} + (d-c)(d-a+c)\bar{a} \} / \{ (a-d)\bar{c} + (c-a)\bar{d} + (d-c)\bar{a} \} = X_b / Y_b \\ H_c &= \{ (b-a)(b-d+a)\bar{d} + (d-b)(d-a+b)\bar{a} + (a-d)(a-b+d)\bar{b} \} / \{ (b-a)\bar{d} + (d-b)\bar{a} + (a-d)\bar{b} \} = X_c / Y_c \end{aligned}$$

となり、

$$H' = \{ (d-b)(d-a+b)\bar{a} + (a-c)(a-b+c)\bar{b} + (b-d)(b-c+d)\bar{c} + (c-a)(c-d+a)\bar{d} \} / \{ (d-b)\bar{a} + (a-c)\bar{b} + (b-d)\bar{c} + (c-a)\bar{d} \} = X' / Y'$$

とおくと、 $X_b + X_d = X', Y_b + Y_d = Y'$ であることに注意し、

$$(H' - H_d) / (H_b - H_d) = (X' / Y' - X_d / Y_d) / (X_b / Y_b - X_d / Y_d) = Y_b / Y'$$

の分母と分子ともに純虚数となることが確かめられるので、これは実数となり、点 H', H_b, H_d は同一直線上にあることが分かる。同様に点 H', H_a, H_c も同一直線上にあることが示される。従って、直線 $H_a H_c$ と $H_b H_d$ の交点 H' の座標を計算すると

$$\begin{aligned} H' &= \{ (d-b)((b+d)(a-c) - a^2 - c^2) + (a-c)((a+c)(\bar{b}-\bar{d}) - b\bar{b} + d\bar{d}) \} / \{ (a-c)(b-d) + (a-c)(\bar{b}-\bar{d}) \} \\ &= \{ (d-b)(b+d-a-c) + (\bar{b}-\bar{d})(a+c-b-d) \} / (b+\bar{b}-d-\bar{d}) \\ &= a+c-b-d \end{aligned}$$

となるので H と一致することが証明された。

勿論、初等幾何的証明を見つけ出すことが期待されるが、複素座標を用いることは有用であり、[1] の最後のページに書いた予想も複素座標を用いることによって、増田一男 (前東京工業大学) 氏によって示された。

また、この一致した交点を四角形の一般化された垂心とここでは呼ぶことにする。

4. 多角形への一般化

前節で、四角形の一般化された垂心が、四角形を2つの三角形に2通りに分けて、それぞれの場合に3角形の垂心を結ぶ2直線の交点となることが示されたので、そのアナロジーとして一般の多角形のついても同様の点を帰納的に定義する。即ち、五角形の場合は、三角形と四角形に分ける分け方は4通りあり、各場合に三角形の垂心と四角形の一般化された垂心を結ぶ5つの直線は一点で交わりこの点を五角形の一般化された垂心とみなす。六角形以上の場合も同様に定義できることを以下の定理で示す。

定理 3. 一般の n 角形 $A_1A_2 \dots A_n$ に対して、対角線によって三角形と $n-1$ 角形に分割する仕方は n 通りあり、その三角形の垂心と $n-1$ 角形の上記の意味の一般化した垂心を結ぶ n 本の直線は1点で交わる。

証明： 三角形 $A_1A_{n-1}A_n$ の垂心を H とし、 $n-1$ 角形 $A_1A_2 \dots A_{n-1}$ と n 角形 $A_1A_2 \dots A_n$ の垂心に当たる点をそれぞれ H_{n-1} と H_n とおく。 A_k ($k=1, \dots, n$)、 H_{n-1} 、 H の複素座標を a_k 、 h_{n-1} 、 h とおく。ここで一般の n 角形に対して垂心に当たる点 H_n の複素座標が以下のように与えられたと仮定して、定理の n 本の直線の交点となることを帰納法によって示す。

$$h_n = \{ \sum^n ((a_{k-1} - a_{k+1})(a_k - a_k + a_{k+1})\bar{a}_k) \} / \{ \sum^n ((a_{k-1} - a_{k+1})\bar{a}_k) \}$$

この分子を X_n と分母を Y_n と表す。(即ち $X_n = \sum^n ((a_{k-1} - a_{k+1})(a_k - a_k + a_{k+1})\bar{a}_k)$ 、 $Y_n = \sum^n ((a_{k-1} - a_{k+1})\bar{a}_k)$)

一般に次のことが知られている。三点 $A(a)$ 、 $B(b)$ 、 $C(c)$ が同一直線上にあることと $(b-a)/(c-a)$ が実数であることは同値である。ここで H の複素座標は命題より

$$h = \{ (a_n - a_{n-1})(a_n - a_1 + a_{n-1})\bar{a}_1 + (a_1 - a_n)(a_1 - a_{n-1} + a_n)\bar{a}_{n-1} + (a_{n-1} - a_1)(a_{n-1} - a_n + a_1)\bar{a}_n \} / \{ (a_n - a_{n-1})\bar{a}_1 + (a_1 - a_n)\bar{a}_{n-1} + (a_{n-1} - a_1)\bar{a}_n \} = X/Y$$

となり、この分子と分母を X 、 Y とおく。

以下で点 H 、 H_{n-1} 、 H_n を同一直線上にあることを証明する。また $a_k = a_{k,1} + ia_{k,2}$ とおく。($a_{k,1}$ と $a_{k,2}$ は実数で、 i は虚数単位を表す。)

$$\begin{aligned} Y_n &= \sum^n (a_{k-1} - a_{k+1})\bar{a}_k = \sum^n (a_{k-1,1} + ia_{k-1,2} - a_{k+1,1} - ia_{k+1,2})(a_{k,1} - ia_{k,2}) \\ &= \sum^n (a_{k-1,1}a_{k,1} - a_{k,1}a_{k+1,1} + a_{k-1,2}a_{k,2} - a_{k,2}a_{k+1,2} + ia_{k-1,2}a_{k,1} - ia_{k-1,1}a_{k,2} + ia_{k,2}a_{k+1,1} - ia_{k,1}a_{k+1,2}) \\ &= \sum^n i(a_{k-1,2}a_{k,1} + a_{k,2}a_{k+1,1} - a_{k-1,1}a_{k,2} - a_{k,1}a_{k+1,2}) = (2i) \sum^n (a_{k,2}a_{k+1,1} - a_{k,1}a_{k+1,2}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X_n &= \sum^n (a_{k-1} - a_{k+1})(a_k - a_k + a_{k+1})\bar{a}_k \\ &= (a_n - a_2)(a_n - a_1 + a_2)\bar{a}_1 + (a_{n-2} - a_n)(a_{n-2} - a_{n-1} + a_n)\bar{a}_{n-1} + (a_{n-1} - a_1)(a_{n-1} - a_n + a_1)\bar{a}_n \\ &\quad - (a_{n-1} - a_2)(a_{n-1} - a_1 + a_2)\bar{a}_1 - (a_{n-2} - a_1)(a_{n-2} - a_{n-1} + a_1)\bar{a}_{n-1} + X_{n-1} \\ &= (a_n - a_{n-1})(a_n - a_1 + a_{n-1})\bar{a}_1 + (a_1 - a_n)(a_1 - a_{n-1} + a_n)\bar{a}_{n-1} + (a_{n-1} - a_1)(a_{n-1} - a_n + a_1)\bar{a}_n + X_{n-1} \\ &= X + X_{n-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y_n &= \sum^n (a_{k-1} - a_{k+1})\bar{a}_k \\ &= (a_n - a_2)\bar{a}_1 + (a_{n-2} - a_n)\bar{a}_{n-1} + (a_{n-1} - a_1)\bar{a}_n - (a_{k-1} - a_2)\bar{a}_1 - (a_{n-2} - a_1)\bar{a}_{n-1} + Y_{n-1} \\ &= (a_n - a_{n-1})\bar{a}_1 + (a_1 - a_n)\bar{a}_{n-1} + (a_{n-1} - a_1)\bar{a}_n + Y_{n-1} \\ &= Y + Y_{n-1} \end{aligned}$$

より $h_n = X_n / Y_n = (X + X_{n-1}) / (Y + Y_{n-1})$ となる。従って、

$$\begin{aligned} (h_n - h) / (h_{n-1} - h) &= (X_n / Y_n - X / Y) / (X_{n-1} / Y_{n-1} - X / Y) = ((X + X_{n-1}) / (Y + Y_{n-1}) - X / Y) / (X_{n-1} / Y_{n-1} - X / Y) \\ &= Y_{n-1} / (Y + Y_{n-1}) = (\sum^{n-1} (a_{k,2}a_{k+1,1} - a_{k,1}a_{k+1,2})) / (\sum^n (a_{k,2}a_{k+1,1} - a_{k,1}a_{k+1,2})) \end{aligned}$$

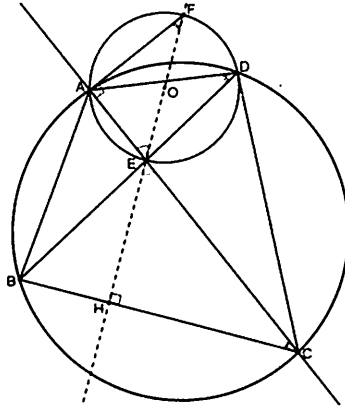
は実数となり3点 H 、 H_{n-1} 、 H_n が同一直線上にあることが証明された。他の三角形と $n-1$ 角形との分割についても同様である。

5. 円に内接する四角形の垂心

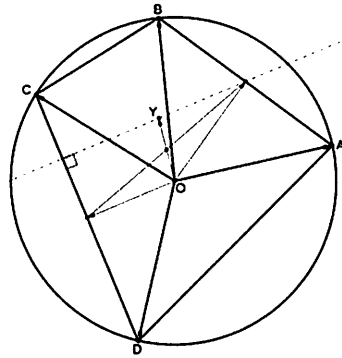
ここでは円に内接する四角形についてその垂心の性質を考察する。

定理 4. 円に内接する四角形 $ABCD$ の対角線の交点を E とする. 三角形 ABE, BCE, CDE, DAE の外心から対辺 CD, DA, AB, BC におろした 4 垂線は点 E で交わる.

証明: 三角形 DAE の外心を O , 直線 OE の三角形 DAE の外接円との交点を F , 辺 BC との交点を H とおく. $\angle AEF = \angle CEH$ であり, $\angle EFA = \angle EDA = \angle HCE$ となる. $\angle AEF + \angle EFA = \pi/2$ となるので, $\angle EHC = \pi/2$ となることが分る. 他は同じように証明される.



定理 5. 円に内接する四角形 $ABCD$ の辺 AB, BC, CD, DA の中点から対辺におろした 4 垂線は一点で交わる.



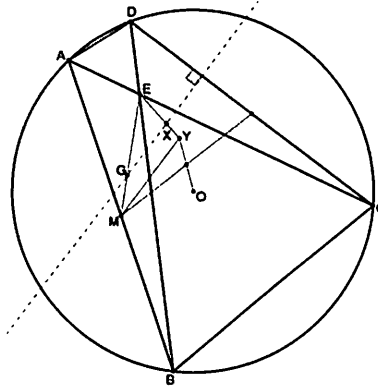
証明: 単位円上に半時計まわりに A, B, C, D と並んでいるとして, それぞれの位置ベクトルを a, b, c, d とする. 単位円上にあるので $|a| = |b| = |c| = |d| = 1$ となる. また, 辺 AB の中点は $(a+b)/2$ である. さらに, $(c+d)(c-d) = |c|^2 - |d|^2 = 0$ より, $c+d$ は辺 CD に垂直な方向ベクトルを表している. よって, AB の中点から対辺 CD に下ろした垂線は t をパラメーターとして, $(a+b)/2 + t(c+d)$ と表すことができる. この直線は点 $Y = (a+b+c+d)/2$ を ($t = 1/2$ のときに) 通る.

この式は a, b, c, d に関して完全に対称なので, いずれの辺の中点から対辺に垂線を下ろしても, 共通してこの点を通ることが示される.

この定理 5 の 2 つの対角線が直行する場合, 4 垂線は対角線の交点で交わり, この事実は Brahmagupta の定理として古くからよく知られているので, 定理 5 もおそらく知られているであろう.

定理 6. 円に内接する $ABCD$ 四角形の対角線の交点を E とする. 三角形 ABE, BCE, CDE, DAE の重心からそれぞれ辺 CD, DA, AB, BC におろした 4 垂線は点 E で交わる.

証明: 三角形 ABE の重心を G , 辺 AB の中点を M とおく. 定理 5 の点 Y を点 E と結ぶ. $EG:GM = 2:1$ より, G から辺 CD におろした垂線は直線 MY と平行になる. さらに, 線分 EY を $EX:XY = 2:1$ と内分する点 X で交わる. 他も同じようにこの点 X を通ることが示される.



6. 四角形のオイラー線

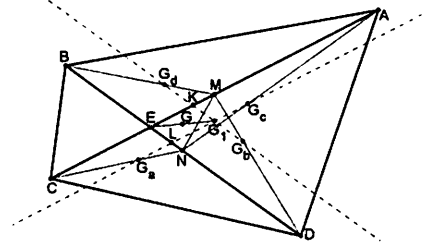
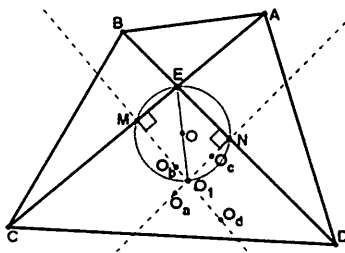
三角形の重心、外心、垂心は同一直線（オイラー線）上にあることはよく知られているが、四角形についても一般化された垂心を定理2のように得られることより、ある意味での重心、外心に相当するような点を同様に定義すると、以下の定理が得られる。

定理8. 四角形 ABCD の対角線 AC, BD それぞれの中点を M, N とし, E を対角線の交点, G_a, G_b, G_c, G_d をそれぞれ三角形 BCD, CDA, DAB, ABC の重心, O_a, O_b, O_c, O_d をそれぞれ三角形 BCD, CDA, DAB, ABC の外心, H_a, H_b, H_c, H_d をそれぞれ三角形 BCD, CDA, DAB, ABC の垂心, $G_aG_c \cap G_bG_d = G_1, O_aO_c \cap O_bO_d = O_1, H_aH_c \cap H_bH_d = H_1$ とするとき,

- 1) G_1, O_1, H_1 は一直線上にある.
- 2) $2O_1G_1 = G_1H_1$ となる.

証明: 定理1と定理7によって, H_1 は E を H に関して点対称変換した点となる.

$G_aG_c \cap BD = L, G_bG_d \cap AC = K$ とすると EKG_1N は平行四辺形になって, 重心の性質から $EK = 2KM, EL = 2LN$ となる. 従って, 点 G はこの平行四辺形の中点になる. つまり, G_1 は E を G に関して点対称変換した点となる.



$O_aN \perp BD, O_cN \perp BD, O_bM \perp AC, O_dM \perp AC$ より $\angle EMO_1 = \angle ENO_1$ となる.

従って, 四角形 ENO_1M は点 O を中心とする円に内接する. よって, O_1 は E を O に関して点対称変換した点となる. 上記より, G_1, O_1, H_1 は一直線上にのって, $2O_1G_1 = G_1H_1$ となり, 証明された.

勿論, 証明から明らかなように, 三角形 MNE のオイラー線を拡張したものとみなすことも出来る.

7. 終わりに

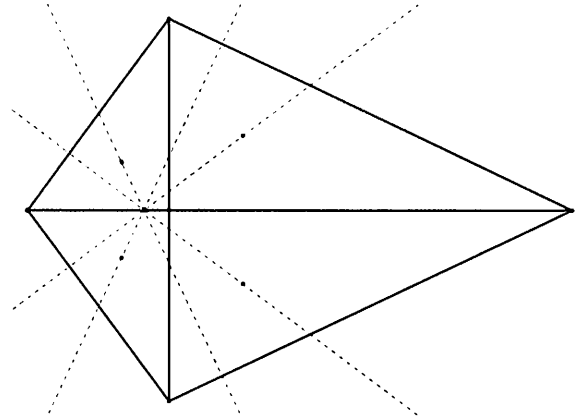
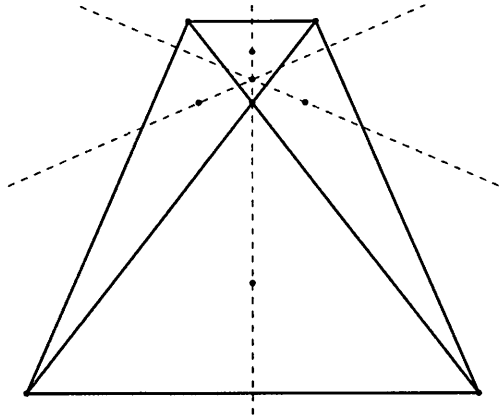
前回の論文 [1] と同様であるが, これらの結果は全 6 巻の幾何学大辞典 ([2]) には見当たらないが, 初等幾何には長い研究の歴史があり, どこかで知られている可能性がないとはいえないが, 四角形についてもいろいろ

る興味深い性質も分かってきたので、ここにまとめてみた。また、教育上にも一般に広く知らしめる事は意義があるものとする。実際、この論文をまとめてから四角形のオイラー線に関しては[4]に公表されていることを知ったが、別証明として発表することとする。また、図を描く計算機ソフトの発達により最近では、以前は気付かなかったような幾何学的性質が見つけやすくなっているようにも思われる。

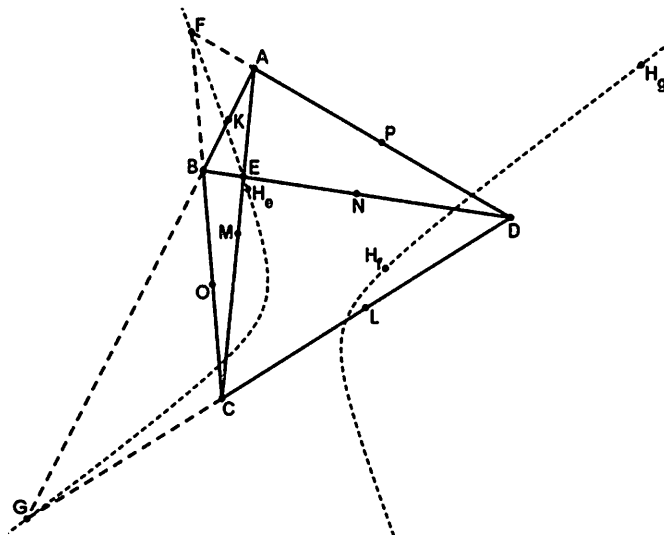
最後に垂心の代わりに内心から対辺に下した垂線に関する予想と完全四角形の場合についての予想を述べる。

予想1：四角形 $ABCD$ と対角線の交点からできる4つの三角形に対して、その内心から対辺（定理1の場合と同様に）に下した4本の垂線が一点で交わるのは以下の2つの場合である。

- a) 四角形 $ABCD$ は等脚台形である。
- b) 四角形 $ABCD$ の2つの対角線が垂直で、1つは交点で二等分される。



予想2. 完全四角形 $ABCD$ の2辺の交点を E, F, G として、辺 AB, BC, CD, DA, AC, BD の中点をそれぞれ K, O, L, P, M, N とする。 E を三角形 EMN の垂心に関して点対称変換した点を H_e とする。同様に H_f, H_g を定義するとき E, F, G, H_e, H_f, H_g の6点はある双曲線上にある。



参考文献

- [1] 伊藤仁一, Jamsran Buyant : 三角形と円から決まる点についての研究, 熊本大学教育学部紀要, 第59号, 11-18, (2010).
- [2] 岩田至康編 : 幾何学大辞典全6巻, 補巻I, II, 横書店, 1978.
- [3] コクセター著 (銀林浩訳) : 幾何学入門 (第2版), 明治図書, 1982.
- [4] A. Myakishev : On two remarkable lines related to a quadrilateral, Forum Geom. Vol 6 (2006), 289-295