

## ホモクリニック軌道による台車型倒立振子の振り上げ制御\*

石 飛 光 章\*<sup>1</sup>, 川 島 大\*<sup>2</sup>  
西 雅 俊\*<sup>3</sup>, 公 文 誠\*<sup>1</sup>

## Swinging Up of a Cart-pendulum System via a Homoclinic Orbit

Mitsuaki ISHITOBI\*<sup>4</sup>, Dai KAWASHIMA,  
Masatoshi NISHI and Makoto KUMON\*<sup>4</sup> Graduate School of Science and Technology, Kumamoto University,  
2-39-1 Kurokami, Kumamoto-shi, Kumamoto, 860-8555 Japan

This paper considers swinging up of a cart-pendulum system under the presence of modeling error. We propose a control method that swings the pendulum by bringing the behavior of the pendulum to the homoclinic orbit. It is achieved by introducing a new Lyapunov function candidate. However, the cart may move too widely during the swinging of the pendulum. Hence, constraining the cart within the cart track length is also considered to solve the problem. Experimental results show the effectiveness of the proposed control method.

**Key Words:** Nonlinear Control, Motion Control, Servo Mechanism, Inverted Pendulum System, Swinging-up, Homoclinic Orbit

## 1. 緒 言

倒立振子は従来、各種制御手法の実験検証によく用いられている。最近では、エネルギーにもとづく振子の振り上げ非線形制御に関する研究に関心が向けられている [1]-[9]。その中で、Lozano ら [3] は、エネルギー法の立場から、倒立振子がホモクリニック軌道と呼ばれる軌道に沿って動くようにすることによって、振子を振り上げる手法を提案している。しかし、この方法によって台車型倒立振子の振り上げ実験を行うと、倒立を実現することは難しい。これは、制御系設計に用いるモデルと実システムとの間にモデル誤差が存在することに起因すると推測される。

そこで本報告ではまず、モデル誤差の絶対値の上限が既知として、ホモクリニック軌道への収束性が保証される振り上げ制御方法を検討する。しかし、この方法ではシミュレーション、実験ともに、台車の変動が大きくなり、倒立を達成することが困難である。そこで次に、モデル誤差の支配的要因が粘性摩擦であることにもとづき、その場合に対応した振り上げ方法を提案する。そして、その方法の有効性を実験により検証する。

以下、2章で本研究の制御対象である台車型倒立振子システムの動特性を述べ、3章で制御系設計方法を与えて、有効性を検証し、4章で結言を与える。

## 2. 台車型倒立振子システム

図 1 に示す台車型倒立振子システムを考える。このシステムはレール上を移動できる台車に、自由に回転できる振子を取り付けられた装置である。DC モーターで台車を駆動することによって、振子の挙動を制御するシステムである。図 1 において、台車の変位を  $z$  [m]、振子の角変位を  $\phi$  [rad]、台車駆動力を  $f$  [N]、 $f$  とモータ印加電圧  $u$  [V] との間の比例定数を  $a$  [N/V] とする。また、台車の質量を  $M$  [kg]、振子の質量を  $m$  [kg]、関節から振子の重心  $G$  までの長さを  $l$  [m]、重力加速度を  $g$  [m/s<sup>2</sup>]、振子の重心回りの慣性モーメントを  $J$  [kgm<sup>2</sup>] とする。

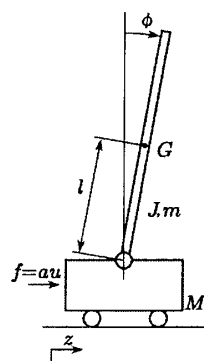


Fig. 1 The cart-pendulum system.

\* 原稿受付 2007年3月12日。

\*<sup>1</sup> 正員, 熊本大学大学院自然科学研究科 (〒860-8555 熊本市黒髪 2-39-1)。\*<sup>2</sup> 熊本大学大学院自然科学研究科。\*<sup>3</sup> 学生員, 熊本大学大学院自然科学研究科。

E-mail: mishi@kumamoto-u.ac.jp

このとき、システムの運動方程式は次式のように表される。ここで  $w$  はモデル誤差を表す。

$$M(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) + \mathbf{w} = \boldsymbol{\tau} \quad (1)$$

ただし

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} z \\ \phi \end{bmatrix}, \quad M(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} M + m & ml \cos \phi \\ ml \cos \phi & J + ml^2 \end{bmatrix}$$

$$C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} 0 & -ml\dot{\phi} \sin \phi \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} w_z \\ w_\phi \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} 0 \\ -mgl \sin \phi \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} f \\ 0 \end{bmatrix}$$

である。システムの各物理パラメータの概略値は以下のとおりである。  $M = 5.7$ ,  $m = 9.3 \times 10^{-2}$ ,  $l = 0.2$ ,  $J = 1.0 \times 10^{-3}$ ,  $a = 33.3$ ,  $g = 9.81$ .

### 3. 振り上げ制御方法

台車型倒立振子システムの全エネルギーは次式により与えられる。

$$E(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} - mgl(1 - \cos \phi) \quad (2)$$

ここで  $\dot{z} = 0$ ,  $E = 0$  となるとき、(2) 式は

$$\frac{1}{2}(J + ml^2)\dot{\phi}^2 = mgl(1 - \cos \phi) \quad (3)$$

となる。この関係式はホモクリニック軌道<sup>[3]</sup>と呼ばれ、 $\phi = 0$  のときのみ  $\dot{\phi} = 0$  となる。このことは、振子が平衡点  $(\phi, \dot{\phi}) = (0, 0)$  に届くまで時計回り、または反時計回りし続けることを意味する。したがって倒立振子システムの角変位  $\phi$  と角速度  $\dot{\phi}$  が軌道(3)式を満足すれば、振子が倒立点へ到達する軌道を運動することになる。その結果、振子の倒立が達成される。Lozano らは、次式のリアプノフ関数候補を考えることによって、角変位  $\phi$  と角速度  $\dot{\phi}$  を軌道(3)式に漸近させ、倒立を達成する方法を提案している<sup>[3]</sup>。

$$\bar{V} = \frac{k_E}{2} E^2 + \frac{k_z}{2} z^2 + \frac{k_v}{2} \dot{z}^2 \quad (4)$$

ただし、 $k_E$ ,  $k_z$ ,  $k_v$  はそれぞれ正定数である。しかし、モデル誤差が存在する場合には(4)式はリアプノフ関数になり得ない<sup>[9]</sup>。なぜなら、 $\dot{\bar{V}}$  が正になることがあるからである。そこで本報告では、新たに次式のリアプノフ関数候補を考えることによって、モデル誤差がある場合に対応した方法を提案する。

$$V = \frac{1}{2} \sigma^2, \quad \sigma = \frac{1}{2}(J + ml^2)\dot{\phi}^2 - mgl(1 - \cos \phi) \quad (5)$$

### 3.1 モデル誤差の絶対値の上限が既知の場合

**3.1.1 制御系設計** 本節では、制御入力を設計するにあたってモデル誤差の絶対値の上限が既知の場合の振り上げ制御方法を検討する。すなわち、 $|w_z| \leq C_z$ ,  $|w_\phi| \leq C_\phi$  となる有界の  $C_z$ ,  $C_\phi$  が既知であるものとする。

まず、 $V$  の時間微分を求めると次式が得られる。

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \sigma \dot{\sigma} \\ &= \sigma \dot{\phi} \left\{ (J + ml^2) \ddot{\phi} - mgl \sin \phi \right\} \end{aligned} \quad (6)$$

一方、(1) 式は次式のように表し直すことができる。

$$\ddot{\phi} = \frac{1}{|M(\mathbf{q})|} \left\{ h_\phi(z, \dot{z}, \phi, \dot{\phi}) - ml f \cos \phi \right\} \quad (7)$$

ただし

$$\begin{aligned} h_\phi(z, \dot{z}, \phi, \dot{\phi}) &= h_1(\phi, \dot{\phi}) + ml w_z \cos \phi - (M + m) w_\phi \\ h_1(\phi, \dot{\phi}) &= (M + m) mgl \sin \phi - (ml \dot{\phi})^2 \sin \phi \cos \phi \end{aligned}$$

である。(7) 式を(6)式に代入すると

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \frac{\sigma \dot{\phi}}{|M(\mathbf{q})|} \left[ h_V(z, \dot{z}, \phi, \dot{\phi}) - (J + ml^2) ml f \cos \phi \right] \\ &= \frac{\sigma \dot{\phi}}{|M(\mathbf{q})|} \left[ h_3(\phi, \dot{\phi}) - (J + ml^2) ml f \cos \phi \right. \\ &\quad \left. - \tilde{h}_V(z, \dot{z}, \phi, \dot{\phi}) |\sigma \dot{\phi}| \right] \end{aligned} \quad (8)$$

となる。ただし

$$\begin{aligned} h_V(z, \dot{z}, \phi, \dot{\phi}) &= h_2(\phi, \dot{\phi}) \\ &\quad + (J + ml^2) \{ ml w_z \cos \phi - (M + m) w_\phi \} \\ h_2(\phi, \dot{\phi}) &= (ml)^2 \sin \phi \cos \phi \left\{ mgl \cos \phi - (J + ml^2) \dot{\phi}^2 \right\} \\ h_3(\phi, \dot{\phi}) &= h_2(\phi, \dot{\phi}) \\ &\quad + (J + ml^2) \{ ml C_z |\cos \phi| + (M + m) C_\phi \} \operatorname{sgn}(\sigma \dot{\phi}) \\ \tilde{h}_V(z, \dot{z}, \phi, \dot{\phi}) &= \\ &\quad \frac{1}{|M(\mathbf{q})|} (J + ml^2) ml |\cos \phi| \left\{ C_z - \operatorname{sgn}(\sigma \dot{\phi} \cos \phi) w_z \right\} \\ &\quad + \frac{1}{|M(\mathbf{q})|} (J + ml^2) (M + m) \left\{ C_\phi + \operatorname{sgn}(\sigma \dot{\phi}) w_\phi \right\} \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

である。ここで制御入力  $f$  として次式のリレー型の入力を考える。

$$f = \frac{h_3(\phi, \dot{\phi}) + k |M(\mathbf{q})| \operatorname{sgn}(\sigma \dot{\phi})}{(J + ml^2) ml \cos \phi} \quad (9)$$

ただし、 $k$  は正定数である。このとき、 $\dot{V}$  は

$$\dot{V} = - \left\{ k + \tilde{h}_V(z, \dot{z}, \phi, \dot{\phi}) \right\} |\sigma \dot{\phi}| \leq 0 \quad (10)$$

となる。ここで、振子の初期状態を最下点以外に取れば、すなわち、 $(\phi(0), \dot{\phi}(0)) \neq (\pi, 0)$  とすれば、 $\sigma \neq 0$  では  $\dot{V} < 0$  となる。なぜなら、 $k + \tilde{h}_V(z, \dot{z}, \phi, \dot{\phi}) > 0$  であり、初期状態を最下点以外に取れば  $\sigma \neq 0$  で  $\dot{\phi} = 0$  となるのは瞬時的であり、 $\dot{V} \equiv 0$  となることはないからである。したがって、その条件のもとで  $\sigma \rightarrow 0$  が達成され、振子の挙動はホモクリニック軌道へ漸近する。

一方、この方法ではまだ台車の変位が陽に考慮されていないため、台車の変位が過大になる可能性がある。そこで、新たに付加入力  $v$  を与えて、台車の過大変動を抑制することを考える。そのために、先に求めた入力  $f$  を主入力  $f_1$  とし、それに付加入力  $v$  を足し合わせて全制御入力  $f$  とする。すなわち

$$f = f_1 + v \quad (11)$$

付加入力  $v$  を次式のように構成する。

$$v = -\frac{|M(\mathbf{q})|}{(J + ml^2)ml} \frac{\alpha z}{1 - \frac{|z|}{L} + \beta} \quad (12)$$

$L$  [m] はホモクリニック軌道への収束性が保証され得る、台車の変動振幅である。また  $\alpha, \beta$  は次式の不等式を満たす  $\varepsilon$  が存在するように与える。

$$k \geq \frac{\alpha L}{\beta} + \varepsilon \quad (13)$$

ただし、 $\alpha, \beta, \varepsilon$  はすべて正定数である。この付加入力は、台車が原点から離れるときには台車を原点に引き戻そうとする復元力を及ぼす。そして  $|M(\mathbf{q})|$  は変動が微小であることから、付加入力の値の変化にほとんど影響を及ぼさない。したがって、(12) 式右辺の分母の  $1 - |z|/L + \beta$  が小さくなるほど、すなわち、台車が原点から  $\pm(1 + \beta)L$  [m] に近づくほど、大きな復元力が加わる。次に、このように入力を与えるときのホモクリニック軌道への収束性について述べる。

入力を (11) 式で構成したとき

$$\dot{V} = -|\sigma\dot{\phi}| \left\{ k + \tilde{h}_V(z, \dot{z}, \phi, \dot{\phi}) - \text{sgn}(\sigma\dot{\phi})\alpha\zeta(z) \cos\phi \right\}$$

となる。ただし

$$\zeta(z) = \frac{z}{1 - \frac{|z|}{L} + \beta}$$

である。さらに、 $\tilde{h}_V(z, \dot{z}, \phi, \dot{\phi}) \geq 0$  および (13) 式の関係を用いると

$$\dot{V} \leq -|\sigma\dot{\phi}| \left\{ \frac{\alpha L}{\beta} + \varepsilon - \text{sgn}(\sigma\dot{\phi})\alpha\zeta(z) \cos\phi \right\}$$

が得られる。ここで  $\text{sgn}(\sigma\dot{\phi})\alpha\zeta(z) \cos\phi \leq 0$  のとき、明らかに

$$\dot{V} \leq -\varepsilon|\sigma\dot{\phi}| \quad (14)$$

が成立する。また  $\text{sgn}(\sigma\dot{\phi})\alpha\zeta(z) \cos\phi > 0$  のときも  $\max(\text{sgn}(\sigma\dot{\phi})\alpha\zeta(z) \cos\phi) = \alpha L/\beta$  であることから、同様に (14) 式が成立する。したがって前と同様に、振子の初期状態を最下点以外に取れば、 $\sigma \rightarrow 0$  が保証され、振子の挙動が表す軌道はホモクリニック軌道へ漸近する。

**3.1.2 シミュレーションおよび実験** 前述の方法の有効性を、まずシミュレーションによって検証した。シミュレーションでは次節で述べるモデルを対象とした。その結果、理論に合致した振り上げ挙動を実現するような設計パラメータ  $k, \alpha, \beta, \varepsilon$  を選定することは困難であった。特に、付加入力によって台車の過大変動を抑制しているにもかかわらず、台車変位が大きく変動する傾向が見られた。原因としては、モデル誤差の情報として絶対値の最大値が得られているだけであるため、その情報を利用した (9) 式の絶対値が大きくなることが考えられる。

実験でも同様の挙動を示し、望ましい振り上げを実現することはできなかった。

### 3.2 モデル誤差を粘性摩擦とする場合

**3.2.1 制御系設計** Lozano らの方法では、実験で振り上げを実現することが困難であったため、モデル誤差の主要因を特定することを試みた。具体的には、あらかじめ決めた入力を実験システムとモデルに印加して応答の差を減らすようにモデルを調整した。その結果、モデル誤差を粘性摩擦として

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} w_z \\ w_\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \quad (15)$$

$$d_1 = 36.0 \text{ [Ns/m]}, \quad d_2 = 1.2 \times 10^{-3} \text{ [Nms]}$$

と与えると、図 2 に示すように両者の角変位がよく一致した。そこで以下では、(15) 式をモデル誤差として、前と同様に (5) 式をリアプノフ関数候補として制御系を設計する。

まず、 $V$  の時間微分を求める。(1) 式は次式のように表し直すことができる。

$$\ddot{\phi} = \frac{1}{|M(\mathbf{q})|} \left\{ \hat{h}_\phi(\dot{z}, \phi, \dot{\phi}) - mlf \cos\phi \right\} \quad (16)$$

ただし

$$\hat{h}_\phi(\dot{z}, \phi, \dot{\phi}) = h_1(\phi, \dot{\phi}) + mld_1\dot{z} \cos\phi - (M + m)d_2\dot{\phi}$$

である。

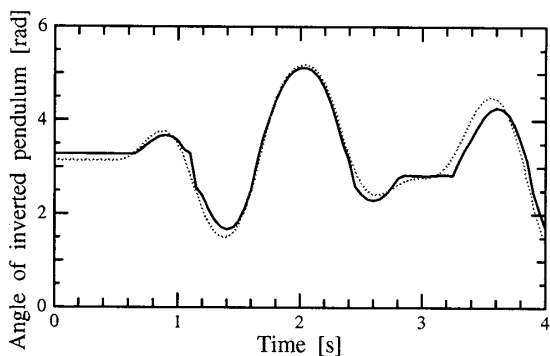


Fig. 2 The outputs of angle of the pendulum. Solid and dotted lines indicate the outputs of experimental system and model, respectively.

そこで, (16) 式を (6) 式に代入すると

$$\dot{V} = \frac{\sigma\dot{\phi}}{|M(\mathbf{q})|} \left[ \hat{h}_V(\dot{z}, \phi, \dot{\phi}) - (J + ml^2)mlf \cos \phi \right] \quad (17)$$

が得られる。ただし

$$\hat{h}_V(\dot{z}, \phi, \dot{\phi}) = h_2(\phi, \dot{\phi}) + (J + ml^2) \left\{ mld_1\dot{z} \cos \phi - (M + m)d_2\dot{\phi} \right\}$$

である。ここで主入力  $f_1$  として, 次式を与える。ただし,  $k$  は正定数である。

$$f_1 = \frac{\hat{h}_V(\dot{z}, \phi, \dot{\phi}) + k|M(\mathbf{q})|\text{sgn}(\sigma\dot{\phi})}{(J + ml^2)ml \cos \phi} \quad (18)$$

そして, 振子の振り上げ時の台車変動を抑制するために, 補助入力  $v$  として前節と同様に (12) 式を与える。また,  $\alpha, \beta$  は次式の不等式を満たす  $\varepsilon$  が存在するように与える。

$$k \geq \alpha \left( \frac{L}{\beta} + \varepsilon \right) \quad (19)$$

ただし,  $\alpha, \beta, \varepsilon$  はすべて正定数である。次に, このように各制御入力を設計したときのホモクリニック軌道への収束性について述べる。

入力  $f$  を (18) 式と (12) 式を用いて (11) 式と構成すると

$$\dot{V} = -|\sigma\dot{\phi}| \left\{ k - \text{sgn}(\sigma\dot{\phi})\alpha\zeta(z) \cos \phi \right\}$$

となる。さらに, (19) 式の関係を用いると上式は

$$\dot{V} \leq -\alpha|\sigma\dot{\phi}| \left\{ \frac{L}{\beta} + \varepsilon - \text{sgn}(\sigma\dot{\phi})\zeta(z) \cos \phi \right\}$$

となる。ここで  $\text{sgn}(\sigma\dot{\phi})\zeta(z) \cos \phi \leq 0$  のとき, 明らかに

$$\dot{V} \leq -\alpha\varepsilon|\sigma\dot{\phi}| \quad (20)$$

が成立する。また  $\text{sgn}(\sigma\dot{\phi})\zeta(z) \cos \phi > 0$  のときも  $\max(\text{sgn}(\sigma\dot{\phi})\zeta(z) \cos \phi) = L/\beta$  であることから, 同様に (20) 式が成立する。したがって振子の初期状態を最下点以外に取れば,  $\sigma \rightarrow 0$  が保証され, 前節と同様に振子の挙動が表す軌道はホモクリニック軌道へ漸近する。

**3.2.2 シミュレーションおよび実験** この方法の有効性を, シミュレーションおよび実験を通して検証した。その結果, シミュレーションおよび実験のいずれも, 同じ設計パラメータで振子の倒立を達成することができた。そのときの実験結果を図 3-7 に示す。

入力の構成に必要な速度信号  $\dot{z}, \dot{\phi}$  は, 実際には直接測定することができない。そのため, サンプリング時間ごとに測定される変位信号  $z, \phi$  を用い, 次式で表される 1 次近似差分によって求めている。

$$\dot{z}(kT) \simeq \frac{z(kT) - z((k-1)T)}{T} \quad (21)$$

$$\dot{\phi}(kT) \simeq \frac{\phi(kT) - \phi((k-1)T)}{T} \quad (22)$$

ここに,  $T$  はサンプリング周期である。また, 制御入力  $f$  は  $\cos \phi \simeq 0$  のときに発散する可能性がある。そこでこの問題を回避するために, 十分小さい正定数  $\gamma$  を与え,  $|\cos \phi| \leq \gamma$  となるときには,  $\cos \phi$  を  $\gamma \text{sgn}(\cos \phi)$  で代用した。また振子が振り上がり,  $|\phi| < 0.3$  になったとき, 制御方法を線形系に対する極配置法による安定化制御に切り替えている。実験条件は以下のとおりである。

各設計パラメータ:  $k = 5.0 \times 10^{-3}$ ,  $\alpha = 1.5 \times 10^{-2}$ ,  
 $\beta = 90.1 \times 10^{-2}$ ,  $L = 0.3$ ,  $\gamma = 3.3 \times 10^{-2}$ ,  
 $\varepsilon = 3.70 \times 10^{-4}$   
 サンプリング周期:  $T = 5.0$  [ms]

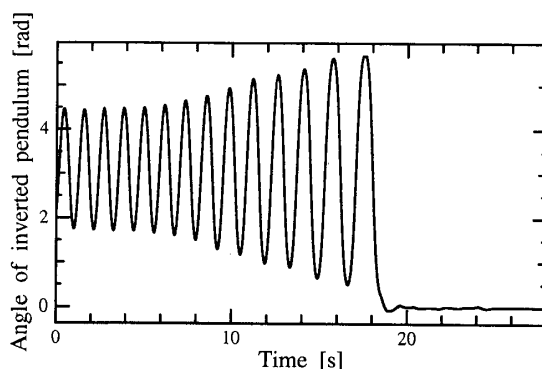


Fig. 3 Angle of inverted pendulum.

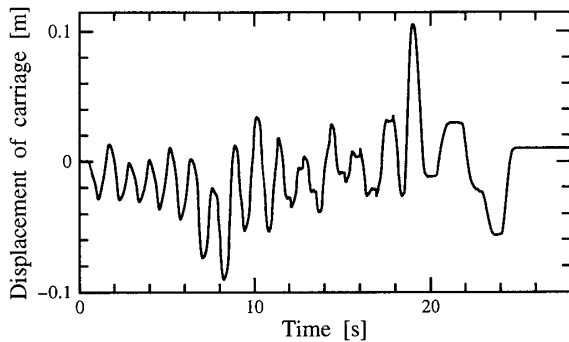


Fig. 4 Displacement of carriage.

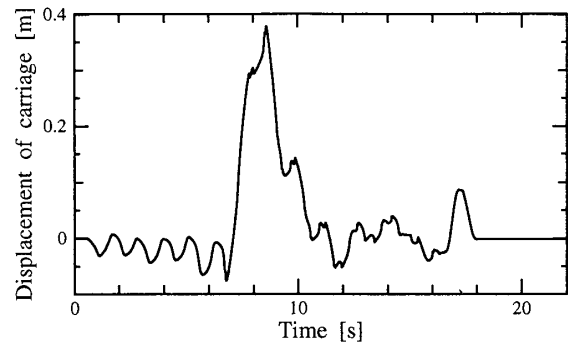


Fig. 8 Displacement of carriage.

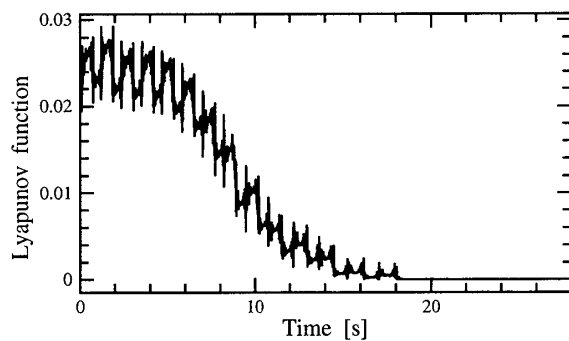


Fig. 5 Lyapunov function.

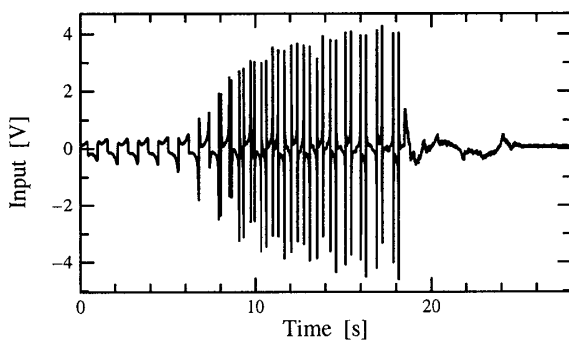


Fig. 6 Input.

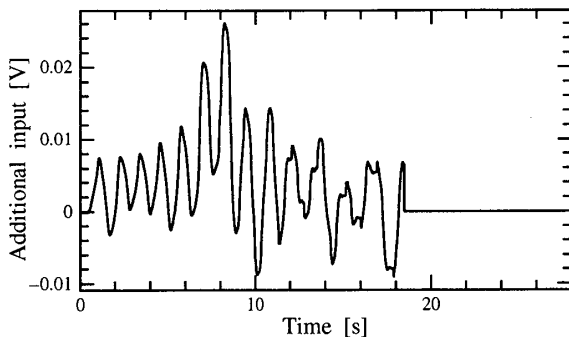


Fig. 7 Additional Input.

実験では、約 18 秒で  $|\phi| < 0.3$  となって、線形安定化制御に切り替わっている。図 3 は、振子が徐々に振れを大きくしていき、最終的に振り上がっていることを示している。図 5 を見るとリアプノフ関数  $V$  は全体的に減少傾向にはあるが、周期的に振動しており、恒等的に  $\dot{V} \leq 0$  となっていない。これは、台車の速度  $\dot{z}$  や振子の角速度  $\dot{\phi}$  を (21), (22) 式によって求めていることに起因する。また、図 4, 7 から台車が原点から離れるほど、付加入力は大きな振幅になっていることが分かる。付加入力の振幅は主入力に比べて小さく、その台車の抑制効果はほとんどないように見えるが、この付加入力を与えない場合には台車の変位が大きくなる場合がある。図 8 に、付加入力を与えず、主入力のみで実験を行ったときの台車の変位を示す。実験条件は以下のとおりである。

各設計パラメータ:  $k = 9.0 \times 10^{-3}$ ,  $\gamma = 3.3 \times 10^{-2}$   
 サンプル周期:  $T = 5.0$  [ms]

図 8 から明らかなように、台車の変位は約 0.4 [m] にまで大きくなっている。

#### 4. 結 言

本論文では、ホモクリニック軌道にもとづく台車型倒立振子の振り上げ制御方法を考察している。従来の Lozano らの方法による実験では、モデル誤差の存在のために倒立を達成することができないため、モデル誤差を考慮した制御方法を提案している。まず、モデル誤差の絶対値の上限が既知の場合の方法を論じ、この方法では台車の振幅が過大になり、倒立達成が困難であることを明らかにしている。次に、粘性摩擦がモデル誤差の支配的要因であることにもとづき、その場合に対応した制御方法を述べ、有効性を実験で示している。

## 文 献

- (1) Chung, C. C. and Hauser, J., Nonlinear Control of a Swinging Pendulum, *Automatica*, Vol. 31, No. 6 (1995), pp. 851-862.
- (2) Åström, K. J. and Furuta, K., Swinging up a Pendulum by Energy Control, *Automatica*, Vol. 36, No. 2 (2000), pp. 287-295.
- (3) Lozano, R., Fantoni, I. and Block, D. J., Stabilization of the Inverted Pendulum around its Homoclinic Orbit, *Systems & Control Letters*, Vol. 40, Issue 3 (2000), pp. 197-204.
- (4) Zhong, W. and Röck, H., Energy and Passivity Based Control of the Double Inverted Pendulum on a Cart, *Proceedings of the 2001 International Conference on Control Applications of the Institute of Electrical and Electronics Engineers* (2001), pp. 896-901.
- (5) Shiriaev, A. S., Egeland, O., Ludvigsen, H. and Fradkov, A. L., VSS-version of Energy-based Control for Swinging up a Pendulum, *Systems & Control Letters*, Vol. 44, Issue 1 (2001), pp. 45-56.
- (6) Angeli, D., Almost Global Stabilization of the Inverted Pendulum via Continuous State Feedback, *Automatica*, Vol. 37, No. 7 (2001), pp. 1103-1108.
- (7) Henmi, T., Deng, M., Inoue, A., Ueki, N. and Hirashima, Y., Energy-based Control of a Double Inverted Pendulum, *Workshop on Adaptation and Learning in Control and Signal Processing of the International Federation of Automatic Control* (2004), pp. 173-178, Yokohama.
- (8) Sakurama, K., Hara, S. and Nakano, K., Swing-up and Stabilization Control of a Cart-pendulum System via Energy Control and Controlled Lagrangian Methods, *Transactions on Electronics, Information and Systems of the Institute of Electrical Engineers of Japan*, Vol. 126-C, No. 5 (2006), pp. 617-623.
- (9) Ishitobi, M., Ohta, Y., Nishioka, Y. and Kinoshita, H., Swing-up of a Cart-pendulum System with Friction by Energy Control, *Proceedings of Institution of Mechanical Engineers*, Vol. 218, Part I: *Journal of Systems & Control Engineering*, No. 15 (2004), pp. 411-415.