グリッドサーチ法を用いたEMアルゴリズムによる領域分割

松本 英敏*[1]，椋木 俊文*[2]，藤見 俊夫*[2]

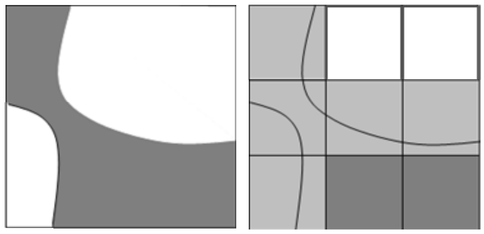
[1] 熊本大学工学部技術部，[2] 熊本大学自然科学研究科

１．はじめに

これまでX線CT撮影などで得られた画像に対して，頻度解析を実施し物性間の閾値決定法が提案されている[1,2)]。実際の試料では各相の境界にミクセルと呼ばれる混合画素が存在するため，今回はグリッドサーチ法を用いたEMアルゴリズムによって，画像の領域をよりクリアに定量的評価が可能となったので紹介する。

２．ＥＭアルゴリズム

X線画像を構成する最小要素はピュアボクセルと呼ばれ，ミクセルとは1画素の内部に複数の材料が存在する混合画素を意味する。X線CT画像はある厚みを持ったボクセル画像の集合体であり，物質同士の境界において図1の様なミクセルが出現する可能性が高い。EMアルゴリズム[3)](Expectation-Maximization Algorithm)は，完全なデータに対する最尤法を基礎にして，反復法により不完全なデータに基づくパラメータの最尤推定を行う方法である。



(a) 原画像　　(b) pixel 分割

図１ ミクセルの概念図

2.1 ピュアピクセル

1種類の均質な材料をCT撮影しても，そのCT値のヒストグラムは正規分布に従っていると見なせる。そこで，材料(k=1,2,3)のピュアボクセルのCT値は正規分布に従って確率的にばらつくと仮定すると，ピクセルのCT値が従う分布の確率密度関数は，次式で表される。

$$N(x\,|\,\mu_k,\sigma_k^2)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_k^2}}\exp(\frac{(x-\mu_k)^2}{2\sigma_k^2} \qquad (1)$$

2.2 ミクセル

2材料に関しては，ミクセルのCT値は正規分布 $N(a\mu_1+(1-a)\mu_2,\ a^2\sigma_1^2+(1-a)^2\sigma_2^2)$ に従うと仮定すれば，a を固定したとき，CT値の密度関数は(2)式で表わされる。

$$f(x\,|\,\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,a)=\frac{1}{\sqrt{2\pi(a^2\sigma_1^2+(1-a)^2\sigma_2^2)}}\exp(\frac{(x-(a\mu_1+(1-a)\mu_2))^2}{2(a^2\sigma_1^2+(1-a)^2\sigma_2^2)} \qquad (2)$$

ただし，実際のミクセル内の面積比 a は一様分布に従うものと仮定され，ミクセルの密度関数Mは次式の数値積分により算出される。

$$M(x\,|\,\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2)=\int_0^1 f(x\,|\,\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,a)\,da \qquad (3)$$

2.3 全体モデル

試料全体のCT値の確率密度関数は，ピュアピクセルの確率密度関数とミクセルの確率密度関数が面積比 π_k を重みとした線形和で表わされると仮定すれば，3材料についての全体の確率密度関数は次式になる。

$$p(x \mid \mu_1,\mu_2,\mu_3,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\sigma_3^2,\pi_1,\pi_2,\pi_3,\pi_{12},\pi_{23},\pi_{13}) = \sum_{k=1}^{3}\pi_k N(x \mid \mu_k,\sigma_k^2)$$
$$+\pi_{12}M(x \mid \mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2)+\pi_{23}M(x \mid \mu_2,\mu_3,\sigma_2^2,\sigma_3^2)+\pi_{13}M(x \mid \mu_1,\mu_3,\sigma_1^2,\sigma_3^2) \tag{4}$$

2.4 尤度関数

試料全体の確率密度関数は式(4)の積で表わされるが，観測された CT 値の得られる確率が最大になるようにパラメータを設定するには，対数尤度関数を用いる。

$$\ln L = \ln\sum_{n=1}^{N} p(x_n \mid \mu_1,\mu_2,\mu_3,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\sigma_3^2,\pi_1,\pi_2,\pi_3,\pi_{12},\pi_{23},\pi_{13}) \tag{5}$$

式(5)を最大にするように, パラメータがまとめて求められると特別な処理は不要であるが，一般的には非常に難しいので，ここでは EM アルゴリズムを利用した。EM アルゴリズムとは，π_k を使って期待値を算出する E ステップと μ_k,σ_k^2 を算出する M ステップを別々に行い, 相互に繰り返しながら対数尤度式(5)を最大にするようなパラメータ決定法である。

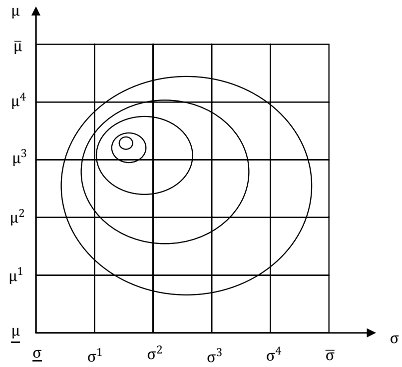


図２　グリッドサーチ法の概念図

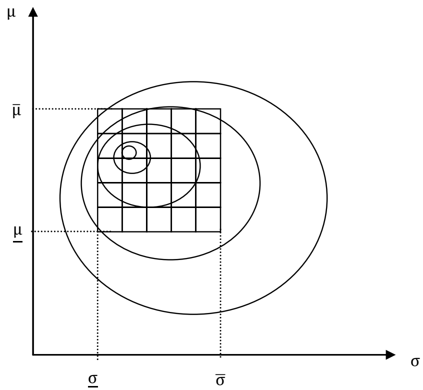


図３　最大値近傍の再分割

３．グリッドサーチ法

M ステップにおいて，対数尤度式(5)を最大化するパラメータ解析手法としてニュートン法，準ニュートン法と同様にグリッドサーチ法がある。図 2 にグリッドサーチ法の概念図を示す。パラメータが二変数の場合，平面上にある山として表現できる。G 分割したσ軸の下限から上限，μ軸も同様に下限から上限へと進んで行き，各グリッドで対数尤度が最大となるグリッドを探す。そして図 3 のように新たなグリッドの両隣を更に G 分割して，対数尤度の最大値の増大が見られなくなる（収束条件を満たす）まで処理を繰り返すことで最適解を得る。

４．おわりに

今回，グリッドサーチ法を用いた EM アルゴリズムによる領域分割に取り組んだ。現在の結果にはほぼ満足している。グリッドサーチ法の繰返し計算には膨大な時間を要するので，今後の課題としては処理速度の向上に尽きる。

この論文は地盤工学ジャーナルに掲載予定であり，その暁には実験の図表や解析データなど，より詳細な報告ができると思う。この様な機会をいただいた両先生に大変感謝している。

＜参考文献＞

1) 松本英敏，今泉慎哉，椋木俊文：ミクセルを有する CT 画像の閾値決定法，熊本大学総合技術研究会，2010.

2) 小林優矢，川崎 了，加藤昌治，椋木俊文，金子勝比古：バイオグラウド処理された地盤材料を用いた間隙率評価手法に関する研究，Journal of MMU,Vol.125,pp.540-546,2009.

3) 北本朝展，高木幹雄：ミクセルが存在する場合の混合分布推定，In 1995 年秋情処全大，Vol.1,pp.17-18,1995