情報処理応用

上田 誠 [A)]，松本 英敏 [B)]

[A)]環境構造グループ，[B)]学術支援グループ

1　はじめに

社会環境工学科 3 年前期に標記の科目がある．これまでの授業は単発的な課題が多かったが，今回は若い新任の教員ということもあり，いくつかの手法を連動させた斬新な課題であった．概要を下記に示す．

1. Fortran の復習（Newton-Raphson 法，LU 分解，掃き出し法）
2. 応力に関する計算（Newton-Raphson 法，掃き出し法プログラムの改良）
3. 連立方程式の解法（LU 分解，Gauss-Seidel 法）
4. 最小二乗法（逆解析，t 検定による外れ値の求め方）
5. 最終課題（プレゼン発表）

固有値解析は Newton-Raphson 法，固有ベクトルは掃き出し法で求められる等，支援した我々自身も大変参考になった．以下に報告する．

2　主応力および単位ベクトル

主応力とは，図 1 に示したように任意に切り取った面の表面力が，その面に対して垂直になるときの応力であり，ある面の応力は 3 次元表示すれば式(1)で表される．

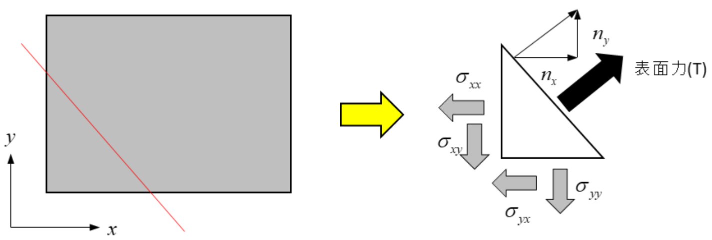

図 1　主応力面と単位ベクトル

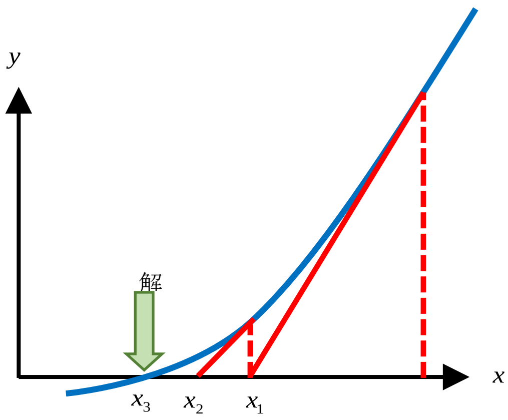

図 2　Newton Raphson 法

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{yx} & \sigma_{zx} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & \sigma_{zy} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} T_x \\ T_y \\ T_Z \end{Bmatrix} \qquad (1)$$

式(1)で，面に対して平行な力の成分，つまりせん断応力が存在しないとき主応力 λ は式(2)となった．

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{yx} & \sigma_{zx} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & \sigma_{zy} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix} = \lambda \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_Z \end{Bmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} \sigma_{xx}-\lambda & \sigma_{yx} & \sigma_{zx} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy}-\lambda & \sigma_{zy} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz}-\lambda \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix} = 0 \qquad (2)$$

今回，次の応力値を与えて計算した.

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{yx} & \sigma_{zx} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & \sigma_{zy} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 & 10 & 10 \\ 10 & 0 & 20 \\ 10 & 20 & 0 \end{pmatrix} \qquad (3)$$

結局，式(2)は固有値問題に帰着する.

$$\begin{vmatrix} 30-\lambda & 10 & 10 \\ 10 & -\lambda & 20 \\ 10 & 20 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad (4)$$

固有値 $\lambda^3 - 30\lambda^2 - 600\lambda + 8000 = 0$ を Newton-Raphson 法（図 2）を用いて解く.

$f(\lambda) = \lambda^3 - 30\lambda^2 - 600\lambda + 8000$ 及び $f'(\lambda) = 3\lambda^2 - 60\lambda - 600$, 収束条件を 10^{-12} として計算した結果 $\lambda = -20, 10, 40$ と主応力が求まった.

次に固有ベクトルを求める．固有ベクトルは式(2)にそれぞれの λ を代入して，掃き出し法により求める.
掃き出し法の計算を最下行の一つ上でやめると

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx}-\lambda & \sigma_{yx} & \sigma_{zx} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy}-\lambda & \sigma_{zy} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz}-\lambda \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix} = 0 \quad , \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & A \\ 0 & 1 & B \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix} = 0 \qquad (5)$$

これを展開すれば

$$\begin{matrix} n_x + An_z = 0 \\ n_y + Bn_z = 0 \end{matrix} \quad n_z = t \text{ と置くと } \quad \begin{matrix} n_x = -At \\ n_y = -Bt \\ n_z = t \end{matrix} \quad \text{となり} \quad \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix} = t \begin{Bmatrix} -A \\ -B \\ 1 \end{Bmatrix} \qquad (6)$$

n_x, n_y, n_z は主応力面に垂直な単位ベクトルであり， $n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1$ より

$$(-At)^2 + (-Bt)^2 + t^2 = 1 \quad t^2(A^2 + B^2 + 1) = 1 \ , \quad t = \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + 1}}$$

拠って，式(6)は

$$\begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + 1}} \begin{Bmatrix} -A \\ -B \\ 1 \end{Bmatrix} \qquad (7)$$

主応力 $\lambda = -20, 10, 40$ の場合，式(7)を計算すると

$$\begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{Bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -0.7071 \\ 0.7071 \end{Bmatrix} \ , \ \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0.5774 \\ 0.5774 \\ 0.5774 \end{Bmatrix} \ , \ \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{Bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.8165 \\ 0.4082 \\ 0.4082 \end{Bmatrix}$$

それぞれの主応力面（固有値）における単位ベクトル（固有ベクトル）が求まる．

3　おわりに

今回，標記の科目について教育支援する機会をいただいた才ノ木准教授に感謝している次第である．構造問題である主応力の計算を，数値解析の Newton Raphson 法や掃き出し法と結び付けて解くことに感動した．

本報告の冒頭で示したとおり，授業では他の演習として，連立方程式の解法である L/U 分解やガウス・ザイゼル法，最小二乗法についてもプログラム作成の課題があったが，プログラム自体は入出力を含め 100 行程度の簡単なものであり，解くアルゴリズムが素晴らしい．

この講義は選択必修科目であるため正規の受講生が 1 名，勉強したい 4 年生 1 名であったことが大変残念であった．本当にもったいない．