

精度向上を目指した有限要素法解析手法の
開発とその応用に関する研究

2002年3月

内 山 義 博

目次

図表一覧

第1章 序論	1
1.1 研究の背景	1
1.2 既往の研究	2
1.3 本論文の構成	2
参考文献	3
第2章 ズーム法解析	5
2.1 概説	5
2.2 ズーム法理論	5
2.2.1 分割, 拡大マトリックス	5
2.2.2 ズーム法理論	7
2.2.3 修正ズーム法	11
2.3 数値計算結果と考察	14
2.3.1 はじめに	14
2.3.2 円穴を持つ長方形板の解析	14
2.4 結論	20
参考文献	20
第3章 適正なズーム領域判定法	22
3.1 概説	22
3.2 平面応力問題の基礎式	22
3.3 応力の変化率を用いたズーム領域の判定	23
3.3.1 ポアソン比による応力の微分	23
3.3.2 ズーム法における応力の微分	26
3.3.3 修正ズーム法における応力の微分	27
3.4 数値計算結果と考察	28
3.4.1 はじめに	28
3.4.2 応力に及ぼすポアソン比の影響	28
3.4.3 ズーム領域を考慮したズーム解析	33
3.5 結論	41
参考文献	42
第4章 相似メッシュを用いた解析	43
4.1 概説	43
4.2 効率的な縮合法と相似メッシュ系	43
4.2.1 効率的な縮合法	43
4.2.2 相似メッシュ系の剛性マトリックス	44
4.3 相似メッシュ系の効率的な縮合法	46
4.3.1 平面問題への適用	46
4.3.2 中間行節点変位の算定	49
4.3.3 立体問題への適用	50
4.3.4 曲げを受ける棒材への適用	52
4.3.5 一部修正系への適用	55

4.4	数値計算結果と考察	57
4.4.1	はじめに	57
4.4.2	片持ち梁の解析	57
4.4.3	立体片持ち柱の解析	67
4.4.4	異なるテーパーを持つ梁からなる構造物の解析	69
4.4.5	一部付加剛性を持つ梁の解析	72
4.4.6	降伏により一部剛性が変化した梁の解析	74
4.4.7	曲げを受ける棒材の解析	76
4.5	結論	77
	参考文献	78
第5章	結論	79
5.1	総括	79
5.2	今後の課題と将来への展望	80

謝 辞

図表一覧

第2章 ズーム法理論

- 図-2.1 原系
- 図-2.2 1回ズーム用等価節点力
- 図-2.3 1回ズーム
- 図-2.4 2回ズーム用等価節点力
- 図-2.5 $Z^{(1)}$ 状態図
- 図-2.6 $\bar{Z}^{(1)}$ 状態図
- 図-2.7 再解析部
- 図-2.8 2回ズーム R_3 領域
- 図-2.9 再解析部
- 図-2.10 $\bar{Z}^{(1)}$ 状態図
- 図-2.11 円孔をもつ平板モデル
- 図-2.12 1/4解析モデル
- 図-2.13 円孔モデルのズーム領域
- 図-2.14 要素分割様式1(原系)
- 図-2.15 要素分割様式2(原系)
- 図-2.16 要素分割様式1のズーム細分割図
- 図-2.17 要素分割様式2のズーム領域
- 図-2.18 円孔モデルの応力集中係数と要素数の関係

表-2.1 円孔モデル諸元

表-2.2 各モデルの解析結果(応力集中係数)

第3章 適正なズーム領域判定法

- 図-3.1 三角形内一定応力要素
- 図-3.2 三角形内線形応力要素
- 図-3.3 長方形板モデル
- 図-3.4 等分布荷重作用状態
- 図-3.5 円孔をもつ平板モデル
- 図-3.6 円孔をもつ半無限板モデル
- 図-3.7 ポアソン比による応力変化(円弧36分割)
- 図-3.8 ポアソン比による応力変化(円弧120分割)
- 図-3.9 円弧分割数による応力変化($\nu=0.1$)
- 図-3.10 円孔モデルのズーム領域
- 図-3.11 主応力の微分値の分布図(要素分割様式1)
- 図-3.12 主応力の微分値の分布図(要素分割様式2)
- 図-3.13 修正要素分割様式のズーム細分割図
- 図-3.14 修正要素分割様式のズーム領域
- 図-3.15 円孔モデルの応力集中係数と要素数の関係
- 図-3.16 楕円孔をもつ平板モデル

- 図-3.17 1 / 4 解析モデル
- 図-3.18 楕円孔モデルメッシュ図
- 図-3.19 主応力の微分値の分布図
- 図-3.20 楕円孔モデルの応力集中係数と要素数の関係
- 図-3.21 主せん断応力の微分値の分布図

- 表-3.1 長方形板モデル諸元
- 表-3.2 A要素主応力の変化(kgf/mm²)
- 表-3.3 円孔を持つ長方形板モデル諸元
- 表-3.4 x軸上の垂直応力(σ_y kgf/mm²)
- 表-3.5 円孔を持つ半無限板モデル諸元
- 表-3.6 各分割方法モデルの解析結果(応力集中係数)
- 表-3.7 楕円孔モデル諸元

第4章 相似メッシュを用いた解析

- 図-4.1 原系
- 図-4.2 内部行の消去・縮合
- 図-4.3 効率的な内部行の消去・縮合
- 図-4.4 平面問題相似系メッシュ
- 図-4.5 3次元問題相似系メッシュ
- 図-4.6 相似系の例
- 図-4.7 相似系モデル
- 図-4.8 ユニットパート
- 図-4.9 2次元問題内部行の消去・縮合
- 図-4.10 後退代入
- 図-4.11 3次元モデル
- 図-4.12 立体解析での内部行の消去・縮合
- 図-4.13 棒要素
- 図-4.14 片持ち梁モデル
- 図-4.15 一部非相似を有する系
- 図-4.16 変断面片持ち梁
- 図-4.17 反復法(ICCG法)と計算時間の比較
- 図-4.18 解析モデル
- 図-4.19 自由端たわみと分割数の関係
- 図-4.20 正逆メッシュの応力分布
- 図-4.21 モデルU-Tの応力分布($a/b=0.9$)
- 図-4.22 $a/b=0.5$ の応力分布
- 図-4.23 $a/b=0.1$ の応力分布
- 図-4.24 モデルU-T応力の拡大表示($a/b=0.5$)
- 図-4.25 モデルD-Tせん断応力の拡大表示($a/b=0.5$)
- 図-4.26 立体モデル

- 図-4.27 正メッシュより構成された6面体
- 図-4.28 逆メッシュより構成された6面体
- 図-4.29 3つの異なるテーバーを持つ梁よりなる構造物(モデルM-T)
- 図-4.30 モデルM-Tの最大応力と横分割数の関係
- 図-4.31 モデルM-T II部の応力分布
- 図-4.32 モデルM-T II部のせん断応力拡大表示
- 図-4.33 一部非相似要素を持つ片持ち梁(モデルU-TM)
- 図-4.34 垂直応力の拡大表示
- 図-4.35 せん断応力の拡大表示
- 図-4.36 変断面持つ片持ち梁
- 図-4.37 モデルU-Tの荷重(P)-自由端たわみ(δ)曲線
- 図-4.38 モデルU-Tの降伏状況図
- 図-4.39 変断面片持ち梁モデル

- 表-4.1 片持ち梁諸元
- 表-4.2 提案法と反復法(ICCG法)との比較
- 表-4.3 自由端たわみ(mm)
- 表-4.4 テーバ付片持ち梁諸元
- 表-4.5 自由端たわみの比較($\times 10^{-3}$ m)
- 表-4.6 立体モデル諸元
- 表-4.7 立体モデル解析結果(上段:本法, 下段:直接法)
- 表-4.8 解析モデルM-Tの諸元
- 表-4.9 横分割数と最大応力の関係
- 表-4.10 相似分割, 均等分割の細分割に伴う自由端のたわみ(mm)

第1章 序論

1.1 研究の背景

有限要素法に関する研究は多く、計算機の記憶容量や計算速度の大幅な向上と相俟って特に構造解析の分野では益々盛んであり、汎用的な解析プログラムの開発もなされている。それにつれて取り扱う系も大規模化し、複雑化してきている。有限要素法は近似解法であり、要素分割数が多ければ多いほど良解に近づくことから、その解析においては必要となる計算容量はいくら増加しても十分と言う事はなく、それに応じて多大の計算時間も必要であり、計算精度の上からも問題が生じてくる。これに対して、より少ない計算容量・時間で効率良く解析する手法についても多くの研究がなされている。

大次元問題において計算容量、計算時間の低減を諮る方法として、剛性マトリックスのスパーシティを利用した反復法や構造物をいくつかの部分構造に分割して解くサブストラクチャー法など方程式の解法の効率化に基づく方法、あるいは高次要素や系に応じた要素を用いるなど要素のフレキシブル化に基づく方法など多くの手法が提案されているが、いずれにしろ3次元問題になるとさらに多くの容量、時間を要する。

一般に、解析する系が大規模になるほど、その大部分は規則性のあるメッシュ分割が可能である。この場合、メッシュ分割が等分割や相似分割のように規則的に行えない部分はズーム法などと結合して解くとすると、部分構造の大部分は均等あるいは規則性のあるメッシュ分割部の解析となる。従って、この規則性のある部分の剛性方程式をいかに短い時間で効果的に解くかは、系の効率的な解析に大きく影響する。

また、応力変化の激しい問題等を有限要素法で解く場合、一般には最初荒い要素分割で解析を行い、応力勾配の急変に応じて、メッシュ分割、即ち有限要素の分割を細かくしていくことになる。あるいは、解析したある部分について更に詳細な解が欲しい時など必要な部分を細分割する等、細分割を必要とする場合がある。要素を細分割すれば、自由度は増加し系の特性も変わるため、再解析が必要となる。細分割された系を最初から解き直すのは、大規模な問題になるほど多大の労力と時間を要することになる。

本研究では、まず要素細分割が必要な系について、要素を細分割する毎に系を再解析することなく、細分割する部分、つまりズーム部のみで次々と解を求めていくズーム法の誘導を行う。このズーム法は、細分割されたズーム部のみを取り扱うが、小さい要素に分割し直したことによる影響を構造全体にフィードバックするので、解析的には剛性マトリックスの厳密解であり、記憶容量や計算時間の面で優れた手法である。この時、細分割する領域をどの範囲まで取るかによって得られる解の良し悪しは決る。ここでは、ズーム領域の諸量で算定でき、ズーム法とリンクした適正な判定法の導入について検討している。一方、均等な要素よりなる系の場合、同一な剛性マトリックス要素が並ぶから、剛性マトリックスの中間行を全て消去、上下端への縮合は、非常に効率良く行える事を示し、これにより大規模な相似メッシュよりなる系を効果的に解く相似系縮合法について述べている。この相似系縮合法は、相似メッシュ系であれば2次元問題、3次元問題数、剛性マトリックス内にたわみとたわみ角という異なる次元の要素を持つ棒要素へも便利に適用できることを示し、数値計算を通してその有効性を明かにしている。

1.2 既往の研究

従来のズーム法¹⁻¹¹⁻¹²⁾は、ズーム部を取りだし細分割を行い、最初の解析結果から得られる境界条件を用いてズーム部を解析、さらにその結果を境界条件として新しいズーム部を解析するという方法である。この方法は簡便ではあるが、境界条件が一つ前の解析結果で規定されるため、ズーム部をより小さい要素に分割し直したことによる影響が構造全体にフィードバックされず、ズームする毎に誤差が蓄積していくという問題がある。

これに対して著者等は、解析的には厳密なズーム法¹⁻⁸⁻¹¹⁻¹²⁾の提案を行っている。また、厳密なズーム法による解析あるいは系全体の再解析を行ったとしても、細分割する領域つまりズーム領域を無視して単に要素を細分割していても、正解に収束しないという問題がある。これに対して解の精度に関する誤差評価は、直接解析解については多くの研究¹⁻¹³⁻¹⁴⁾がなされていてかなり適切な細分割領域判定が可能であり、ズーム法に関して、横山他の研究¹⁻¹⁴⁾がある。しかし、いずれも誤差評価であり、次々とズーム解析していく際のズーム領域、メッシュ形状の判定法としては難がある。

有限要素法による解析では、その分割要素数を増すことによって解の精度を上げることができるが、それにつれて解くべき連立方程式の元数は増加する。この方程式は、一般に非零成分が対角付近に集まるスパースマトリックスとなり、この特徴を考慮した解析法は従来より多数ある¹⁻¹⁴⁻¹⁻¹⁵⁾。さらに規模が大きくなると解析領域をいくつかの領域に分けて解き、その後全体の解を求めるサブストラクチャ法¹⁻¹⁶⁾が用いられるが、いずれにしる大次元の連立方程式を解く必要がある。さらに大次元の連立方程式を解く手法としては、ブロック対角化法¹⁻¹⁷⁻¹⁻¹⁸⁾がある。いずれも一般的な系に適用できる汎用性ある有効な解法である。しかし、均等メッシュ系あるいは相似メッシュ系の解法としては、その特徴が十分に活用されておらず、両系に関する解法としては有効とは言えない。

1.3 本論文の構成

このような背景のもとで、本研究は構造物の剛性マトリックスの特徴を活かし、効率良く解析し得る手法の誘導とその応用について述べている。

第2章では、解析的には厳密な解法であるズーム法の誘導を行っている。要素細分割の必要が生じた場合、構造物を再解析する必要があるが、大規模な系の場合再解析には多大の労力を要する。これの対策として、細分割した部分のみを用いて次々と解析し得る手法であるズーム法について述べている。このズーム法は、分割マトリックスの考えを元に行っていることからズームを行うときにズーム部の大きさの逆マトリックス演算を必要とする。一方、構造物の有限要素法解析では、剛性マトリックスはバンドマトリックスであり、大部分は0要素を持つ。そこで、計算機容量、計算時間の低減が期待できるバンドマトリックスを用いた修正ズーム法解析の誘導を行っている。最後に、提案した両ズーム法は、何回ズームを繰り返してもズーム部の影響が系全体にフィードバックされ、解析的には厳密である事、また修正ズーム法の有効性についても数値計算を通して検討する。

第3章では、2次元平面応力問題において応力勾配のある問題を有限要素法で解析する時、応力勾配に応じて細分割を行うが、その際メッシュ分割は適正かどうか、適正なズーム領域かどうかを判定する手法について検討している。平面応力問題の支配方程式にはポアソン比は含まれないので、理論的には応力はポアソン比の変化に無関係であるが、有限要素法の基礎式にはポアソン比が含まれるので、ポアソン比の変化によって系の応力は影響を受けることになる。

まず、どのような場合に応力はポアソン比の影響を受けるか等を数値計算を通して検討している。応力に及ぼすポアソン比の影響は、変化に敏感であること、ズーム部のみで処理できることを考えてポアソン比による応力の微分値で表している。応力の微分値を直接求めるには、系全体の変位を必要とするが、ズーム法の諸量を用いればズーム部の自由度に等しいマトリクス演算で必要な微分値は求められることを示し、数値計算によりその妥当性について検討している。

第4章では、系が均等あるいは相似形メッシュで分割されているならば、その規則的な系の特性を活かして縮合を行う事により、計算機容量、計算時間の大幅な低減が期待できる縮合法について述べている。まず、均等メッシュ系における基本的な縮合ルーティンについて説明し、次にその手法を、相似メッシュ系に適用、2次元、3次元問題へ拡張し、さらにたわみとたわみ角という異った次元を持つ棒要素について縮合法の誘導を行っている。また、系の一部で要素剛性の変化や一部要素付加で相似性が壊れた場合、修正部の影響を等価な付加荷重に置き換えることによりその修正部のみの取扱ですむ事を示し、各項毎に数値計算を通して、その有効性について検討している。

第5章では、各章で得られた結論の内主要な結論を総括として要約している。最後に、ズーム法におけるズーム境界部の自由度の拡大、座標変換による非相似系の相似系への変換、板の曲げ問題への相似縮合法の適用など今後の課題と将来の展望としてまとめている。

参考文献

- 1-1) Holand, I. and K. Bell: Finite element method in stress analysis, TAPIR, Technical University of Norway, Trondheim, pp. 101, 1969
- 1-2) Desai, R. D. and J. F. Abel: Introduction to the Finite Element Method, Van Nostrand Reinhold, New York, pp. 169, 1972
- 1-3) Ariyoshi, K., M. Nakayama and K. Mitsunaga: Stress concentration factor of two-dimensional problems by finite element method, Bulletin of the Kyusyu Institute of Technology, 26, pp. 35-39, 1973
- 1-4) Maruyama, K.: Stress analysis of a bolt-nut joint by the finite element method and the copper-electroplating method, Bulletin of Japan Society of Mechanical Engineers 16(94), pp. 671-678, 1973
- 1-5) Sugawara, K., et al.: A study on core discing of rock. Mining and Metallurgical Institute of Japan 94, pp. 19-25, 1978
- 1-6) Bathe, K. J. and E. L. Wilson: Numerical Methods in Finite Element Analysis, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, pp. 259-263, 1976
- 1-7) Wang, B. P., A. B. Palazzolo and W. D. Pilkey: Reanalysis model synthesis, and dynamic design, State-of-the-art Surveys in Finite Element Technology, edited by A. Noor and W. Pilkey, ASME, New York, Chapter 8, 1983
- 1-8) Hirai, I., B. P. Wang and W. D. Pilkey: An efficient zooming method for finite element analysis, Internat. J. Numerical Method Engineers 20, pp. 1671-1683, 1984
- 1-9) Hirai, I., Uchiyama Y., Mizuta Y. and Walter D. P.: AN EXACT ZOOMING METHOD, Finite Elements in Analysis and Design 1, pp. 61-69, 1984
- 1-10) 平井一男、水田洋司、内山義博：応力集中問題の一解析法、熊本大学工学部研究報告 第31巻2号、pp. 61-66、1982
- 1-11) 内山義博、水田洋司、平井一男：効果的なズーム法、八代高専紀要、第12号、平成2年3月
- 1-12) 内山義博、山尾敏孝、片山拓朗、平井一男：相似形メッシュを用いた梁解析の一手法、応用力学論文集、Vol. 4, pp. 211~218, 2001

- 1-13) K. J. Bathe and E. L. Wilson(菊地文雄訳)：有限要素法の数値計算、科学技術出版社、pp. 330～340, 1980
- 1-14) 戸川隼人：有限要素法による振動解析、サイエンス社、1975
- 1-15) 横山正明：高精度計算力学、朝倉出版、1998
- 1-16) 木学会編：構造工学シリーズ、構造工学における計算力学の基礎と応用, pp. 370～371
- 1-17) 鷺津久一郎, 宮本博, 山田嘉昭, 山本善之, 川本忠彦：有限要素法ハンドブック I 基礎編, pp. 77～83, 1981
- 1-18) 有尾一郎, 池田清宏, 鳥居邦夫：ブロック対角化法による平面構造物の有限要素法並列解析、構造工学論文集、Vol. 38. A, pp. 317～324, 1992
- 1-19) Healey, T. J. and Treacy, J. A.: Exact block diagonalization of large eigenvalue problems for structures with symmetry, Int. J. Numerical Method Engineering, 67, pp. 257-296, 1991

第2章 ズーム解析法

2.1 概説

近年、計算機の記憶容量や計算速度は大幅に向上しているが、有限要素法の解析において必要となる記憶容量はいくら増加しても十分と言う事はなく、また多大な計算時間も必要とする。さらに、応力集中問題等を有限要素法で解く場合、応力勾配の急変に応じて、メッシュ分割、即ち有限要素の分割を細かくする必要があるが、一般には最初荒い要素分割で解析を行い、次に集中部を細分割して解析する方法が用いられる。要素を細分割すれば、系の特性が変わるため、細分割された系を最初から解き直さねばならないと言う問題が生じる。この時、要素を細分割する毎に系を再解析せずに、細分割する部分、つまりズーム部のみで次々と解を求めていくのがズーム法であり、記憶容量や計算時間の面で優れた手法である。

従来のズーム法^{1)~3)}は、ズーム部を取りだし細分割を行い、最初の解析結果から得られる境界条件を用いてズーム部を解析、さらにその結果を境界条件として新しいズーム部を解析するという方法である。この方法では、境界条件が一つ前の解析結果で規定されるため、ズーム部をより小さい要素に分割し直したことによる影響が構造全体にフィードバックされず、ズームする毎に誤差が蓄積していくという問題がある。

本章では、まず分割マトリックス、拡大マトリックスの考えを導入、要素を細分割するたびに系全体を再解析することなく、系の細分割部のみを解析ですみ、しかもズーム毎にその影響が系全体にフィードバックし得るズーム法を提案する。この提案法は、解析的には厳密であり、何回ズームを行っても正しい解が得られる手法である。ただし、この手法は、逆マトリックスの演算を用いることから、各ズーム毎に大きな計算機容量、時間を必要とする。一方、有限要素法における剛性マトリックスは一般にバンドマトリックスであるから、この特性が利用できれば、より少ない容量で済むと考えられる。

そこでズーム部以外の荷重はズーム毎にズーム境界に作用する等価な荷重として扱えること、次のズームに必要な前回の剛性マトリックスはズーム境界部に縮合した境界部剛性マトリックスのみでよいことを示し、これを用いてバンドマトリックスの特性を生かした修正ズーム法の誘導を行う。

2.2 ズーム法理論

2.2.1 分割、拡大マトリックス

マトリックス分割法^{1)~3)}によれば、式(2.1)のように分割されているマトリックスは、 K_{11} 、 $K_{12} - K_{11}K_{22}^{-1}K_{12}$ が正則ならば、その逆マトリックスは式(2.2)で求めることができる。

$$K = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

$$f = K^{-1} = \begin{bmatrix} K_{11}^{-1} + VZ^{-1}Y & -VZ^{-1} \\ -Z^{-1}Y & Z^{-1} \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

$$Z = K_{22} - K_{21}K_{11}^{-1}K_{12} \quad (2.3a)$$

$$V = K_{11}^{-1}K_{12} \quad (2.3b)$$

$$Y = K_{21}K_{11}^{-1} \quad (2.3c)$$

ここに、 K は与系の剛性マトリックス、 f は与系のたわみ性マトリックス、 K_{11} 、 K_{22} は分割マトリックスで正方マトリックスである。式(2.2)のたわみ性マトリックスを剛性マトリックスの分割に対応するように分割し、式(2.4)で表す。

$$f = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

式(2.2)と式(2.4)の関係より^{2.3)}

$$f_{22} = Z^{-1} \quad (2.5)$$

$$f_{11} = K_{11}^{-1} + V Z^{-1} Y = K_{11}^{-1} + V f_{22} Y \quad (2.6)$$

$$f_{12} = -V Z^{-1} = -V f_{22} \quad (2.7)$$

$$f_{21} = -Z^{-1} Y = -f_{22} Y \quad (2.8)$$

となる。式(2.5)を式(2.6)～式(2.8)に代入し、 V 、 Y 、 K_{11}^{-1} を求めると、

$$V = -f_{12} f_{22}^{-1} \quad (2.9)$$

$$Y = -f_{22}^{-1} f_{21} \quad (2.10)$$

$$K_{11}^{-1} = f_{11} - f_{12} f_{22}^{-1} f_{21} \quad (2.11)$$

と式(2.4)のたわみ性マトリックスの各要素で表される。いま、式(2.4)のたわみ性マトリックスが求められた後、 K_{22} の部分の剛性が単に $K_{22} + \Delta K$ に変化したとすると、 Z は次式で表される。

$$Z' = K_{22} - K_{21} K_{11}^{-1} K_{12} + \Delta K \quad (2.12)$$

従って、

$$f'_{22} = Z'^{-1} \quad (2.13)$$

V 、 Y は、式(2.3b)、(2.3c)より変化しないから、変化後の剛性マトリックスの逆マトリックスは、式(2.6)～式(2.8)と式(2.11)を用いて計算することができる。以上のように、系の一部が修正されたときのたわみ性マトリックスは、修正後の系の全体の剛性マトリックスの逆マトリックスを計算することなく、修正部の大きさの逆マトリックスの計算で求めることができる。

次に、原系の一部分の要素がさらに小さく分割されることによって、原系の自由度より修正系の自由度が増加した場合に、原系のたわみ性マトリックスを用いて修正後の系のたわみ性マトリックスを求める方法について述べる。式(2.14)に示すように、 K_{22} の部分が $K_{22} + \Delta K$ となり、マトリックスの次数が増加したとする。

$$K_{22} + \Delta K \longrightarrow \begin{bmatrix} K_{22} + K_{i1} & K_{i2} \\ K_{j1} & K_{j2} \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & 0 \\ K_{21} & K_{22} + K_{i1} & K_{i2} \\ 0 & K_{j1} & K_{j2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12}' \\ K_{21}' & K_{22}' \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

ここに、上付*は ΔK のマトリックス次数の増加に対応して分割マトリックスの次数が増加した事を示す。式(2.15)の逆マトリックスであるたわみ性マトリックスは原系のたわみ性マトリックスと分割マトリックスの関係式(2.3a)～式(2.3c)を用いて表すと次式のようなになる。

$$\begin{bmatrix} f_{11}' & f_{12}' \\ f_{21}' & f_{22}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11}^{-1} + V' Z'^{-1} Y' & -V' Z'^{-1} \\ -Z'^{-1} Y' & Z'^{-1} \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

ここで、

$$Y' = K_{11}' K_{11}^{-1} = \begin{bmatrix} K_{21} \\ 0 \end{bmatrix} K_{11}^{-1} = \begin{bmatrix} Y \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

$$V' = K_{11}^{-1} K_{12}' = K_{11}^{-1} [K_{12} \quad 0] = [V \quad 0] = [Y' \quad 0] \quad (2.18)$$

$$\begin{aligned} Z' &= K_{22}' - K_{21}' K_{11}^{-1} K_{12}' = \begin{bmatrix} K_{22} + K_{11} & K_{12} \\ K_{12} & K_{11} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} K_{21} \\ 0 \end{bmatrix} K_{11}^{-1} [K_{12} \quad 0] \\ &= \begin{bmatrix} K_{22} - K_{21} K_{11}^{-1} K_{12} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{12} & K_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \Delta K \end{aligned} \quad (2.19)$$

$$V' Z'^{-1} Y' = [V \quad 0] Z'^{-1} \begin{bmatrix} Y \\ 0 \end{bmatrix} = V \widetilde{Z'^{-1} Y} \quad (2.20)$$

$$Z'^{-1} Y' = Z'^{-1} \begin{bmatrix} Y \\ 0 \end{bmatrix} = \widetilde{Z'^{-1} Y} \quad (2.21)$$

$$V' Z'^{-1} = [V \quad 0] Z'^{-1} = (\widetilde{Z'^{-1} Y})' \quad (2.22)$$

ここに、 T はマトリックスの転置を意味し、 Z'^{-1} は拡大前の K_{22} のマトリックス次数に等しい縮小されたマトリックスであり、 $\widetilde{Z'^{-1} Y}$ は列数が K_{22} と同じ次数で、行数は拡大部のマトリックス次数に等しい縮小されたマトリックスである。以上のことより、拡大された剛性マトリックスのたわみ性マトリックスは、拡大前のたわみ性マトリックスを用いて次式で求められる。

$$\begin{bmatrix} \mathbf{f}_{11}' & \mathbf{f}_{12}' \\ \mathbf{f}_{21}' & \mathbf{f}_{22}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11}^{-1} + V \widetilde{Z'^{-1} Y} & -(\widetilde{Z'^{-1} Y})' \\ -\widetilde{Z'^{-1} Y} & Z'^{-1} \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

式(2.23)は拡大された系のたわみ性マトリックスを厳密に求める式であり、マトリックスの拡大が何回行われても適用できる。

2.2.2 ズーム法理論^{2.10~12)}

(1) ズーム領域の選定

原系、即ちズームする前のSystem 0の剛性方程式は、次のように表される。

$$K^{(0)} \mathbf{u}^{(0)} = \mathbf{F}^{(0)} \quad (2.24)$$

ここで、 $\mathbf{u}^{(0)}$ 、 $\mathbf{F}^{(0)}$ は各々大きさ $N^{(0)}$ 次の変位ベクトル、荷重ベクトルである。

図-2.1に示すようにズーム領域を選定すると、式(2.24)はズーム境界でズームの外と内に分割され次式となる。

$$\begin{bmatrix} K_{AA}^{(0)} & K_{AB}^{(0)} \\ K_{BA}^{(0)} & K_{BB}^{(0)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_A^{(0)} \\ \mathbf{u}_B^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_A^{(0)} \\ \mathbf{F}_B^{(0)} \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

ただし、

$$K^{(0)} = \begin{bmatrix} K_{AA}^{(0)} & K_{AB}^{(0)} \\ K_{BA}^{(0)} & K_{BB}^{(0)} \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

$$\mathbf{u}^{(0)} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_A^{(0)} \\ \mathbf{u}_B^{(0)} \end{bmatrix} \quad \mathbf{F}^{(0)} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_A^{(0)} \\ \mathbf{F}_B^{(0)} \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

ここで、 $u_A^{(0)}$ = ズーム外領域 ($R_A^{(1)}$) の変位ベクトル
 $u_B^{(0)}$ = ズーム内領域 ($R_B^{(1)}$) の変位ベクトル
 $F_A^{(0)}$ = ズーム外領域 ($R_A^{(1)}$) の荷重ベクトル
 $F_B^{(0)}$ = ズーム内領域 ($R_B^{(1)}$) の荷重ベクトル

下添字 A、B は各々ズーム領域の外、内を表し、ズーム境界は、領域 R_B に含まれるものとする。

式(2.25)を解くと、変位はたわみ性マトリックス f を用いて

$$\begin{Bmatrix} u_A^{(0)} \\ u_B^{(0)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{AA}^{(0)} & f_{AB}^{(0)} \\ f_{BA}^{(0)} & f_{BB}^{(0)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_A^{(0)} \\ F_B^{(0)} \end{Bmatrix} \quad (2.28)$$

で算定できる。式(2.16)より、たわみ性マトリックスの各項は

$$f_{AA}^{(0)} = K_{AA}^{(0)} + V^{(0)} Z^{(0)} Y^{(0)} \quad (2.29a)$$

$$f_{AB}^{(0)} = -V^{(0)} Z^{(0)} \quad (2.29b)$$

$$f_{BA}^{(0)} = -Z^{(0)} Y^{(0)} \quad (2.29c)$$

$$f_{BB}^{(0)} = Z^{(0)} \quad (2.29d)$$

ここで、右辺各項は

$$Z^{(0)} = K_{BB}^{(0)} - K_{BA}^{(0)} K_{AA}^{(0)-1} K_{AB}^{(0)} \quad (2.30a)$$

$$V^{(0)} = K_{AA}^{(0)-1} K_{AB}^{(0)} \quad (2.30b)$$

$$Y^{(0)} = K_{BA}^{(0)} K_{AA}^{(0)-1} = -f_{BB}^{(0)-1} f_{BA}^{(0)} \quad (2.30c)$$

これを用いると、ズーム内領域 $R_B^{(1)}$ 部の変位は

$$u_B^{(0)} = f_{BA}^{(0)} F_A^{(0)} + f_{BB}^{(0)} F_B^{(0)} = -Z^{(0)} Y^{(0)} F_A^{(0)} + Z^{(0)} F_B^{(0)} \quad (2.31)$$

で求められる。右辺第一項は、ズーム内領域 $R_B^{(1)}$ に対応するたわみ性マトリックス f_{BB} (= $Z^{(0)}$) に外力を掛けた形である。この外力相当項を次式のごとく定義する。

$$F^{(0)} = Y^{(0)} F_A^{(0)} \quad (2.32)$$

上式は、ズーム外領域の荷重 $F_A^{(0)}$ のズーム内領域への変換を表し、その大きさは式(2.17)よりズーム境界の自由度である。逆に $F^{(0)}$ は、式(2.31)より、ズーム内変位を用いて

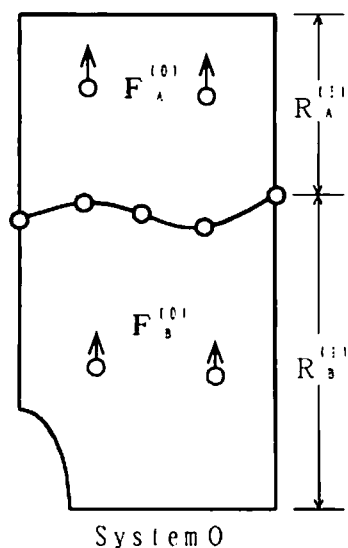


図 - 2.1 原系

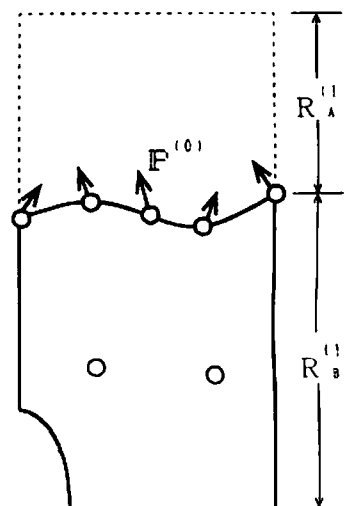


図 - 2.2 1回ズーム用等価節点力

$$\mathbf{P}^{(0)} = -\mathbf{Z}^{(0)} \mathbf{u}_b^{(0)} + \mathbf{F}_b^{(0)} \quad (2.33)$$

と表現できる。ここで、 $\mathbf{F}^{(0)}$ はズーム境界以外の内部の力は全てキャンセルされ、結局は図-2.2に示す様にズーム境界に作用する等価な力のみが残ることになる。関係のない要素を省き縮小したものを上付 $\bar{\cdot}$ で表すと、式(2.33)は、ズーム境界にのみ関係した等価節点力となる。

$$\bar{\mathbf{P}}^{(0)} = -\bar{\mathbf{Z}}^{(0)} \bar{\mathbf{u}}_b^{(0)} + \bar{\mathbf{F}}_b^{(0)} \quad (2.34)$$

(2) 1回目のズーム

いま、領域 $R_b^{(1)}$ を細分割して1回目のズームを行う。領域 $R_b^{(1)}$ は節点数が増加し、剛性マトリックス \mathbf{K} は拡大される。新しい領域 $R_b^{(1)}$ の自由度を $N^{(1)}$ とする。拡大された剛性マトリックス \mathbf{K} (System 1) は

$$\mathbf{K}^{(1)} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{AA}^{(1)} & \mathbf{K}_{AB}^{(1)} \\ \mathbf{K}_{BA}^{(1)} & \mathbf{K}_{BB}^{(1)} \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

マトリックス \mathbf{K} で見ると、領域 $R_A^{(1)}$ 、領域 $R_b^{(1)}$ はズーム境界節点のみで連結していて、それ以外の節点とは互いに関係がない。従って、剛性マトリックスは次のごとくバンドマトリックスとなる。

$$\mathbf{K}^{(1)} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{AA}^{(0)} & \mathbf{K}_{AB}^{(0)} & 0 \\ \mathbf{K}_{BA}^{(0)} & \mathbf{K}_{BB}^{(0)} + \mathbf{K}_{ij}^{(1)} & \mathbf{K}_{ij}^{(1)} \\ 0 & \mathbf{K}_{ji}^{(1)} & \mathbf{K}_{ji}^{(1)} \end{bmatrix} \quad (2.36)$$

ここで、

$$\mathbf{K}_{AB}^{(1)} = [\mathbf{K}_{AB}^{(0)} \quad 0] \quad \mathbf{K}_{BA}^{(1)} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{BA}^{(0)} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

$$\mathbf{K}_{BB}^{(1)} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{BB}^{(0)} + \mathbf{K}_{ij}^{(1)} & \mathbf{K}_{ij}^{(1)} \\ \mathbf{K}_{ji}^{(1)} & \mathbf{K}_{ji}^{(1)} \end{bmatrix} \quad (2.38)$$

$\mathbf{K}_{BB}^{(1)} \mathbf{K}$ は、ズーム境界を含む剛性マトリックスであり、領域 $R_b^{(1)}$ 部のズーム境界部に関する剛性マトリックスを $\mathbf{K}_{ij}^{(1)}$ 、内部のそれを $\mathbf{K}_{ji}^{(1)}$ で表している。ズーム後のSystem 1の変位は次式で求められる。

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{u}_A^{(1)} \\ \mathbf{u}_B^{(1)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{AA}^{(1)} & \mathbf{f}_{AB}^{(1)} \\ \mathbf{f}_{BA}^{(1)} & \mathbf{f}_{BB}^{(1)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_A^{(1)} \\ \mathbf{F}_B^{(1)} \end{Bmatrix} \quad (2.39)$$

たわみ性マトリックス \mathbf{f} の各項は式(2.29)の関係より

$$\mathbf{f}_{AA}^{(1)} = \mathbf{K}_{AA}^{(1)-1} + \mathbf{V}^{(1)} \mathbf{Z}^{(1)-1} \mathbf{Y}^{(1)} \quad (2.40a)$$

$$\mathbf{f}_{AB}^{(1)} = -\mathbf{V}^{(1)} \mathbf{Z}^{(1)-1} \quad (2.40b)$$

$$\mathbf{f}_{BA}^{(1)} = -\mathbf{Z}^{(1)-1} \mathbf{Y}^{(1)} \quad (2.40c)$$

$$\mathbf{f}_{BB}^{(1)} = \mathbf{Z}^{(1)-1} \quad (2.40d)$$

ズーム内領域 $R_b^{(1)}$ の変位 $\mathbf{u}_b^{(1)}$ 算定に必要な $\mathbf{f}_{BA}^{(1)}$ 、 $\mathbf{f}_{BB}^{(1)}$ は、次のようにして求められる。

式(2.30)と式(2.32)より、ズーム後の $\mathbf{Y}^{(1)}$ 、 $\mathbf{P}^{(1)}$ 、 $\mathbf{Z}^{(1)}$ は

$$\mathbf{Y}^{(1)} = \mathbf{K}_{BA}^{(1)} \mathbf{K}_{AA}^{(1)-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{BA}^{(0)} \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{K}_{AA}^{(0)-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{BA}^{(0)} \mathbf{K}_{AA}^{(0)-1} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}^{(0)} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.41)$$

$$\mathbf{F}^{(1)} = \mathbf{Y}^{(1)} \mathbf{F}_A^{(1)} = \begin{Bmatrix} \mathbf{Y}^{(0)} \mathbf{F}_A^{(0)} \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}^{(0)} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.42)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}^{(1)} &= \mathbf{K}_{33}^{(1)} - \mathbf{K}_{3A}^{(1)} \mathbf{K}_{AA}^{(1)-1} \mathbf{K}_{A3}^{(1)} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{33}^{(0)} + \mathbf{K}_{ij}^{(1)} & \mathbf{K}_{ij}^{(1)} \\ \mathbf{K}_{ij}^{(1)} & \mathbf{K}_{ij}^{(1)} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{21}^{(0)} \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{K}_{11}^{(0)-1} [\mathbf{K}_{12}^{(0)} \quad 0] \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{Z}^{(0)} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ij}^{(1)} & \mathbf{K}_{ij}^{(1)} \\ \mathbf{K}_{ij}^{(1)} & \mathbf{K}_{ij}^{(1)} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.43)$$

つまり、ズーム後の $\mathbf{Y}^{(1)}$ 、 $\mathbf{F}^{(1)}$ は、前回の $\mathbf{Y}^{(0)}$ 、 $\mathbf{F}^{(0)}$ に細分割によって増加した部分に 0 を挿入、単に拡大すればよく、また $\mathbf{Z}^{(1)}$ は、前回の $\mathbf{Z}^{(0)}$ に細分割によって新たに増加した剛性マトリックス $\Delta \mathbf{K}^{(1)}$ を重ね合わせる事により得られ次式で表される。

$$\mathbf{Y}^{(1)} = \hat{\mathbf{Y}}^{(0)}, \quad \mathbf{F}_A^{(1)} = \hat{\mathbf{F}}_A^{(0)}, \quad \mathbf{Z}^{(1)} = \hat{\mathbf{Z}}^{(0)} + \Delta \mathbf{K}^{(1)} \quad (2.44)$$

ただし、

$$\Delta \mathbf{K}^{(1)} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ij}^{(1)} & \mathbf{K}_{ij}^{(1)} \\ \mathbf{K}_{ij}^{(1)} & \mathbf{K}_{ij}^{(1)} \end{bmatrix} \quad (2.45)$$

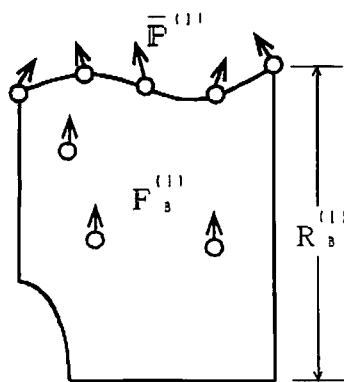
上付 $\hat{}$ は、拡大部に 0 を挿入した拡大されたマトリックス、ベクトルを表す。また $\mathbf{f}_{33}^{(1)}$ は $\mathbf{Z}^{(1)}$ より、ズーム部の大きさの逆マトリックス計算で求められる。従って、1 回ズーム内の変位は、次式で求められる。

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_3^{(1)} &= \mathbf{f}_{3A}^{(1)} \mathbf{F}_A^{(1)} + \mathbf{f}_{33}^{(1)} \mathbf{F}_3^{(1)} = -\mathbf{Z}^{(1)-1} \hat{\mathbf{Y}}^{(0)} \mathbf{F}_A^{(0)} + \mathbf{Z}^{(1)-1} \mathbf{F}_3^{(1)} \\ &= -\mathbf{f}_{33}^{(1)} \hat{\mathbf{F}}_A^{(0)} + \mathbf{f}_{33}^{(1)} \mathbf{F}_3^{(1)} \end{aligned} \quad (2.46)$$

ここでは、式の展開上マトリックス \mathbf{Y} も表記しているが、式(2.42)、(2.46)より分かるように \mathbf{Y} は必要ではなく、前回の \mathbf{Z} 、 \mathbf{F} のみ計算しておけば、新しいズーム内領域の変位は計算できる。しかも、式(2.46)での変位の算定には実際の $\mathbf{f}_{3A}^{(1)}$ 、 $\mathbf{f}_{33}^{(1)}$ を用いているので、近似は入っていない。

(3) 2 回目のズーム

図-2.4 に示す 2 回目のズーム内領域 $R_B^{(2)}$



System 1

図-2.3 1 回ズーム

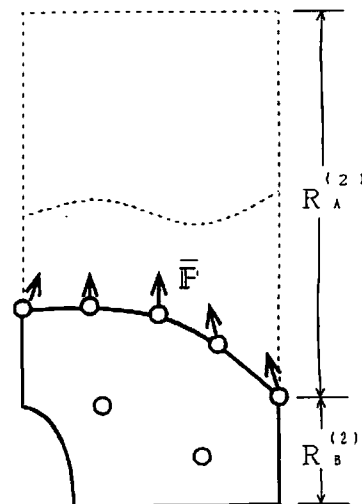


図-2.4 2 回ズーム
用等価節点力

に対応した \mathbf{f} 、 \mathbf{u} 、 \mathbf{F} を取りだし、 $\bar{\mathbf{f}}_{ss}^{(1)}$ 、 $\bar{\mathbf{u}}_s^{(1)}$ 、 $\bar{\mathbf{F}}_s^{(1)}$ とおく。新しい \mathbf{Z} 、 \mathbf{F} は式 (2.29)、(2.34) より次式で求められる。

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}^{(1)} &= \bar{\mathbf{f}}_{ss}^{(1)-1} \\ \mathbf{F}^{(1)} &= -\bar{\mathbf{Z}}^{(1)} \bar{\mathbf{u}}_s^{(1)} + \bar{\mathbf{F}}_s^{(1)} \end{aligned} \quad (2.47)$$

領域 $R_s^{(1)}$ を細分割すると、剛性マトリックス \mathbf{K} は拡大される。拡大された \mathbf{K} は式 (2.35) で上添字を 2 に変えればよい。従って、ズーム後の変位は、式 (2.39) より

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{u}_A^{(2)} \\ \mathbf{u}_B^{(2)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{AA}^{(2)} & \mathbf{f}_{AB}^{(2)} \\ \mathbf{f}_{BA}^{(2)} & \mathbf{f}_{BB}^{(2)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_A^{(2)} \\ \mathbf{F}_B^{(2)} \end{Bmatrix} \quad (2.48)$$

ここで、 $\mathbf{u}_A^{(2)}$ 、 $\mathbf{u}_B^{(2)}$ はそれぞれズーム外領域、内領域の変位ベクトル、 $\mathbf{F}_A^{(2)}$ 、 $\mathbf{F}_B^{(2)}$ は対応する荷重ベクトルである。式 (2.44) との対応より、細分割によって新たに増加した剛性マトリックスを $\Delta \mathbf{K}^{(2)}$ とすると、

$$\mathbf{F}^{(2)} = \mathbf{F}^{(1)}, \quad \mathbf{Z}^{(2)} = \mathbf{Z}^{(1)} + \Delta \mathbf{K}^{(2)}, \quad \mathbf{f}_{ss}^{(2)} = \mathbf{Z}^{(2)-1} \quad (2.49)$$

であり、新しいズーム部の変位 $\mathbf{u}_s^{(2)}$ は、式 (2.46) の上付添字を変更した次式で求められる。

$$\mathbf{u}_s^{(2)} = -\mathbf{f}_{ss}^{(2)} \hat{\mathbf{F}}^{(1)} + \mathbf{f}_{ss}^{(2)} \mathbf{F}_s^{(2)} \quad (2.50)$$

以下、次々にズームを繰り返していくと系全体の自由度は増加していくが、本法によると、ズーム内領域の変位算定に必要な諸量はズーム内領域の自由度を持つマトリックス \mathbf{Z} とズーム境界の自由度を持つ荷重ベクトル \mathbf{F} のみでよい。しかも式の展開に近似はなく、求められた解は厳密なものである。

2.2.3 修正ズーム法¹⁻¹³⁾

ズーム法でズームを繰り返していくのに必要な諸量は \mathbf{F} と \mathbf{Z} であった。荷重 \mathbf{F} はズーム境界のみに作用する等価な外力として扱えるから問題ないが、 \mathbf{Z} は、ズーム部のたわみ性マトリックス \mathbf{f}_{ss} の逆マトリックスとして求める必要があり、容量、計算時間に問題が残る。

ここでは、次のズームに使用する \mathbf{Z} が最終的にはズーム境界のみに関する量となることを示し、これをバンドマトリックスで求め得る式の誘導を行う。図-2.1で、領域 $R_s^{(1)}$ をさらに境界部と内部に分けて考える。領域 $R_A^{(1)}$ を 1、ズーム境界部を 2、領域 $R_B^{(1)}$ を 3 とし、剛性マトリックスを各部に対応した分割マトリックスとして表すと次式となる。

$$\mathbf{K}^{(1)} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{AA}^{(1)} & \mathbf{K}_{AB}^{(1)} \\ \mathbf{K}_{BA}^{(1)} & \mathbf{K}_{BB}^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{AA}^{(1)} & \mathbf{K}_{A2}^{(1)} & 0 \\ \mathbf{K}_{21}^{(1)} & \mathbf{K}_{22}^{(1)} + \mathbf{K}_{23}^{(1)} & \mathbf{K}_{23}^{(1)} \\ 0 & \mathbf{K}_{32}^{(1)} & \mathbf{K}_{33}^{(1)} \end{bmatrix} \quad (2.51)$$

ここで、

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{ss}^{(1)} &= \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{22}^{(1)} + \mathbf{K}_{23}^{(1)} & \mathbf{K}_{23}^{(1)} \\ \mathbf{K}_{32}^{(1)} & \mathbf{K}_{33}^{(1)} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{22}^{(1)} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{23}^{(1)} & \mathbf{K}_{23}^{(1)} \\ \mathbf{K}_{32}^{(1)} & \mathbf{K}_{33}^{(1)} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.52)$$

\mathbf{K}_{22} 、 \mathbf{K}_{23} は領域 R_A と領域 R_B のズーム境界部の剛性マトリックスであり、領域 R_A と領域 R_B はズーム境界部でのみ連結している。図-2.5は、System 0 の計算が終り、1回ズーム領域 $R_s^{(1)}$ 部の $\mathbf{f}_{ss}^{(0)}$ を取り出して $\mathbf{Z}^{(0)}$ を求めた状態図である。この時の $\mathbf{Z}^{(0)}$ は、式 (2.29d)、

(2.30a)より

$$\mathbf{Z}^{(0)} = \mathbf{f}_{\mathbf{B}\mathbf{B}}^{(0)-1} = \mathbf{K}_{\mathbf{B}\mathbf{B}}^{(0)} - \mathbf{K}_{\mathbf{B}\mathbf{A}}^{(0)} \mathbf{K}_{\mathbf{A}\mathbf{A}}^{(0)-1} \mathbf{K}_{\mathbf{A}\mathbf{B}}^{(0)} \quad (2.53)$$

であり、System 0のズーム内領域 $R_{\mathbf{B}}^{(1)}$ の剛性マトリックスを含んだ状態である。領域 $R_{\mathbf{B}}^{(1)}$ を細分割し新しい $\mathbf{K}^{(1)}$ を作成する前にSystem 0の $\mathbf{K}_{\mathbf{B}\mathbf{B}}$ から領域 $R_{\mathbf{B}}^{(1)}$ 部の影響を抜く必要がある。領域 $R_{\mathbf{B}}^{(1)}$ 部の旧剛性マトリックスは式(2.52)の右辺第2項であり、この影響を抜いたマトリックスが $\bar{\mathbf{Z}}^{(0)}$ である。従って、 $\bar{\mathbf{Z}}^{(0)}$ は式(2.53)より

$$\bar{\mathbf{Z}}^{(0)} = \bar{\mathbf{K}}_{\mathbf{B}\mathbf{B}}^{(0)} - \mathbf{K}_{\mathbf{B}\mathbf{A}}^{(0)} \mathbf{K}_{\mathbf{A}\mathbf{A}}^{(0)-1} \mathbf{K}_{\mathbf{A}\mathbf{B}}^{(0)} \quad (2.54)$$

但し、
$$\bar{\mathbf{K}}_{\mathbf{B}\mathbf{B}}^{(0)} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{\mathbf{B}\mathbf{B}}^{(0)} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.55)$$

即ち、得られた $\bar{\mathbf{Z}}^{(0)}$ は図-2.6に示すように領域 $R_{\mathbf{A}}^{(0)}$ がズーム境界に縮合されたマトリックスで、大きさは境界の自由度に等しい。また、 $\bar{\mathbf{F}}^{(0)}$ も、ズーム境界上の等価節点力である。

従って、繰り返しズームを行っていくには、ズーム外領域 $R_{\mathbf{A}}$ 部の剛性並びに外力の影響をズーム境界部に縮合した $\bar{\mathbf{Z}}$ 、 $\bar{\mathbf{F}}$ のみ求めておけばよいことが分る。但し、このままでは領域 $R_{\mathbf{A}}^{(0)}$ 或は $R_{\mathbf{B}}^{(0)}$ 部の逆マトリックスが必要となるし、 $\bar{\mathbf{F}}$ の算定には、式(2.34)に示すように $\mathbf{Z}^{(0)}$ と領域 $R_{\mathbf{A}}^{(0)}$ 外の変位を必要とする。

それら为了避免するために、ズーム境界を含めた領域 $R_{\mathbf{A}}^{(0)}$ について再解析を行い、ズーム境界への縮合された $\bar{\mathbf{Z}}^{(0)}$ 、 $\bar{\mathbf{F}}^{(0)}$ の直接算定を考える。この時、領域 $R_{\mathbf{A}}^{(0)}$ 部を安定に支持するために図-2.7に示すように任意の仮要素を付加し拘束を設け、境界へ縮合した後その影響を取り去るようにする。

まず、原系の剛性マトリックス \mathbf{K} はバンドマトリックスであり、また、何回かの繰り返し計算が必要であることから \mathbf{K} を三角分解即ち、下三角マトリックス \mathbf{L} 、対角マトリックス \mathbf{D} 、上三角マトリックス \mathbf{U} に分解しこれを用いて変位を求める。

即ち、 $\mathbf{K} = \mathbf{L}\mathbf{D}\mathbf{U}$ より

$$\mathbf{K}\mathbf{u} = (\mathbf{L}\mathbf{D}\mathbf{U})\mathbf{u} = \mathbf{F} \quad (2.56)$$

ここで、

$$\mathbf{D}\mathbf{U}\mathbf{u} = \mathbf{X}_1, \quad \mathbf{U}\mathbf{u} = \mathbf{X}_2 \quad (2.57)$$

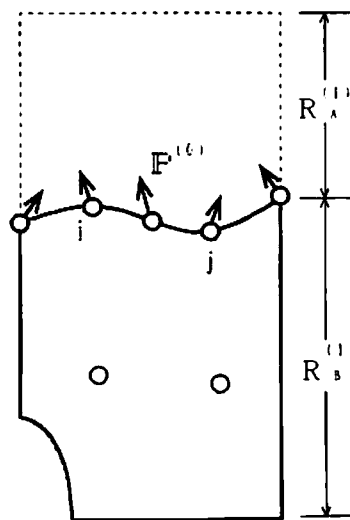


図-2.5 $\mathbf{Z}^{(0)}$ 状態図

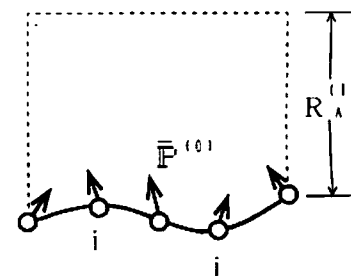


図-2.6 $\bar{\mathbf{Z}}^{(0)}$ 状態図

とおくと

$$\mathbf{L}\mathbf{X}_1 = \mathbf{F}, \quad \mathbf{X}_2 = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{X}_1, \quad \mathbf{U}\mathbf{u} = \mathbf{X}_2 \quad (2.58)$$

より、前進代入で \mathbf{X}_1 、対角要素での乗算で \mathbf{X}_2 が、最後に後退代入演算をすることによりバンドマトリックスを壊すことなく \mathbf{u} は求められる。従って、原系の全変位は次式で計算できる。

$$(\mathbf{LDU})^{(0)}\mathbf{u}^{(0)} = \mathbf{F}^{(0)} \quad (2.59)$$

次に、ズーム境界並びに仮要素部を含めた領域 $R_A^{(0)}$ の再解析を行う。該当部の剛性マトリックスを $K_A^{(0)}$ 、変位を $\mathbf{u}_A^{(0)}$ とすると剛性方程式は次式で与えられる。

$$K_A^{(0)}\mathbf{u}_A^{(0)} = \mathbf{F}_A^{(0)} \quad (2.60)$$

前回同様、 $K_A^{(0)}$ を三角分解した $(\mathbf{LDU})_A^{(0)}$ を用いて

$$(\mathbf{LDU})_A^{(0)}\mathbf{u}_A^{(0)} = \mathbf{F}_A^{(0)} \quad (2.61)$$

より再解析部の変位は求められる。 $\bar{\mathbf{P}}^{(0)}$ 算定に必要な $\bar{\mathbf{u}}_A^{(0)}$ は、変位 $\mathbf{u}_A^{(0)}$ よりズーム境界の変位を取り出しだせばよい。

一方、ズーム境界に対応するたわみ性マトリックス $\mathbf{f}_{jz}^{(0)}$ は、次のようにして求める。いま、再解析部のズーム境界に対応するたわみ性マトリックスを $\mathbf{f}^{(0)}$ とする。たわみ性マトリックスの第 i 行 j 列要素は、 j 点にのみ単位の荷重を作用させた時の i 点変位である。

そこで j 点のみ1で他は0である単位ベクトルを \mathbf{I}_j とすると、 $\mathbf{f}^{(0)}$ の j 列要素 $\mathbf{f}_j^{(0)}$ は

$$(\mathbf{LDU})_A^{(0)}\mathbf{f}_j^{(0)} = \mathbf{I}_j \quad (2.62)$$

$\mathbf{f}_j^{(0)}$ は再解析部の自由度を持つ。これより境界部を取り出したものが $\mathbf{f}_{jz}^{(0)}$ であり、従って、その大きさは境界部の自由度である。 $\mathbf{f}_{jz}^{(0)}$ の逆マトリックス計算で $\bar{\mathbf{Z}}^{(0)}$ が、これから仮要素部を取り去れば $\bar{\mathbf{Z}}^{(0)}$ が得られる。また、 $\bar{\mathbf{P}}^{(0)}$ は式(2.34)より

$$\bar{\mathbf{P}}^{(0)} = -\bar{\mathbf{Z}}^{(0)}\bar{\mathbf{u}}_A^{(0)} \quad (2.63)$$

であり、次のズームに必要な諸量 $\bar{\mathbf{Z}}^{(0)}$ 、 $\bar{\mathbf{P}}^{(0)}$ は求められた。

1回ズーム時の剛性マトリックス $K^{(1)}$ は、 $\bar{\mathbf{Z}}^{(0)}$ へ新たに細分割された領域 $R_B^{(1)}$ の剛性マトリックス $K_B^{(1)}$ の重ね合わせで、外力 $\mathbf{F}^{(1)}$ は、 $R_B^{(1)}$ 部の荷重 $\mathbf{F}_B^{(1)}$ に $\bar{\mathbf{P}}^{(0)}$ を重ね合わせるにより得られ次式となる。

$$K^{(1)} = \bar{\mathbf{Z}}^{(0)} + K_B^{(1)}, \quad \mathbf{F}^{(1)} = \bar{\mathbf{P}}^{(0)} + \mathbf{F}_B^{(1)} \quad (2.64)$$

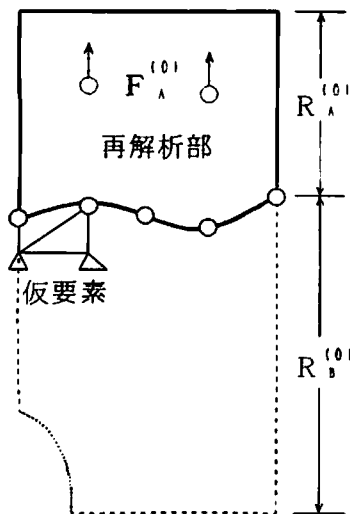


図-2.7 再解析部

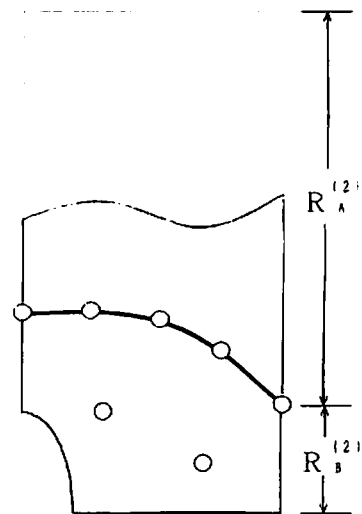


図-2.8 2回ズーム R_B 領域

従って、式(2.58)と同様に $K^{(1)}$ を三角分解して

$$(LDU)^{(1)} u^{(1)} = F^{(1)} \quad (2.65)$$

を解けば、1回ズーム時の変位 $u^{(1)}$ は求められる。

さらに2回ズームについては、図-2.8の $R_B^{(2)}$ が2回ズーム領域であるから、図-2.9の再解析部を計算、図-2.10に示すようにズーム境界に縮合された $\bar{Z}^{(1)}$ 、 $\bar{P}^{(1)}$ を求める。細分割後の剛性マトリックス K は、 $\bar{Z}^{(1)}$ へ新たに細分割された領域 $R_B^{(2)}$ の剛性マトリックス $K^{(2)}$ の重ね合わせで、外力 F は、 $R_B^{(2)}$ 部の荷重に $\bar{P}^{(1)}$ を重ね合わせることにより得られる。なお、2回ズームで再解析する領域としては、図-2.8の $R_A^{(2)}$ ではなく、図-2.9に示す1回ズーム領域の $R_A^{(1)}$ でよく、これより2回ズーム時の変位は求められる。以下同様な操作を行っていけば、ズーム毎にズーム領域内の取り扱いのみで、次々とズームが可能である。

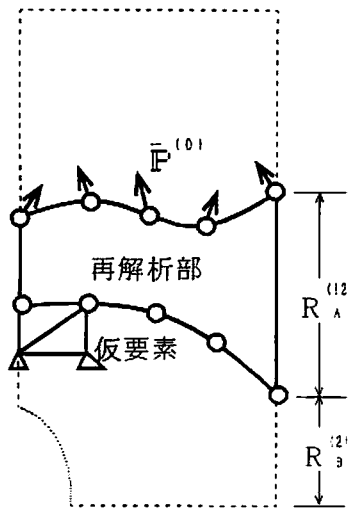


図-2.9 再解析部

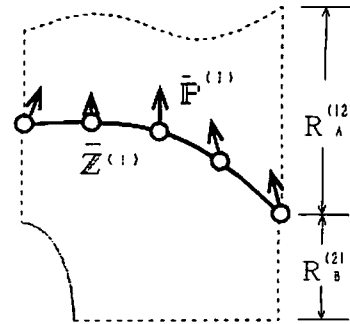


図-2.10 $\bar{Z}^{(1)}$ 状態図

2.3 数値計算結果と考察

2.3.1 はじめに

本章で誘導したズーム法、修正ズーム法を用いて中央に円孔を持つ長方形板の応力集中問題の解析を行った。直接剛性法による解との比較を通して、提案する両ズーム法で得られた解は、何回ズームを繰り返しても解析的には厳密であることを示す。また、提案した両ズーム法について比較検討を行い、さらに厳密解への収束状況を通して旧ズーム法との相違を明確にする。

2.3.2 円孔を持つ長方形板の解析

図-2.11に示すような一様引っ張りを受ける、中央に孔のあいた長方形板モデルを考える。モデルは x 、 y 軸に対して対称であるから、解析は図-2.12に示すような斜線部1/4モデルについて行った。モデル諸元は表-3.1に示す通りである。解析解は、最大主応力 σ_{max} を平均応力 σ_0 で割った応力集中係数 α で表示している。即ち、

$$\alpha = \sigma_{max} / \sigma_0 \quad (2.66)$$

ここで、 $\sigma_0 = F / A_{min} = 1.25 \text{ kgf/mm}^2$ で、 A_{min} は最小横断面積である。

また、円孔モデルの厳密解 α_r としては、Howland^{2,14)}の計算式より $\alpha_r = 2.501$ を用いた。

応力集中係数は、ズーム領域、メッシュ形状に依存するから異なったズーム領域、メッシュ形状のモデルについて数値計算を行った。図-2.13に2つの異なる分割モデル、要素分割様式1と要素分割様式2のズーム領域の大枠を、図-2.14、図-2.15に各モデルの原系を示す。分割数はほぼ同一であるが要素分割様式2の方が、ズーム領域外の分割を細かくしている。

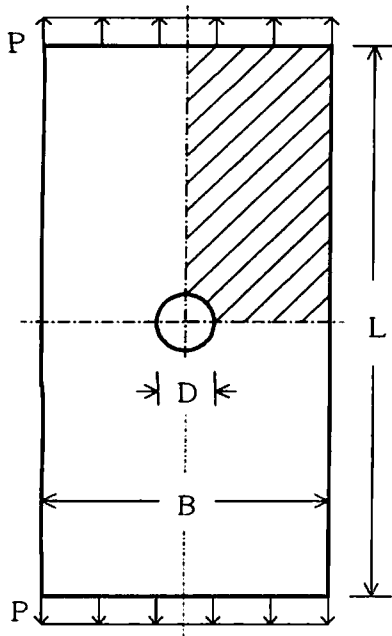


図-2.11 円孔をもつ平板モデル

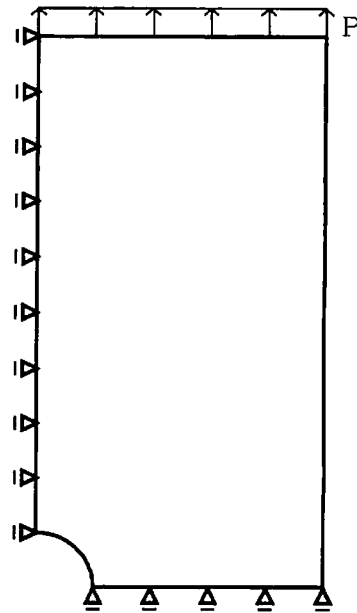
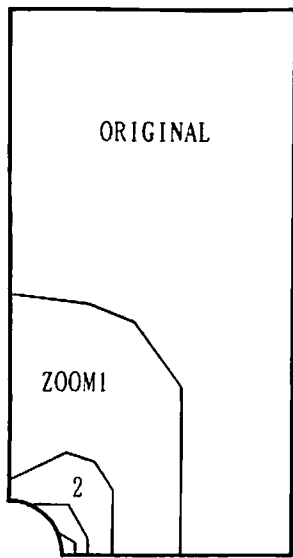


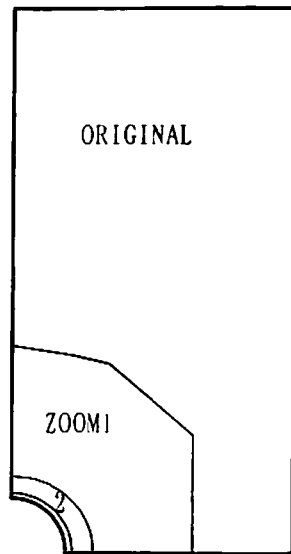
図-2.12 1/4解析モデル

表-2.1 円孔モデル諸元

諸元		数値
分布荷重	P	1.0 kgf/mm
長さ	L	40.0 mm
幅	B	20.0 mm
板厚	t	1.0 mm
弾性係数	E	1.0 kgf/mm
ポアソン比	ν	0.3
円穴直径	D	4.0 mm

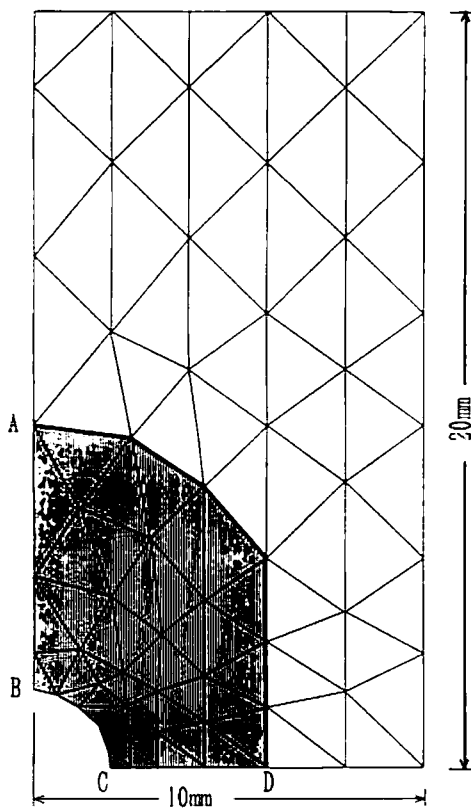


(a) 要素分割様式1
のズーム領域



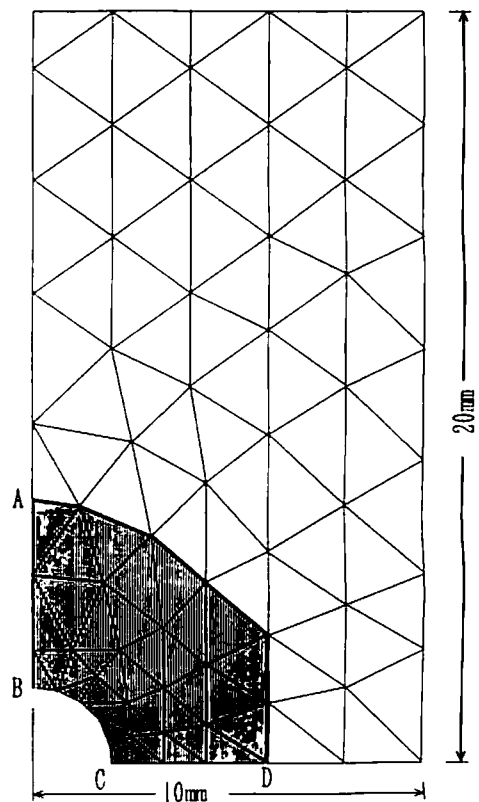
(b) 要素分割様式2
のズーム領域

図-2.13 円孔モデルのズーム領域



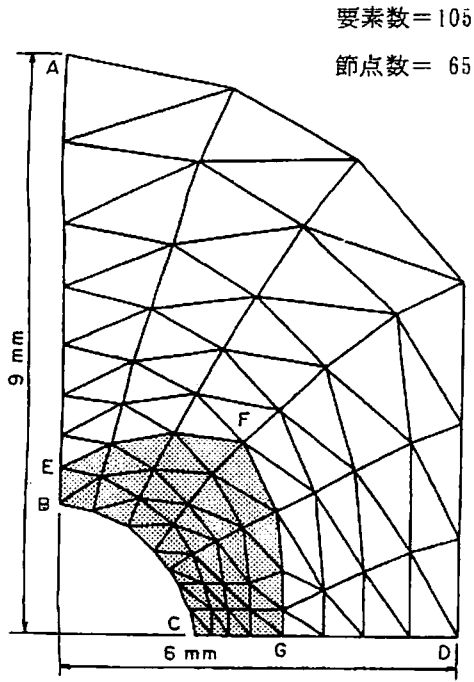
要素数=102
節点数=67

図-2.14 要素分割様式1(原系)

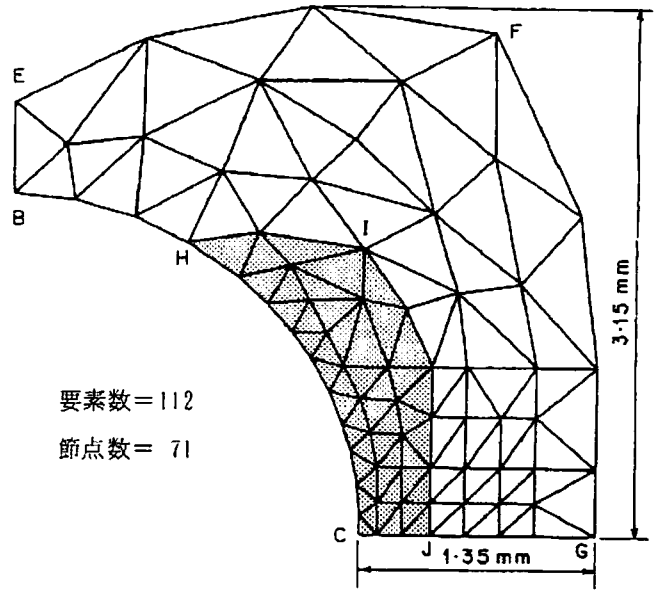


要素数=112
節点数=71

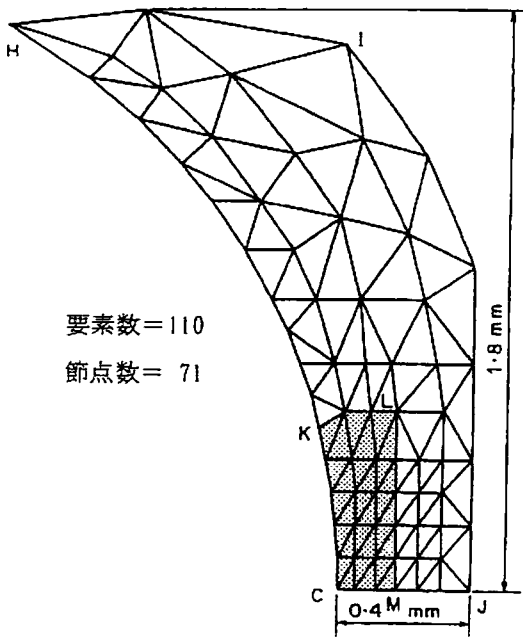
図-2.15 要素分割様式2(原系)



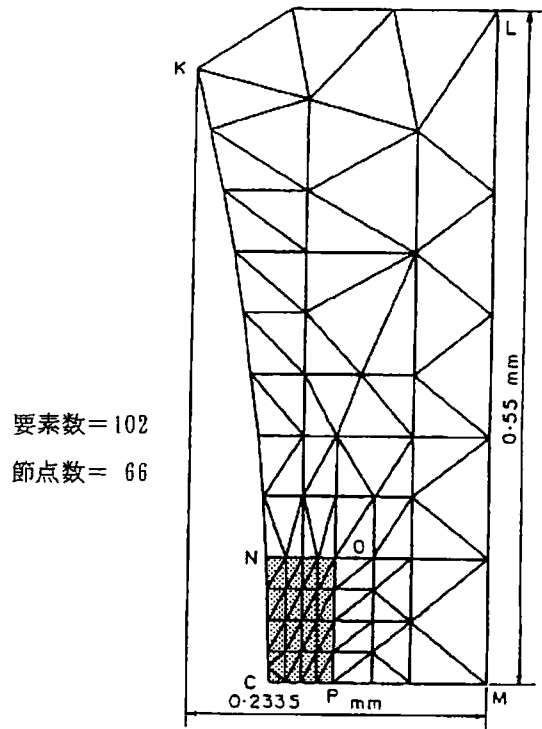
(a) 1回ズームメッシュ図



(b) 2回ズームメッシュ図

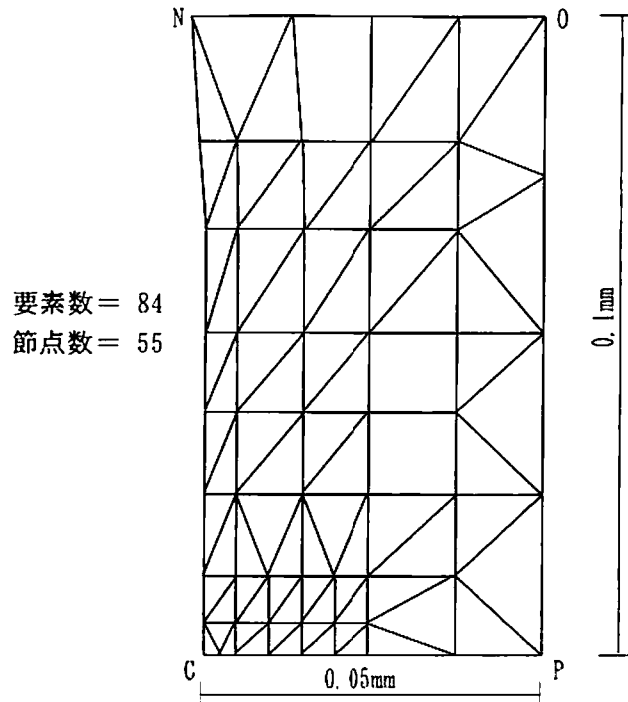


(c) 3回ズームメッシュ図



(d) 4回ズームメッシュ図

図-2.16 要素分割様式1のズーム細分割図



(e) 5回ズームメッシュ図

図-2.16 要素分割様式1のズーム細分割図

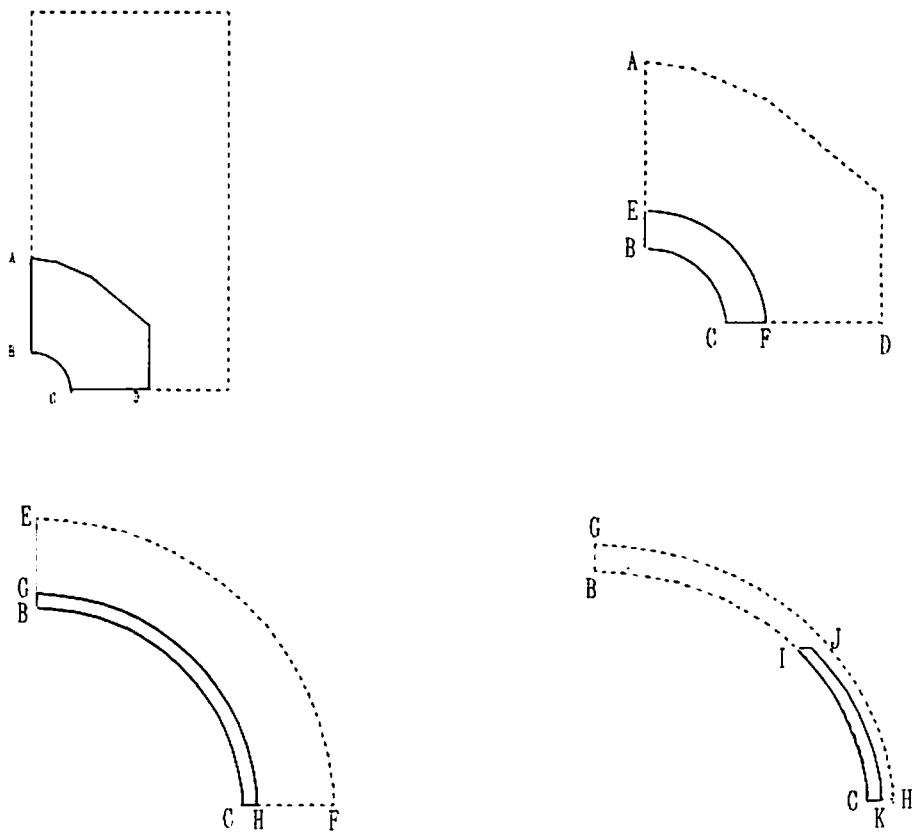


図-2.17 要素分割様式2のズーム領域

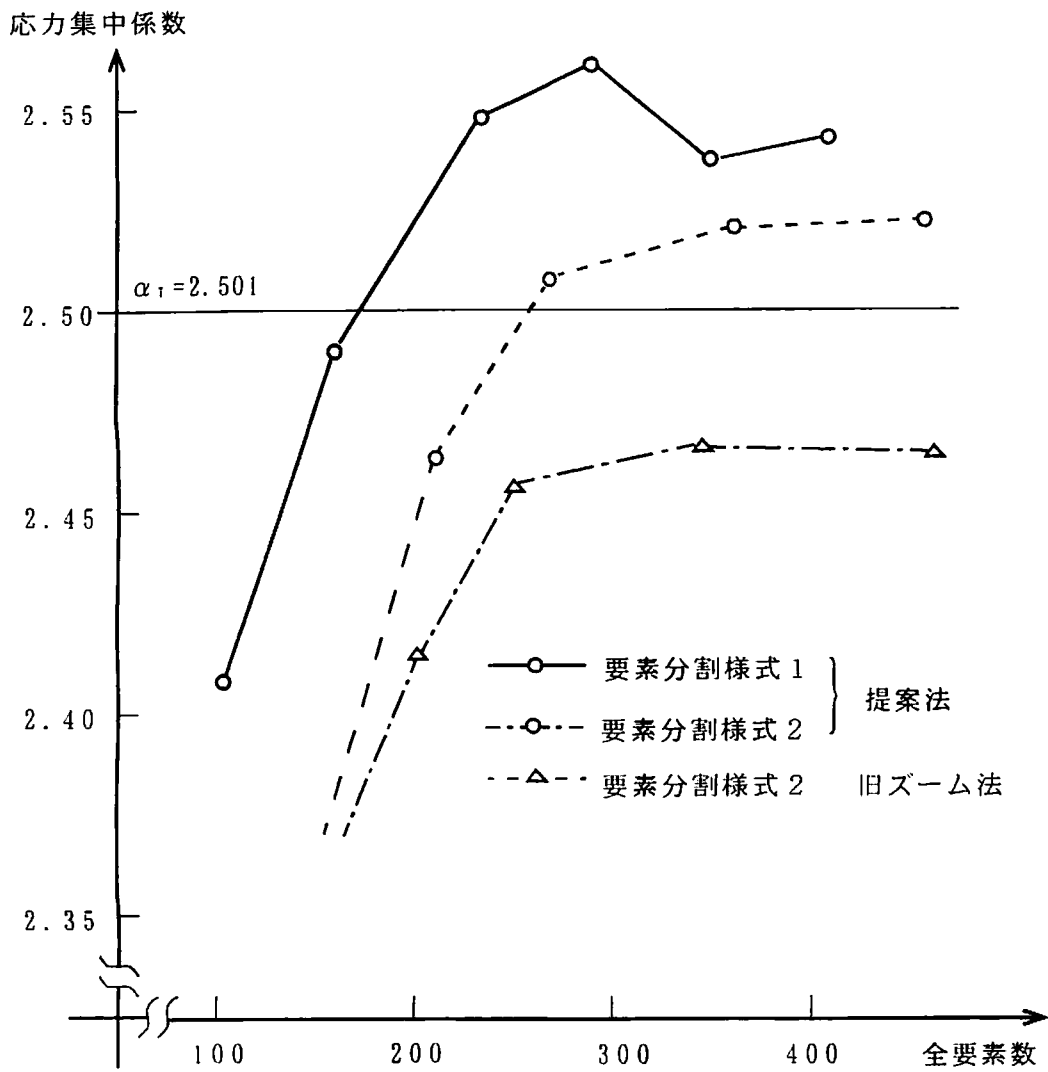


図-2.18 円孔モデルの応力集中係数と要素数の関係

表-2.2 各モデルの解析結果 (応力集中係数)

解析モデル	ズーム回数				
	0	1	2	3	4
モデルE1	2.411	2.492	2.547	2.560	2.537
モデルE2	2.293	2.465	2.507	2.524	2.526

さらに、図-2.16に要素分割様式1について、1回ズームより各ズーム時のメッシュ分割状況を、また要素分割様式2については、各段階でのズーム領域を図-2.17示す。原系では、僅かの分割差であるが、1回ズームからは、かなり異なったズーム領域、分割を行っている。図-2.18は、各ズーム毎の応力集中係数の変化を表したグラフであり、表-2.2は、ズーム毎の応力集中係数値である。グラフは、横軸が全要素数、縦軸が応力集中係数である。

モデルによって収束状況は異なるが、提案法であるズーム法、修正ズーム法で得られた各ズームでの応力集中係数の値は、いずれも直接剛性法で求めた値と完全に一致した。従って、提案法は解析的には厳密な解法であることが証明できた。

一方、要素分割様式2に適用した旧ズーム法での結果は、完全に同一のデータを用いたのに対し厳密解よりかなり低い値で収束した。これは、ズーム毎に変位を拘束、細分割によるフィードバックがないからである。

また、両ズーム法の計算容量については、最大節点数は、要素分割様式1ズーム2回の71節点で、自由度は142であり、この時のバンド幅は42である。従って、修正ズーム法については、バンドマトリックスを用いることから解析モデルのバンド幅の大小によって異なるので、データ作成に工夫を必要とするが、本計算例においては、剛性マトリックスの容量、計算時間ともにズーム法の1/3で済み、修正ズーム法の有効性が示された。

最後に、計算結果より、解析的には厳密な計算を行っても得られる応力は、単に要素細分割を行い要素数を増加させるだけでは正解に収束せず、ズーム領域、メッシュ形状、メッシュの大きさに依存することが分る。特に要素分割様式1では、応力集中係数を飛び越し振動していて、正解には収束しないという結果となった。これらの原因については第3章で検討する。

2.4 結論

分割マトリックス、拡大マトリックスの考えを導入、要素を細分割するたびに系全体を再解析することなく、系の細分割部（ズーム部）のみの解析で済み、しかもズーム毎にその影響が系全体にフィードバックし得るズーム法の誘導を行った。さらに、有限要素法における剛性マトリックスは一般にバンドマトリックスであるから、バンドマトリックスの特性を生かしてズーム可能な修正ズーム法の提案を行った。数値計算結果より以下のことが言える。

- (1) 提案した両ズーム法とも、理論的には近似が入っておらず、何回ズームを行っても解析的には厳密であり、数値計算上の誤差を除けば正しい解が得られる。
- (2) 修正ズーム法は、バンドマトリックスを用いることから、解析する系の状況に依存し、データ作成に工夫を要するが、計算機容量、計算時間ともかなりの低減が期待できる。解析例では計算機容量、計算時間とも1/3に減少した。
- (3) 境界で変位を規定する旧ズーム法では、ズーム毎にズーム外へのフィードバックがなくズームする毎に誤差が集積、正しい解に収束しない。
- (4) 有限要素法で応力集中問題を解析する場合、集中部近傍のみを単に細分割しても正解に収束するとは限らず、適正なメッシュ分割が必要となる。

参考文献

- 2-1) Holand, I. and K. Bell: Finite element method in stress analysis, TAPIR, Technical University of Norway, Trondheim, pp. 101, 1969

- 2-2) Desai, R. D. and J. F. Abel: Introduction to the Finite Element Method, Van Nostrand Reinhold, New York, pp. 169, 1972
- 2-3) Ariyoshi, K., M. Nakayama and K. Mitsunaga: Stress concentration factor of two-dimensional problems by finite element method, Bulletin of the Kyushu Institute of Technology, 26, pp. 35-39, 1973
- 2-4) Maruyama, K.: Stress analysis of a bolt-nut joint by the finite element method and the copper-electroplating method, Bulletin of Japan Society of Mechanical Engineers 16(94) pp. 671-678, 1973
- 2-5) Sugawara, K., et al.: A study on core discing of rock, Mining and Metallurgical Institute of Japan, 94, pp. 19-25, 1978
- 2-6) Bathe, K. J. and E. L. Wilson: Numerical Methods in Finite Element analysis, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, pp. 259-263, 1976
- 2-7) Wang, B. P., A. B. Palazzolo and W. D. Pilkey: Reanalysis, model synthesis, and dynamic design, State-of-the-art Surveys in Finite Element Technology, edited by A. Noor and W. Pilkey, ASME, New York, Chapter 8, 1983
- 2-8) 古屋茂: 行列と行列式、新数学シリーズ、培風館、pp. 61~67、1976
- 2-9) Westlake, J. R.: A Handbook of numerical Matrix Inversion and Solution of Linear Equations, Wiley, New York, pp. 26, 1968
- 2-10) Hirai, I., B. P. Wang and W. D. Pilkey: An efficient zooming method for finite element analysis, Internat. J. Numerical Method Engineers 20, pp. 1671-1683, 1984
- 2-11) Hirai I., Uchiyama Y., Mizuta Y. and W. D. Pilkey: AN EXACT ZOOMING METHOD, Finite Elements in Analysis and Design 1, pp. 61-69, 1984.
- 2-12) 平井一男、水田洋司、内山義博、応力集中問題の一解析法、熊本大学工学部研究報告 第31巻2号、pp. 61-66、1982
- 2-13) 内山義博、水田洋司、平井一男: FEM修正ズーム法による計算効率化について、土木・構造材料論文集、第11号、pp. 121~126、1995. 12
- 2-14) 西田正孝: 応力集中、森北出版、1978. 9

3章 適正なズーム領域判定法

3.1 概説

有限要素法を用いて応力集中問題を解析する場合、応力集中部の急変に応じて、その集中部近傍をより細かいメッシュに細分割して解く必要がある。この時、集中部を単に細分割したのみでは計算機容量、計算時間のみが増大し、しかも得られた結果が正解であるという保証はない。というのは解は分かっていないから、一般には得られた最大の応力値をもって解とするが、前章の数値計算でもあったように（例えば図-2.18）分割によっては解が上下するという事とも起こるからである。従って、細分割する領域（ズーム領域）をどこまで広げるかは重要な点であり、この取り方によって解の良し悪しは左右されるので、その領域を判定する必要となる。細分割するに連れて下限よりなめらかに目的の解に収束する必要がある。無限に細分割することは不可能であるから、細分割の範囲をどこまで広げるか、また、その分割メッシュの形状の適否によってより厳密な応力値が得られるかどうかは決まる。

ここでは、効果的にズーム解析を行うためのズーム領域の判定法の誘導を行う。理論的には平面応力問題の応力はポアソン比の変化に無関係であるが、有限要素法の基礎式にはポアソン比が含まれる。ポアソン比の変化によって系の応力は変化し、特に不適切なメッシュ分割の場合にその変化は大きくなる。従って、応力のポアソン比による微分値の大小でズーム領域の判定はできる。ただし、応力の微分値を直接求めるには、系全体の変位が必要であり、ズーム毎に変位は変化する。しかし、ズーム外荷重をズーム毎にズーム境界のみに作用する等価な荷重として表す事により、荷重載荷幅に無関係なベクトルとして扱える式の誘導を行った。更に、この式を用いて、応力の微分値もズーム部の自由度に等しいマトリックス演算で求まることを示した。

3.2 平面応力問題の基礎式

2次元平面応力状態における構造解析の3条件式は、X、Y方向の力の釣合方程式と変位の適合条件よりなり次式で表わされる³⁻¹⁾。

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + Y &= 0 \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}\end{aligned}\tag{3.1}$$

ひずみ-応力関係

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu \sigma_y) \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} (-\nu \sigma_x + \sigma_y) \\ \gamma_{xy} &= \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{xy}\end{aligned}\tag{3.2}$$

を用いると、適合条件式も応力で表され、次式となる。

$$\nabla^2 (\sigma_x + \sigma_y) = -(1+\nu) \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} \right)\tag{3.3}$$

ここで、 σ : 垂直応力、 τ : せん断応力、 ε : 垂直歪み、 γ : せん断歪みで下添字は方向を表

わす。X、Yはx、y方向の物体力、E：ヤング係数、ν：ポアソン比であり、

$$\nabla^2 = \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2$$

いま、物体力は無関係とすると、応力を未知とする支配方程式は次の如く表わされる。

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0 \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0 \quad \nabla^2 (\sigma_x + \sigma_y) = 0 \quad (3.4)$$

応力に関する支配方程式(3.4)は弾性定数E、νを含まず、従って応力は、これら定数に無関係となる。

一方、有限要素法は変位法であるから完全には対応しないが、メッシュ分割が十分に適性に行われるならば、得られる応力値はE、νの変化に影響されなくなっていくことが期待される。ヤング係数Eは剛性マトリックスの係数であり、材質が同一の場合マトリックスの係数として現れるから問題はないが、νはマトリックスの要素として現れ、νによって応力は影響を受けることになる。特に応力勾配の大きい部分ほど、要素分割が適性でないほどポアソン比の影響は大きくなると考えられる。従って、ポアソン比の変化によって応力が影響を受けない要素分割であれば、適正な要素分割が成された事になる。ポアソン比の違いによる応力の変化を見るために、ポアソン比の値を変更して再度系を解き直すのは大変である。ここでは、ポアソン比の応力に及ぼす影響をポアソン比による応力の微分として扱い、それによる適正なズーム領域の判定を行える式の誘導を行う。

3.3 応力の変化率を用いたズーム領域の判定

3.3.1 ポアソン比による応力の微分¹⁻¹⁾

平面問題での応力σと変位uの関係は次式で表される。

$$\sigma = D B u \quad (3.5)$$

ここで、Dは応力-ひずみマトリックス、Bはひずみ-変位マトリックスである。平面応力問題におけるマトリックスD、Bは、図-3.1に示す様な三角形内一定応力要素の場合

$$D = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

$$B = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} y_j - y_k & 0 & y_k - y_i & 0 & y_i - y_j & 0 \\ 0 & x_k - x_i & 0 & x_i - x_k & 0 & x_j - x_i \\ x_k - x_i & y_j - y_k & x_i - x_k & y_k - y_j & x_j - x_i & y_i - y_j \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

であり、マトリックスBは座標のみの関数であるが、マトリックスDは内部にポアソン比を含んでいる。式(3.5)の両辺をポアソン比νで微分すると

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \nu} = \frac{\partial D}{\partial \nu} B u + D B \frac{\partial u}{\partial \nu} \quad (3.8)$$

従って、D、uの微分値がわかれば応力の微分値は計算できる。右辺第一項の微分は式(3.6)を直接微分することにより簡単に計算でき次式で表される。

$$\frac{\partial D}{\partial \nu} = \frac{E}{(1-\nu^2)^2} \begin{bmatrix} 2\nu & 1+\nu^2 & 0 \\ 1+\nu^2 & 2\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-(1-\nu)}{2} \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

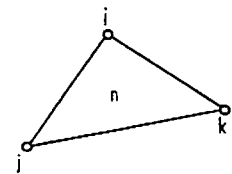


図-3.1 三角形内一定応力要素

右辺第二項の変位に関しては、式(2.24)の両辺を微分して

$$\frac{\partial K}{\partial v} u + K \frac{\partial u}{\partial v} = \frac{\partial F}{\partial v} \quad (3.10)$$

荷重Fはvに依存しないから $\partial F / \partial v = 0$ より

$$\frac{\partial u}{\partial v} = -K^{-1} \frac{\partial K}{\partial v} u \quad (3.11)$$

三角形内一定応力要素の場合、剛性マトリックスKは、

$$K_e = B_e^T D B_e \quad (3.12)$$

なる要素マトリックスの重ね合わせで得られる。

従って、 $\partial K / \partial v$ は個々の要素の剛性マトリックスの微分より

$$\frac{\partial K}{\partial v} u = \sum_{i=1}^M B_i^T \frac{\partial D}{\partial v} B_i u \quad (3.13)$$

ここで、M：系の全要素数、 Σ ：剛性マトリックスの重ね合わせ、上添字Tはマトリックスの転置を表す。以上の各項を式(3.8)に代入する事により応力のポアソン比による微分は求められる。マトリックスDの微分は一定であるから、ここで問題となるのは、結局変位ベクトルuの微分の算定であり、このままでは式(3.11)より系の全変位を必要とする。この事はたわみ性マトリックスを用いる前ズーム解析法においても同様であった。しかし今、問題にしているのはズーム部であり、応力とその微分値も応力勾配の大きい所つまりズーム内領域の値が分かれば十分である。さらに、図-3.2に示すような三角形内線形応力要素³⁻¹⁾における剛性マトリックスについては積分を必要とするが、次に述べる補間関数を用いれば式(3.22)で表せる。

ここで、各節点に対する補間関数は次式のように面積座標 ζ を用いて定義する。

$$\text{頂点} \cdots N_i = (2\zeta_i - 1)\zeta_i \quad (3.14)$$

$$\text{中間点} \cdots N_j = 4\zeta_j\zeta_k \quad (j, k \text{は} i \text{点の両端点})$$

$$\begin{aligned} \text{要素は} \quad N_1 &= (2\zeta_1 - 1)\zeta_1 & N_4 &= 4\zeta_1\zeta_2 \\ N_2 &= (2\zeta_2 - 1)\zeta_2 & N_5 &= 4\zeta_2\zeta_3 \\ N_3 &= (2\zeta_3 - 1)\zeta_3 & N_6 &= 4\zeta_3\zeta_1 \end{aligned} \quad (3.15)$$

$$\text{但し、} \zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3 = 1$$

従って、変位関数は

$$\begin{aligned} u &= N_1 dx_1 + N_2 dx_2 + N_3 dx_3 + N_4 dx_4 + N_5 dx_5 + N_6 dx_6 = \Sigma N_i dx_i \\ &= (2\zeta_1 - 1)\zeta_1 dx_1 + (2\zeta_2 - 1)\zeta_2 dx_2 + (2\zeta_3 - 1)\zeta_3 dx_3 + 4\zeta_1\zeta_2 dx_4 \\ &\quad + 4\zeta_2\zeta_3 dx_5 + 4\zeta_3\zeta_1 dx_6 \end{aligned} \quad (3.16)$$

vについても同様で、 $v = \Sigma N_i dx_i$ である。これより、ひずみ-変位マトリックスBは

$$B = H \begin{bmatrix} J^{-1} & 0 \\ 0 & J^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & P \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

ここで、H：X、Y座標でのひずみ-変位マトリックス、 J^{-1} ：ヤコビアンマトリックス、P： ζ 座標でのひずみ-変位マトリックスであり、次式で表され、いずれも座標の関数である。

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad J^{-1} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} y_{21} & y_{11} \\ x_{12} & x_{13} \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

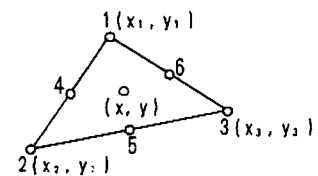


図-3.2 三角形内線形応力要素

$$P = \begin{bmatrix} 4\zeta_1 - 1 & 0 & 1 - 4\zeta_1 & 4\zeta_1 & -4\zeta_1 & 4(\zeta_1 - \zeta_2) \\ 0 & 4\zeta_2 - 1 & 1 - 4\zeta_2 & 4\zeta_2 & 4(\zeta_2 - \zeta_1) & -4\zeta_2 \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

要素剛性マトリックスは、 $K = \int B^T D B dv$ であり、積分すると次の式で表される。

$$K = \frac{k}{6A} \times$$

u_1	v_1	u_2	v_2	u_3	v_3	u_4	v_4	u_5	v_5	u_6	v_6
$3a_1$	$3a_2$	$-b_1$	$-b_2$	$a_1 + b_1$	$a_2 + b_2$	$4b_1$	$4b_2$			$-4K_{15}$	$-4K_{16}$
	$3a_4$	$-b_3$	$-b_4$	$a_3 + b_3$	$a_4 + b_4$	$4b_3$	$4b_4$			$-4K_{25}$	$-4K_{26}$
		$3d_1$	$3d_2$	$b_1 + d_1$	$b_2 + d_2$	$4b_1$	$4b_2$	$-4K_{35}$	$-4K_{36}$		
			$3d_4$	$b_3 + d_3$	$b_4 + d_4$	$4b_3$	$4b_4$	$-4K_{45}$	$-4K_{46}$		
				$3(k_{15} + k_{35})$	$3(k_{16} + k_{36})$			$-4K_{35}$	$-4K_{45}$	$-4K_{15}$	$-4K_{25}$
					$3(k_{26} + k_{46})$			$-4K_{36}$	$-4K_{46}$	$-4K_{16}$	$-4K_{26}$
						$8(a_1 + b_1 + d_1)$	$4(2a_2 + b_2 + b_3 + 2d_2)$	$-8K_{15}$	$-4(K_{16} + K_{25})$	$-8K_{35}$	$-4(K_{36} + K_{45})$
							$8(a_3 + b_3 + d_3)$	K_{710}	$-8K_{26}$	$-4(K_{36} + K_{45})$	$-8K_{46}$
								K_{77}	K_{78}	$8b_1$	$k_{18} + k_{27}$
									K_{88}	K_{912}	$8b_4$
										K_{77}	K_{88}
											K_{88}

(3.20)

ここで、剛性マトリックスの各諸量は次式で与えられる。

$$A : \text{三角形要素の面積} \quad k = \frac{E}{1-\nu^2} \quad \rho = \frac{1-\nu}{2}$$

$$a_1 = y_{12}^2 + \rho x_{12}^2 \quad a_2 = \frac{1+\nu}{2} x_{12} y_{12} \quad a_4 = \rho y_{12}^2 + x_{12}^2$$

$$b_1 = y_{11} y_{22} + \rho x_{11} x_{22} \quad b_2 = \rho x_{22} y_{11} + \nu y_{22} x_{11}$$

$$b_3 = \rho x_{11} y_{22} + \nu y_{11} x_{22} \quad b_4 = \rho y_{11} y_{22} + x_{11} x_{22}$$

$$d_1 = y_{11}^2 + \rho x_{11}^2 \quad d_2 = \frac{1+\nu}{2} x_{11} y_{11} \quad d_4 = \rho y_{11}^2 + x_{11}^2$$

(3.21)

剛性マトリックスの各諸量をポアソン比 ν で微分すると次式となる。

$$\frac{\partial k}{\partial \nu} = \frac{2\nu E}{(1-\nu^2)^2} \quad \frac{\partial \rho}{\partial \nu} = -\frac{1}{2} \quad \frac{\partial a_1}{\partial \nu} = -\frac{1}{2} x_{12}^2$$

$$\frac{\partial a_2}{\partial \nu} = \frac{1}{2} x_{12} y_{12} \quad \frac{\partial a_4}{\partial \nu} = -\frac{1}{2} y_{12}^2 \quad \frac{\partial b_1}{\partial \nu} = -\frac{1}{2} x_{11} x_{22}$$

$$\frac{\partial b_3}{\partial \nu} = -\frac{1}{2} y_{11} y_{22} \quad \frac{\partial b_2}{\partial \nu} = -\frac{1}{2} x_{22} y_{11} + y_{22} x_{11}$$

$$\frac{\partial b_4}{\partial \nu} = -\frac{1}{2} x_{11} y_{22} + y_{11} x_{22} \quad \frac{\partial d_1}{\partial \nu} = -\frac{1}{2} x_{11}^2$$

$$\frac{\partial d_2}{\partial \nu} = \frac{1}{2} x_{11} y_{11} \quad \frac{\partial d_4}{\partial \nu} = \frac{1}{2} y_{11}^2$$

(3.22)

以上より、任意要素の剛性マトリックスの微分値 $\partial K / \partial \nu$ は求められるので、これらを重ね合わせれば系全体の剛性マトリックスの微分が得られる。従って、高次要素についても応力のポアソン比による微分値は計算できる。最後に、主応力 $\sigma_{1,2}$ 、主せん断応力 $\tau_{1,2}$ は

$$\sigma_{1,2} = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) \pm \sqrt{\frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)^2 + \tau_{xy}^2}, \quad \tau_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (3.33)$$

より、ポアソン比による主応力 $\sigma_{1,2}$ 、主せん断応力 $\tau_{1,2}$ の微分値は次式で表される。

$$\frac{\partial \sigma_{1,2}}{\partial \nu} = \pm \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial \nu} + \frac{\partial \sigma_2}{\partial \nu} \right) \pm \frac{1}{2} \frac{(\sigma_1 - \sigma_2) \left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial \nu} - \frac{\partial \sigma_2}{\partial \nu} \right) + 2 \tau_{12} \frac{\partial \tau_{12}}{\partial \nu}}{\sqrt{\frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + \tau_{12}^2}} \quad (3.34)$$

$$\frac{\partial \tau_{1,2}}{\partial \nu} = \pm \frac{1}{2} \frac{(\sigma_1 - \sigma_2) \left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial \nu} - \frac{\partial \sigma_2}{\partial \nu} \right) + 2 \tau_{12} \frac{\partial \tau_{12}}{\partial \nu}}{\sqrt{\frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + \tau_{12}^2}} \quad (3.35)$$

3.3.2 ズーム法における応力の微分^{3,4,5)}

ここでは、ズームに必要な諸量のみを用いて、ズーム領域判定に必要な微分値は求められることを示す。先にも述べたように、必用な微分値を得るのに問題となるのは変位の微分値のみである。まず、原形での変位の微分値は、

$$\mathbf{u}^{(0)} = \mathbf{K}^{(0)} \mathbf{F}^{(0)} = \mathbf{f}^{(0)} \mathbf{F}^{(0)}$$

の両辺を ν で微分して

$$\frac{\partial \mathbf{u}^{(0)}}{\partial \nu} = \frac{\partial \mathbf{f}^{(0)}}{\partial \nu} \mathbf{F}^{(0)} + \mathbf{f}^{(0)} \frac{\partial \mathbf{F}^{(0)}}{\partial \nu} = \frac{\partial \mathbf{f}^{(0)}}{\partial \nu} \mathbf{F}^{(0)} \quad (3.36)$$

ここで、必要となる $\partial \mathbf{f}^{(0)} / \partial \nu$ は

$$\mathbf{K}^{(0)} \mathbf{f}^{(0)} = \mathbf{I} \quad (3.37)$$

の両辺を微分することにより

$$\frac{\partial \mathbf{K}^{(0)}}{\partial \nu} \mathbf{f}^{(0)} + \mathbf{K}^{(0)} \frac{\partial \mathbf{f}^{(0)}}{\partial \nu} = 0 \quad (3.38)$$

$$\frac{\partial \mathbf{f}^{(0)}}{\partial \nu} = -\mathbf{f}^{(0)} \frac{\partial \mathbf{K}^{(0)}}{\partial \nu} \mathbf{f}^{(0)}$$

これより原形での変位の微分値は求められる。

1回ズームで必要となる \mathbf{Z} 、 \mathbf{F} の微分値は次のようにして求められる。
式(2.29d)より $\partial \mathbf{Z}^{(0)} / \partial \nu$ は、 $\mathbf{Z}^{(0)} \mathbf{f}_{33} = \mathbf{I}$ の両辺を ν で微分して、変形すると

$$\frac{\partial \mathbf{Z}^{(0)}}{\partial \nu} = -\mathbf{Z}^{(0)} \frac{\partial \mathbf{f}_{33}^{(0)}}{\partial \nu} \mathbf{Z}^{(0)} \quad (3.39)$$

\mathbf{F} の微分値は、式(2.34)を ν で微分、 $\partial \mathbf{F}_3^{(0)} / \partial \nu = 0$ とおくと

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{F}}^{(0)}}{\partial \nu} = -\frac{\partial \mathbf{Z}^{(0)}}{\partial \nu} \bar{\mathbf{u}}_3^{(0)} - \mathbf{Z}^{(0)} \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}_3^{(0)}}{\partial \nu} \quad (3.40)$$

ここで、 $\mathbf{f}_{33}^{(0)}$ 、 $\bar{\mathbf{u}}_3^{(0)}$ の微分値は、式(2.86)、(2.84)で求めた \mathbf{f} 、 \mathbf{u} の微分値を単に並べ替えることにより得られる。1回ズーム時のズーム部変位の微分値は、式(2.46)の両辺を微分することにより、次式で与えられる。

$$\frac{\partial \mathbf{u}_3^{(1)}}{\partial \nu} = -\frac{\partial \mathbf{f}_{33}^{(1)}}{\partial \nu} \hat{\mathbf{F}}^{(0)} - \mathbf{f}_{33}^{(1)} \frac{\partial \hat{\mathbf{F}}^{(0)}}{\partial \nu} + \frac{\partial \mathbf{f}_{33}^{(1)}}{\partial \nu} \mathbf{F}_3^{(0)} \quad (3.41)$$

ここで、 $\partial \mathbf{F}_3^{(0)} / \partial \nu = 0$ である。

従って、必要となる諸量は $\partial \mathbf{f}_{33}^{(1)} / \partial \nu$ 、 $\partial \hat{\mathbf{F}}^{(0)} / \partial \nu$ である。

$\mathbf{Z}^{(1)} \mathbf{f}_{33} = \mathbf{I}$ の両辺を ν で微分して

$$\frac{\partial \mathbf{f}_{33}^{(1)}}{\partial \nu} = -\mathbf{f}_{33}^{(1)} \frac{\partial \mathbf{Z}^{(1)}}{\partial \nu} \mathbf{f}_{33}^{(1)} \quad (3.42)$$

\mathbf{Z} の微分は式(2.44)の微分より

$$\frac{\partial \mathbf{Z}^{(1)}}{\partial \nu} = \frac{\partial \hat{\mathbf{Z}}^{(0)}}{\partial \nu} + \frac{\partial \Delta \mathbf{K}^{(1)}}{\partial \nu} \quad (3.43)$$

なお、 $\hat{\mathbf{Z}}$ 、 $\hat{\mathbf{P}}$ の微分値は、式(2.88)、(2.89)を細分割によって拡大した部分に0を挿入、単に拡大したものであり、 $\Delta \mathbf{K}^{(1)}$ の微分は式(2.74)の微分あるいは式(2.82)より得られる。以上で必要な諸量は求められたのでズーム内変位 $\mathbf{u}_s^{(1)}$ の微分値は求められる。2回ズームについては、 \mathbf{Z} 、 \mathbf{P} の微分値は、式(2.88)、(2.89)で上添字を1に変更、この時必要となる \mathbf{f}_{ss} 、 $\bar{\mathbf{u}}_s^{(0)}$ の微分値は、式(2.90)、(2.89)の \mathbf{f} 、 \mathbf{u} の微分値を並べ替えることにより得られる。2回ズーム時のズーム部変位の微分値は、式(2.50)の微分より次式で表され、1回ズームの式(2.90)の上添字を2に変更した式でよい。

$$\frac{\partial \mathbf{u}_s^{(1)}}{\partial \nu} = -\frac{\partial \mathbf{f}_{ss}^{(1)}}{\partial \nu} \hat{\mathbf{P}}^{(0)} - \mathbf{f}_{ss}^{(1)} \frac{\partial \hat{\mathbf{P}}^{(0)}}{\partial \nu} + \frac{\partial \mathbf{f}_{ss}^{(1)}}{\partial \nu} \mathbf{F}_s^{(0)} \quad (3.44)$$

3回目以下も同様にして求められる。

3.3.3 修正ズーム法における応力の微分^{1-4.7)}

まず、原系での変位の微分値は式(2.24)で、荷重 $\mathbf{F}^{(0)}$ は ν に無関係より

$$\mathbf{K}^{(0)} \frac{\partial \mathbf{u}^{(0)}}{\partial \nu} = -\frac{\partial \mathbf{K}^{(0)}}{\partial \nu} \mathbf{u}^{(0)} \quad (3.45)$$

$\mathbf{K}^{(0)}$ は、変位算定時に三角分解されているので、それを用いれば変位と同様に変位の微分値は求められる。次に、1回ズーム時の変位の微分値は次のようにして求められる。

$$1 \text{ 回ズーム時の剛性方程式は} \quad \mathbf{F}^{(1)} = \mathbf{K}^{(1)} \mathbf{u}^{(1)} \quad (3.46)$$

両辺を ν で微分し、変形すると

$$\mathbf{K}^{(1)} \frac{\partial \mathbf{u}^{(1)}}{\partial \nu} = \frac{\partial \mathbf{F}^{(1)}}{\partial \nu} - \frac{\partial \mathbf{K}^{(1)}}{\partial \nu} \mathbf{u}^{(1)} = \frac{\partial \hat{\mathbf{P}}^{(0)}}{\partial \nu} - \frac{\partial \hat{\mathbf{Z}}^{(0)}}{\partial \nu} \mathbf{u}^{(1)} - \frac{\partial \mathbf{K}_s^{(1)}}{\partial \nu} \mathbf{u}^{(1)} \quad (3.47)$$

より、1回ズーム部の変位の微分値は求められる。算定に必要な諸量のうち、 $\hat{\mathbf{P}}^{(1)}$ と $\hat{\mathbf{Z}}^{(0)}$ 即ち $\bar{\mathbf{P}}^{(0)}$ 、 $\bar{\mathbf{Z}}^{(0)}$ の微分値が問題となるが、それらは次のようにして求められる。まず、再解析で得られた境界部の変位 $\bar{\mathbf{u}}_\lambda^{(0)}$ を用いると、 $\bar{\mathbf{P}}^{(0)} = -\bar{\mathbf{Z}}^{(0)} \bar{\mathbf{u}}_\lambda^{(0)}$ より

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{P}}^{(0)}}{\partial \nu} = -\frac{\partial \bar{\mathbf{Z}}^{(0)}}{\partial \nu} \bar{\mathbf{u}}_\lambda^{(0)} - \bar{\mathbf{Z}}^{(0)} \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}_\lambda^{(0)}}{\partial \nu} \quad (3.48)$$

ここで、 $\bar{\mathbf{u}}_\lambda^{(0)}$ については、 $\mathbf{K}_\lambda^{(0)} \mathbf{u}_\lambda^{(0)} = \mathbf{F}_\lambda^{(0)}$ より

$$\mathbf{K}_\lambda^{(0)} \frac{\partial \mathbf{u}_\lambda^{(0)}}{\partial \nu} = -\frac{\partial \mathbf{K}_\lambda^{(0)}}{\partial \nu} \mathbf{u}_\lambda^{(0)} \quad (3.49)$$

また、 $\bar{\mathbf{Z}}^{(0)}$ については、 $\mathbf{Z}_\lambda^{(0)} \mathbf{f}_{\lambda\lambda}^{(0)} = \mathbf{I}$ より

$$\frac{\partial \mathbf{Z}_\lambda^{(0)}}{\partial \nu} = -\mathbf{Z}_\lambda^{(0)} \frac{\partial \mathbf{f}_{\lambda\lambda}^{(0)}}{\partial \nu} \mathbf{Z}_\lambda^{(0)} \quad (3.50)$$

によって $\mathbf{u}_\lambda^{(0)}$ 、 $\mathbf{Z}_\lambda^{(0)}$ を求め、各々ズーム境界部を取り出せばよい。ここで、 $\mathbf{K}_\lambda^{(0)}$ はバンドマトリックスでありすでに三角分解済みである。また、 $\mathbf{f}_{\lambda\lambda}^{(0)}$ の微分は、 $\mathbf{K}_\lambda^{(0)} \mathbf{f}_\lambda^{(0)} = \mathbf{I}$ より

$$\mathbf{K}_\lambda^{(0)} \frac{\partial \mathbf{f}_\lambda^{(0)}}{\partial \nu} = -\frac{\partial \mathbf{K}_\lambda^{(0)}}{\partial \nu} \mathbf{f}_\lambda^{(0)} \quad (3.51)$$

$\mathbf{f}_{\lambda\lambda}^{(0)}$ は、 $\mathbf{f}_\lambda^{(0)}$ のズーム境界部に該当するたわみ性マトリックスであり、境界部の微分値を求めればよいから、右辺の $\mathbf{f}_\lambda^{(0)}$ も式(2.61)で求められているズーム境界部の $\hat{\mathbf{f}}_\lambda^{(0)}$ を用い

ればよい。従って、

$$K_A^{(01)} \frac{\partial \tilde{\mathbf{f}}^{(01)}}{\partial \nu} = - \frac{\partial K_A^{(01)}}{\partial \nu} \tilde{\mathbf{f}}^{(01)} \quad (3.52)$$

$\mathbf{f}^{(01)}$ の微分値より境界部を取り出せば $\mathbf{f}_{12}^{(01)}$ の微分値が得られる。

ここで、

$$\tilde{\mathbf{f}}^{(01)} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{12}^{(01)} \\ \mathbf{f}_{22}^{(01)} \end{bmatrix} \quad (3.53)$$

2回ズームについても、2回ズーム部に関する剛性方程式は

$$\mathbf{F}^{(2)} = \mathbf{K}^{(2)} \mathbf{u}^{(2)}$$

両辺を ν で微分し、変形すれば式(2.96)と上添字が変化するのみで同一な式となる。

$$\mathbf{K}^{(2)} \frac{\partial \mathbf{u}^{(2)}}{\partial \nu} = \frac{\partial \mathbf{F}^{(2)}}{\partial \nu} - \frac{\partial \mathbf{K}^{(2)}}{\partial \nu} \mathbf{u}^{(2)} = \frac{\partial \mathbf{F}^{(2)}}{\partial \nu} - \frac{\partial \bar{\mathbf{Z}}^{(1)}}{\partial \nu} \mathbf{u}^{(2)} - \frac{\partial \Delta \mathbf{K}^{(2)}}{\partial \nu} \mathbf{u}^{(2)} \quad (3.54)$$

3回ズーム以降も同様な計算を次々に行えば、新たな剛性マトリックスなどの計算も必要でなく、変位を求めるために計算した諸量のみで、つまりズーム部の自由度に等しい大きさのマトリックス演算で必要なズーム部の変位の微分値を求めることができる。

3.4 数値計算結果と考察

3.4.1 はじめに

メッシュを細分割するにつれて応力はどの様に収束していくか、またそれとポアソン比を変えたときにどの様に変化するかを調べ。そこで、比較的応力変化の少ない偏心荷重が作用する長方形板モデルと、メッシュ分割とともにその形状の影響を調べるために同じ長方形板に円孔、楕円孔を持つ比較的応力変化の激しいモデルについて解析を行った。

3.4.2 応力に及ぼすポアソン比の影響

図-3.3に示すような境界条件、荷重条件の下で横方向の分割数を8跳びに8~48と均等に細分割する。縦分割はいずれも横分割の2倍とし、やはり均等に分割した均等メッシュとした。

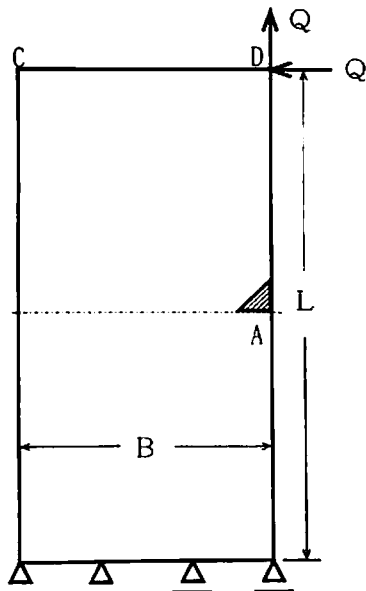
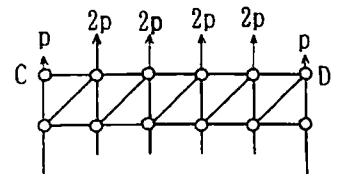
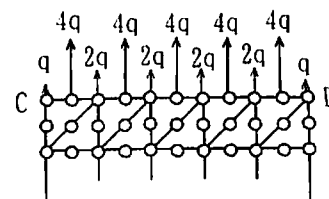


図-3.3 長方形板モデル



(a) 一定応力要素



(b) 線形応力要素

図-3.4 等分布荷重作用状態

応力は、境界などの影響が少ないと思われる板の縦中央の図斜線部A要素の主応力を求めた。各分割に対して三角形内一定応力要素で求めた結果を表-3.2に示す。結果より分かるように細分割するにつれて応力は小さくなり、その変化の割合は次第に小さくなってある値に収束する傾向が伺われる。一方、ポアソン比の変更が応力に与える影響も上記と同様な傾向を示し、次第に小さくなっていくのが分かる。従って、さらに細分割を行った場合、応力値が大きく改善されるかどうかは、ポアソン比の変更によって応力がどのくらい変わるかによって判断出来よう。なお、三角形内一定応力要素では、図-3.4aのように荷重を上辺に等分布させ一様に引っ張れば、応力一様分布の状態が得られ、この場合応力はポアソン比の影響をまったく受けないことは計算で確認している。さらに、図-3.4bの高次要素（線形応力要素）の場合は、一様引っ張りとして一定応力要素と同様、節点に荷重を均等に分配しても、最上層行の要素には応力微分値に大きな値が得られた。サンプソンの定理より、荷重点から離れた中間層での応力は一様分布となるが、一定応力要素では全要素が一様分布となる。これは、三角形頂点節点と中間節点の剛性が1:4であるため、分布荷重を図-3.4bのように1:4にして作用させると全要素が一様応力分布となった。従って、一般に高次要素を用いた解析においてもポアソン比の影響は見られる。

表-3.1 長方形板モデル諸元

集中荷重	Q	20.0 kgf
長さ	L	40.0 mm
幅	B	20.0 mm
板厚	t	1.0
弾性係数	E	1.0
ポアソン比	ν	0.3

表-3.2 A要素主応力の変化(kgf/mm²)

要素数 ポアソン比	256	1024	2304	6400	9216
0.1	10.31038	10.28009	10.24075	10.19748	10.18496
0.2	10.24410	10.24714	10.21871	10.18417	10.17385
0.3	10.19902	10.22557	10.20449	10.17569	10.16679
0.4	10.16902	10.21231	10.19603	10.17079	10.16274

次に、やや応力変化の大きい例³⁻³⁾として、図-3.5に示すような円孔を持つ長方形板解析モデルを選び、その諸元を表-3.3に示す。なお、図-3.5モデルは上下左右対称であるので、解析は斜線部1/4部分について行った。表-3.4は、荒い要素分割から応力集中部を細分割していった4つのパターンについて、x軸上の縦方向応力 σ を求めた結果である。表で位置とはx座標で、最大応力は円孔に最も近い要素の応力で、ポアソン比は0.1、0.2、0.3と変化させた。表より応力集中部の要素を小さくするに従い、ポアソン比による応力変化は小さくなっていくが、その程度は応力集中部から遠ざかるに従って小さくなっている。これらの事より、有限要素法

解析においては、要素内が一定応力あるいは線形応力であっても、その条件を満足するように要素分割さ P

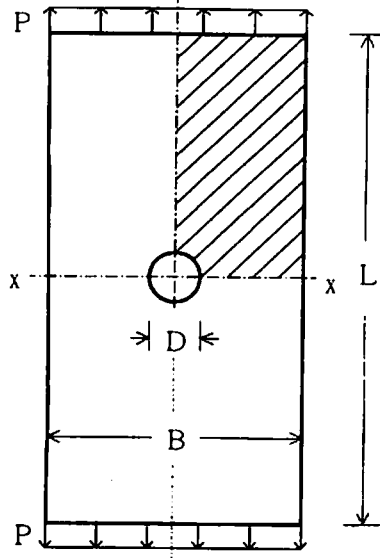


図-3.5 円孔をもつ平板モデル

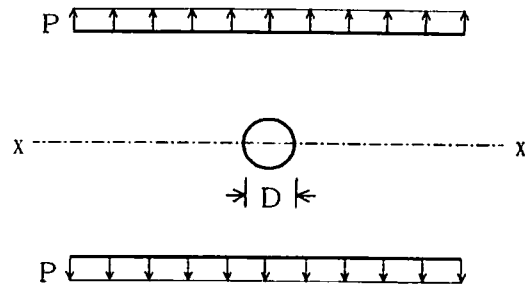


図-3.6 円孔をもつ半無限板モデル

表-3.3 円孔を持つ長方形板モデル諸元

諸元		数値
分布荷重	P	1.0 kgf/mm
長さ	L	40.0 mm
幅	B	20.0 mm
板厚	t	1.0 mm
弾性係数	E	2.1×10^4 kgf/mm
ポアソン比	ν	0.3
円穴直径	D	4.0 mm

表-3.4 x 軸上の垂直応力 (σ , kgf/mm²)

位置 要素数 ν	7.333mm			5.500mm			2.800mm			最大応力		
	0.10	0.20	0.30	0.10	0.20	0.30	0.10	0.20	0.30	0.10	0.20	0.30
412	1.053	1.054	1.054	1.105	1.107	1.107	1.793	1.798	1.803	2.834	2.847	2.861
864	1.053	1.055	1.055	1.138	1.137	1.136	1.607	1.600	1.589	3.045	3.061	3.081
1124	1.054	1.055	1.056	1.139	1.138	1.137	1.648	1.654	1.659	3.089	3.101	3.115
1376	1.054	1.055	1.056	1.139	1.138	1.137	1.640	1.655	1.661	3.100	3.109	3.118

れた構造物ならば理論解と同様ポアソン比に無関係な解を得ることが出来る。

最後に、境界要素法についてもポアソン比の応力に及ぼす影響を調べるために、図-3.6のような半無限板の引張りについて解析を行った³⁻³⁾。モデル諸元を表-3.5に、円弧分割数に対して、ポアソン比を0.1, 0.2, 0.3と変化させた時の応力変化を図-3.7, 3.8に、ポアソン比0.1の場合の円弧分割数と応力の関係を図-3.9に示す。図より、境界要素法も有限要素法と同様、ポアソン比の応力に及ぼす影響は、円弧より離れた応力変化の小さい部分ではほとんどなく、応力勾配が大きくなるに連れて大きくなり、特に集中部近傍ではその影響が著しい。しかも、境界要素法の方がよりポアソン比の影響が大である。

表-3.5 円孔を持つ半無限板モデル諸元

諸元	数値
分布荷重 P	1.0 kgf/mm
板厚 t	1.0 mm
弾性係数 E	2.1×10^4 kgf/mm
円穴直径 D	2.0 mm

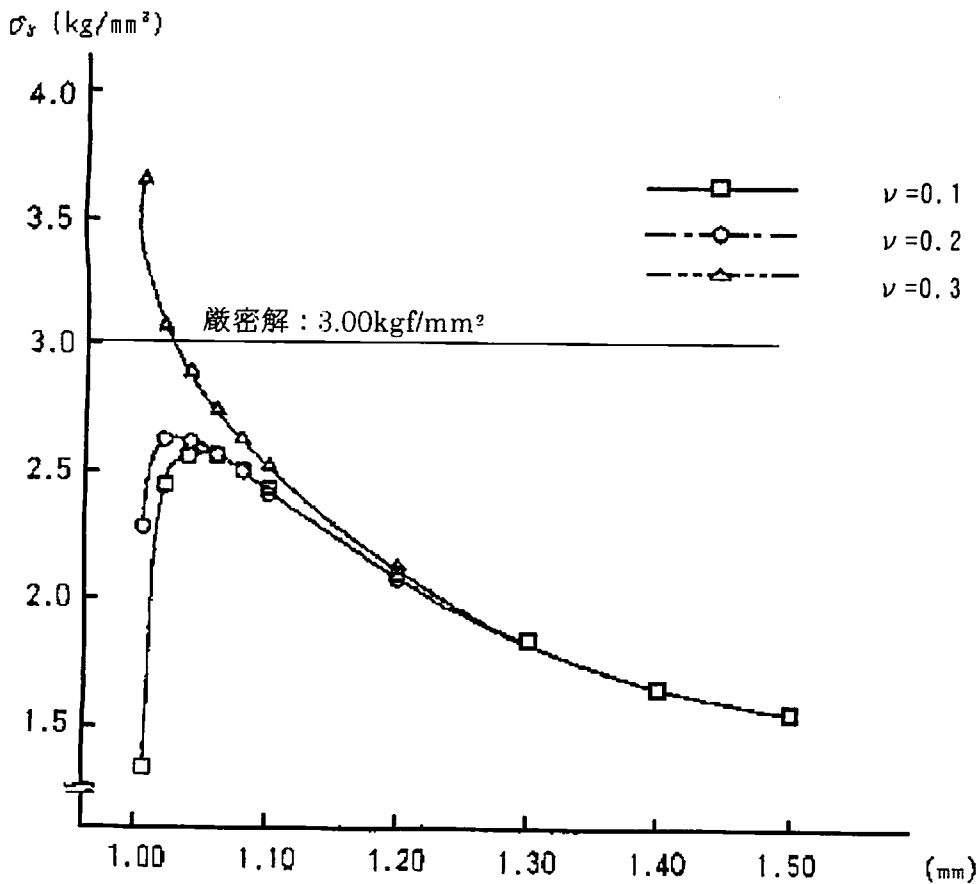


図-3.7 ポアソン比による応力変化(円弧 36 分割)

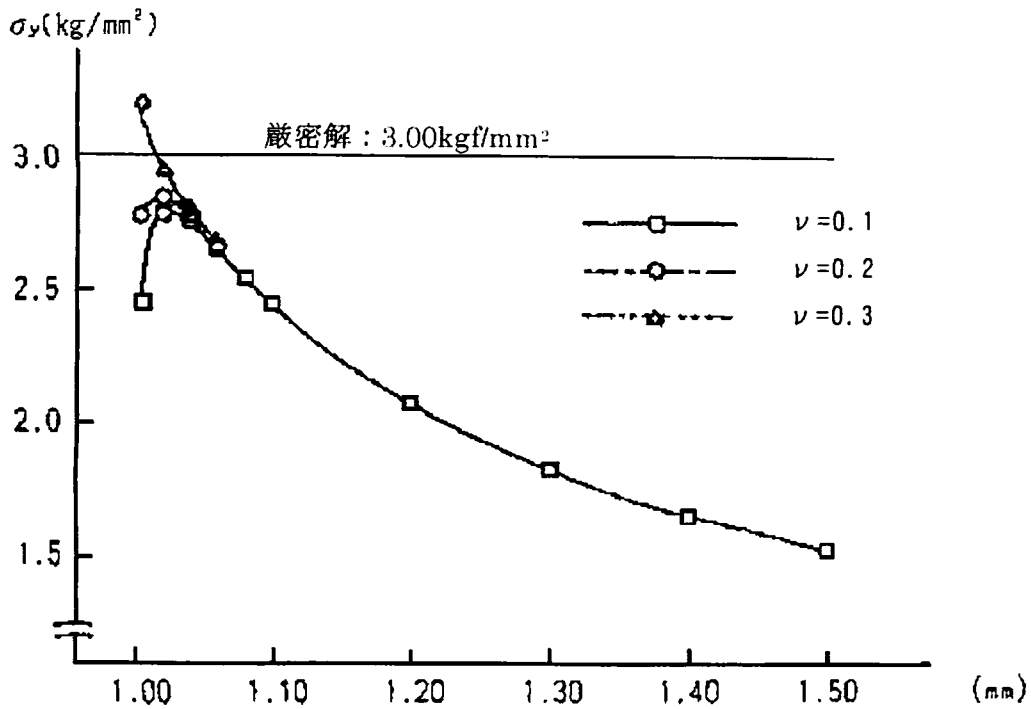


図-3.8 ポアソン比による応力変化(円弧 120 分割)

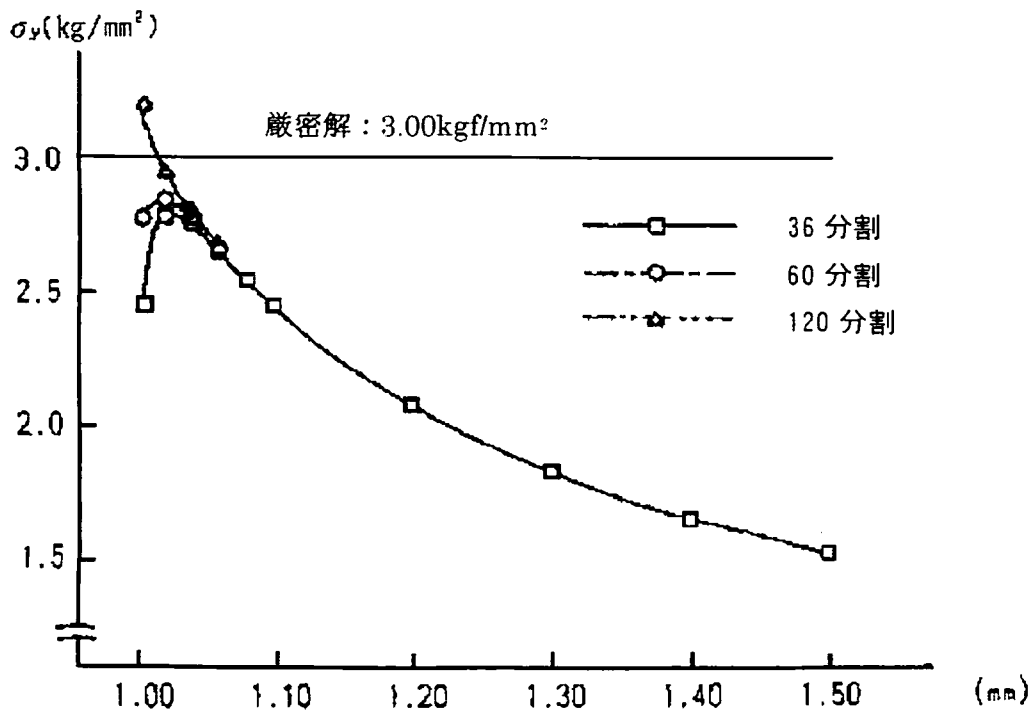


図-3.9 円弧分割数による応力変化(ν=0.1)

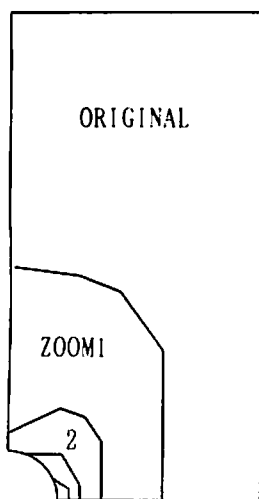
3.4.3 ズーム領域を考慮したズーム解析

(1) 適正なズーム領域の選定^{1,10)}

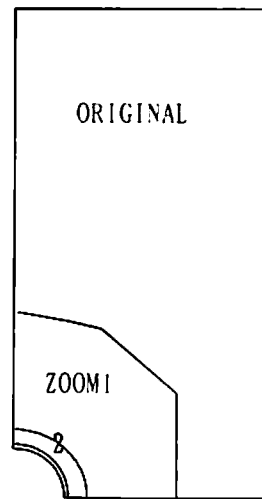
まず、解析例として2章で取り上げた要素分割様式1と要素分割様式2のモデルについて、問題となる点について検討し、その修正を試みる。2つのモデル図-3.10a、bのズーム領域に対して図-2.18の解析結果が得られた。この様に単に細分割し要素数を多くして行っても厳密解^{1,11)}に収束するとは限らず、ズームの仕方によっては要素分割様式1の如く一旦厳密解を大きく飛び越した後低下するというように変動しながら解に近づく場合がある。一方、要素分割様式2については一応滑らかに解が上昇しているがやはり厳密解を飛び越しており、同様にどの値が正解か判定できない。一般に、細分割に連れて解はなめらかに上昇、分割数を増しても応力値が変化しなくなったときが正解と判断すればよいと思われるが、この結果を見ると必ずしもそうは言えない。従って、より適性な収束判定法が必要となる。

この要素分割様式1と要素分割様式2のモデルについて、1回ズーム時のポアソン比による主応力の微分値の大きさをプロットしたものが図-3.11、3.12である。領域判定に用いる微分値は、3個のモデルについて検討し、妥当と思われる大きさの3ランクに区分した。ズーム領域としては、黒マーク■、●表示を含む領域を取り、その部分について細分割する必要がある。要素分割様式1は、微分値の大きなものがズーム領域外にも広く分布しており、ズーム領域の取り方に問題を残したままズームを行い、応力集中部のみを異常に細かく分割して行った結果、集中部のみが拡大され、従って厳密解を大きく飛び越すという結果になったと思われる。要素分割様式2モデルも、解はなめらかに上昇しているが、応力変化の大きい部分を無視し、円弧に沿った幅の狭い部分を細分割しており、集中部のみが拡大された結果である。次のメッシュ細分割は、前回よりさらに集中部に近い範囲で行われる。

また、ズーム外領域メッシュの応力の微分値は、ズーム内メッシュの細分割によって影響されることはないから、両要素分割様式とも、要素内応力一定の仮定に対して要素内に応力変化がある部分すなわち、更に細分割が必要な部分を残したまま集中部近傍のみを細分割してい



(a) 要素分割様式1
のズーム領域



(b) 要素分割様式2
のズーム領域

図-3.10 円孔モデルのズーム領域

った結果である。

勿論、ズーム領域を考えられる限り広く取れば問題はないが、その場合計算機容量、計算時間が増加する事になる。従って、どの範囲まで、またどのくらいの細分割が必要かを考えた適正な領域の判定を行いながら、再分割していく必要がある。

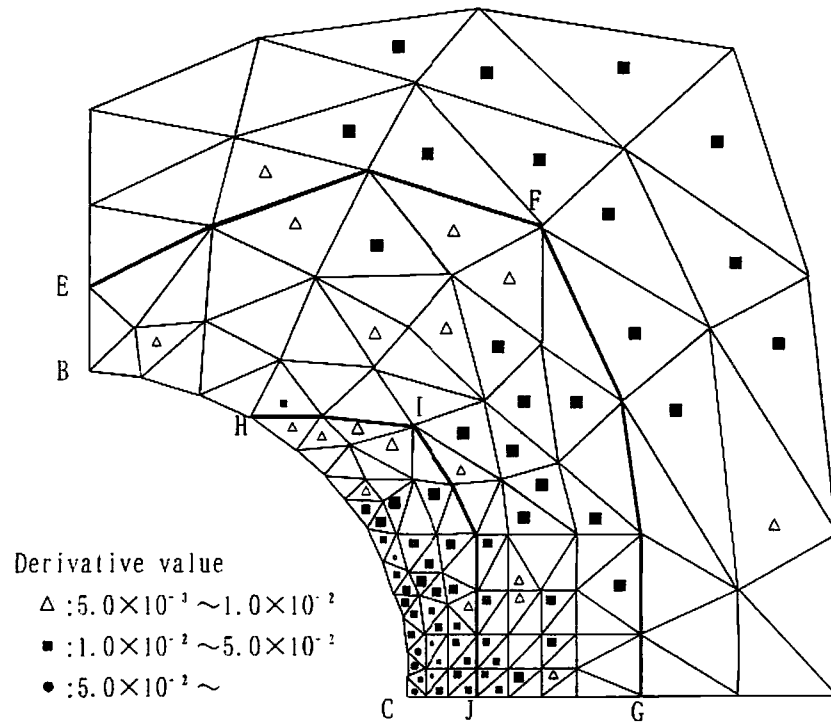


図-3.11 主応力の微分値の分布図(要素分割様式1)

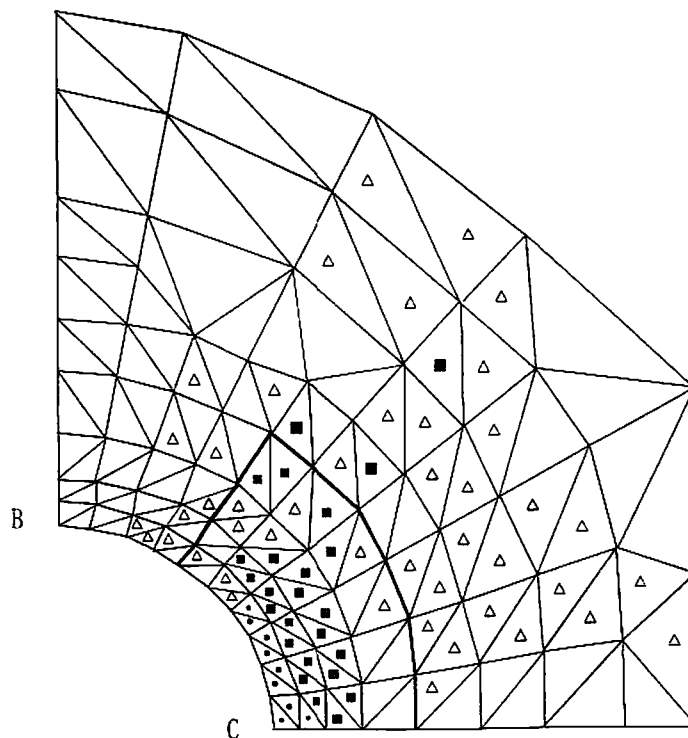


図-3.12 主応力の微分値の分布図(要素分割様式2)

(2) 選定したズーム領域を用いた円孔モデルの解析

要素分割様式2のモデルについて、主応力の微分値の大小に応じてズーム2回目から再解析を試みたものが修正要素分割様式である。図-3.13に修正要素分割様式の各ズーム時のメッシュ分割状況を、また図-3.14にズーム領域の概要を示す。

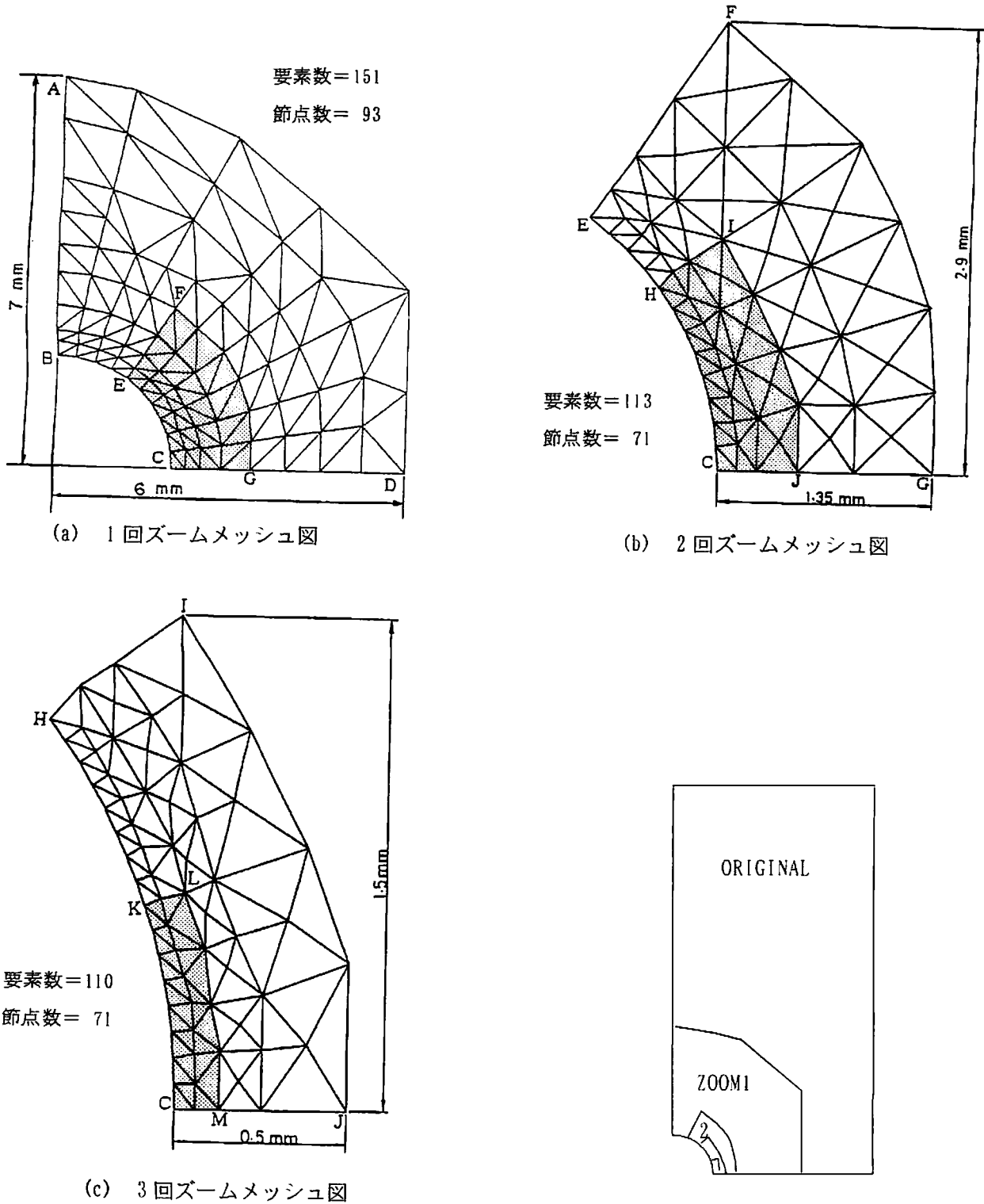


図-3.13 修正要素分割様式のズーム細分割図

微分値の分布状況を見ると、円弧の上部は応力変化が小さいと思われるので、上部をカット、その分を微分値の大きい、領域の幅を厚くすることで、ズーム部としてはほぼ同数の要素分割数となっている。以下、微分値に応じてズーム領域を判定し細分割した結果が図-3.13のメッシュ分割状態図である。円孔を持つ3つの異なる要素分割様式の解への収束状況を図-3.15に、各ズーム時の応力集中係数値を表-3.6に示す。

最終ズーム時の全要素分割は、いずれの要素分割様式においてもほぼ同程度の要素分割数であるが、修正要素分割様式は下方から厳密解に収束している様子が見て取れる。従って、主応力の微分値の大小によって、次回ズームに必要なズーム領域の判定を行い、次々とズームを実行していけば、より少ない要素分割数で適正な解が得られる。

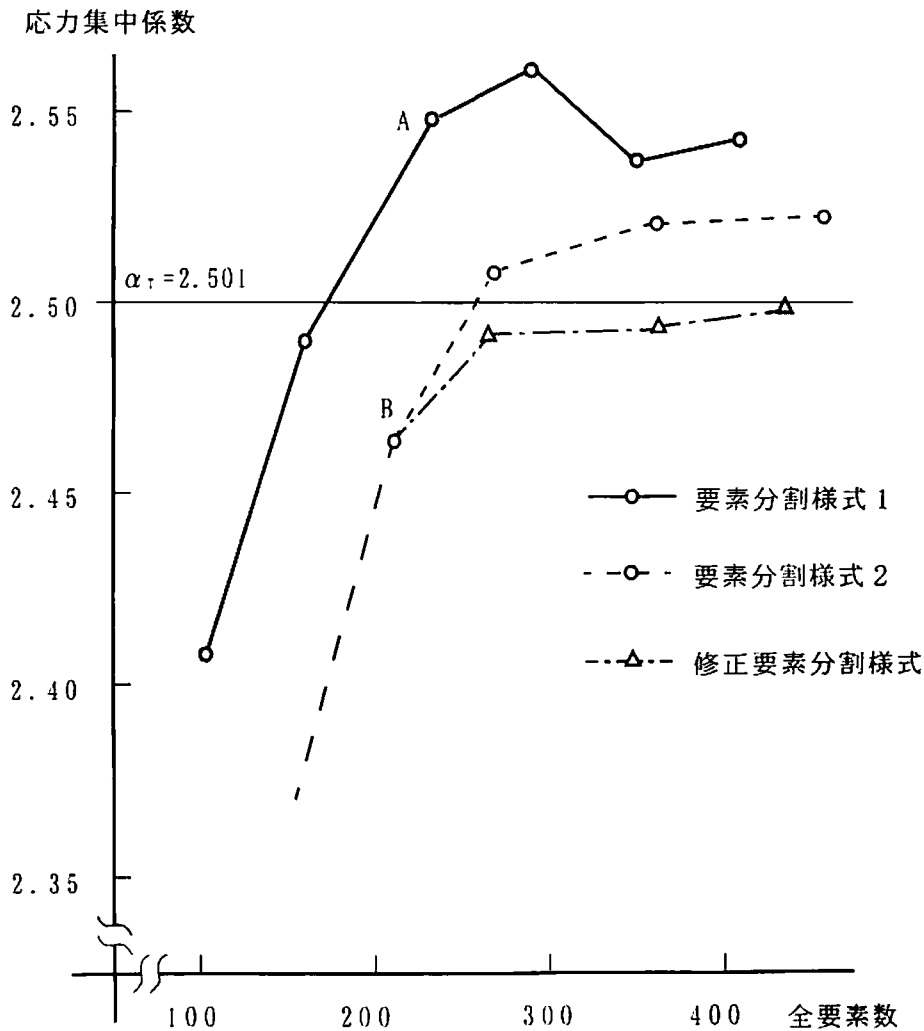


図-3.15 円孔モデルの応力集中係数と要素数の関係

表-3.6 各分割方法モデルの解析結果 (応力集中係数)

解析モデル	ズーム回数				
	0	1	2	3	4
分割方法 1	2.411	2.492	2.547	2.560	2.537
分割方法 2	2.293	2.465	2.507	2.524	2.526
修正分割方法	2.187	2.465	2.493	2.495	2.497

(3) 楕円孔を持つ長方形板のズーム解析^{3,12)}

さらに応力勾配の大きい例として、長方形板の中央に楕円孔をもつ図-3.16モデルへの適用を試みた。前回同様、上下左右対称であるので、解析は1/4モデルである図-3.17について行った。

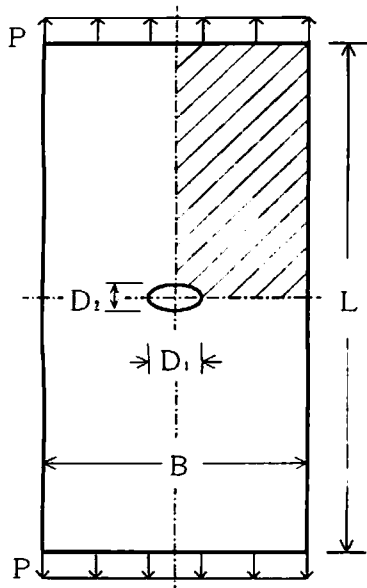


図-3.16 楕円孔をもつ平板モデル

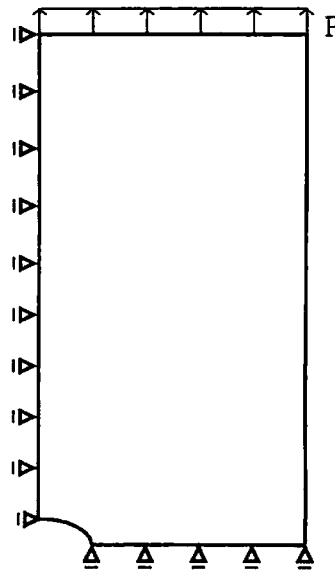


図-3.17 1/4解析モデル

表-3.7 楕円孔モデル諸元

分布荷重	P	1.0 kgf/mm
長さ	L	40.0 mm
幅	B	20.0 mm
板厚	t	1.0 mm
弾性係数	E	1.0 kgf/mm ²
ポアソン比	ν	0.3
直径	r	4.0 mm
楕円長径	D_1	4.0 mm
楕円短径	D_2	2.0 mm

モデル諸元を表-3.7に示す。微分値と解への収束状況の関係を見るために、図-3.18(a)、(b)に示すような分割形状の異なる2つの異なる要素分割様式を考える。要素分割様式1は、できるだけ等辺三角形メッシュで楕円弧に沿って滑らかに細分割していった。それに対して要素分割様式2は、偏平な三角形メッシュで途中から急に細分割を行っている。

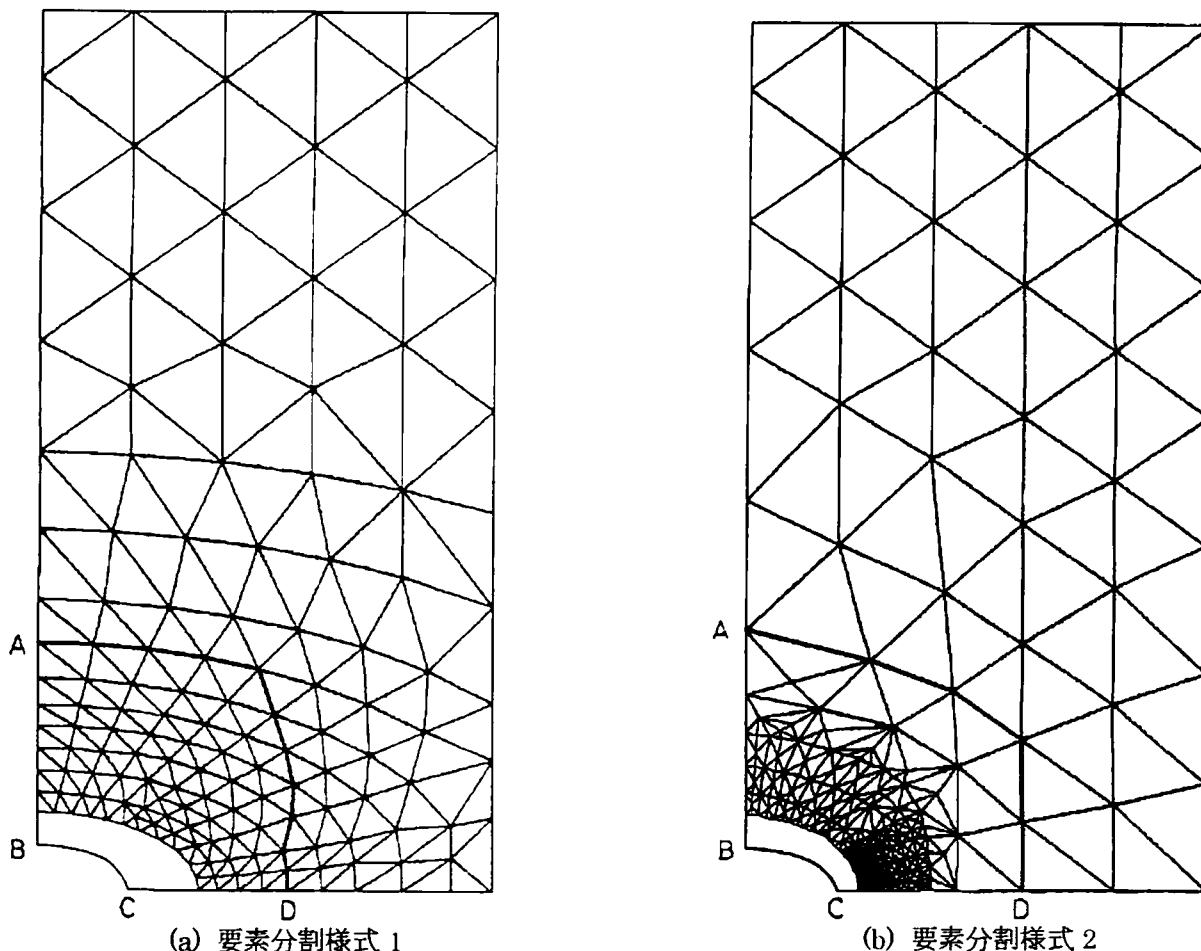
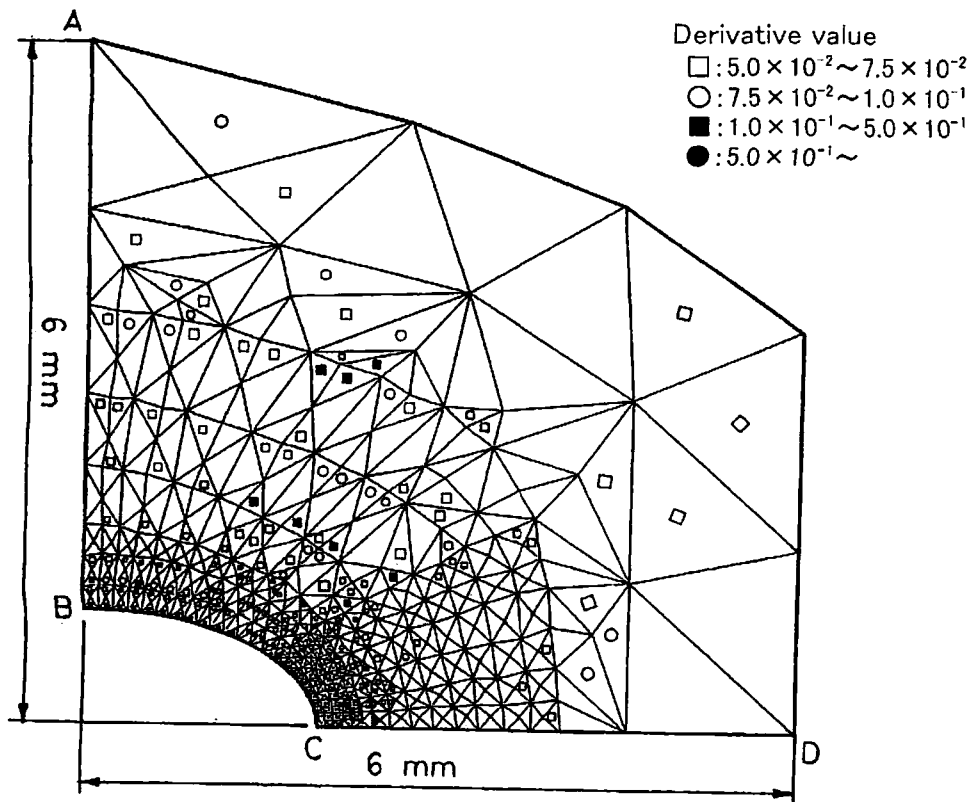


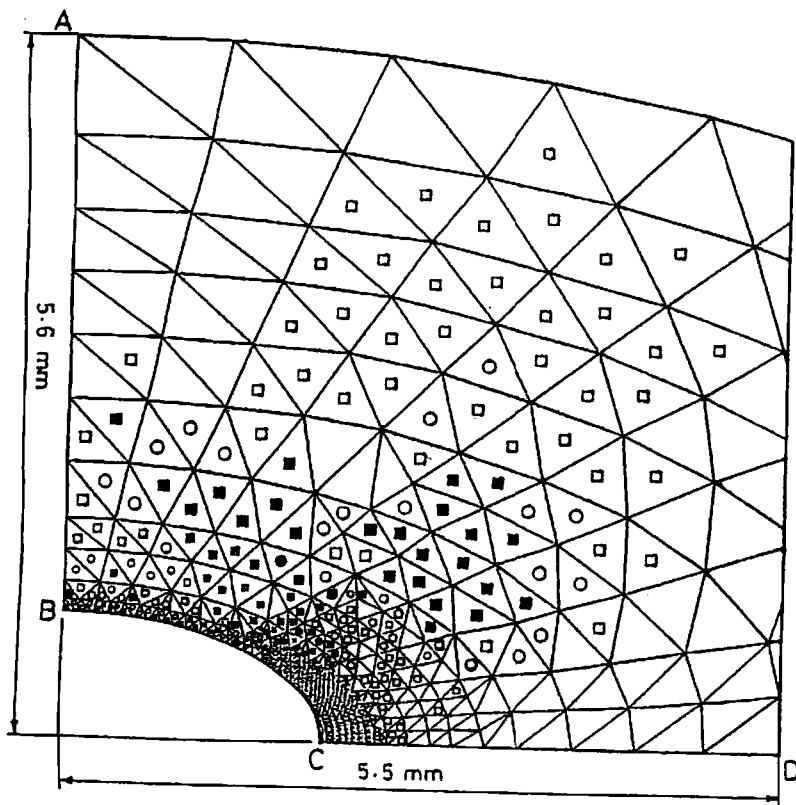
図-3.18 楕円孔モデルメッシュ図

図-3.19(a)、(b)は、要素分割様式1、2のポアソン比による応力の微分値を表示したものである。両モデルとも分割数の増加に伴い、主応力の微分値の大きなものが集中部近傍にまとまっている。メッシュの形状に関係無く小さなメッシュに分割すれば主応力の微分値は小さくなることが分る。図-3.20は、各ズーム段階での応力集中係数と要素数との関係を表したものである。いずれの要素分割様式においても応力集中係数は下方から解に滑らかに漸近している。

従って、ともかく主応力の微分値の大きなメッシュをなくすように細分割して行けば、円孔要素分割様式2でも述べたように、解は変動することなく下方から滑らかに上昇していくといえよう。しかし、得られた集中係数は要素分割様式によってかなり異なる。図-3.20に見られるように、要素分割様式1は要素数が1144にもかかわらずかなり低い値しか得られなかった。これに対して要素分割様式2は要素数約が800で十分に正解に近付いている。この違いはメッシュの分割形状の相違によって起こると考えられる。メッシュをとにかく小さく分割していけば主応力の微分値は小さくなる。メッシュを小さくするために、要素分割様式1では、2つの三角形メッシュでできる四角形を対角線で4個のメッシュに分割している。従って、かなり偏平なメッシュが多く生じている。一方要素分割様式2では、出来るだけ均等なメッシュ



(a) 要素分割様式 1



(b) 要素分割様式 2

図-3.19 主応力の微分値の分布図

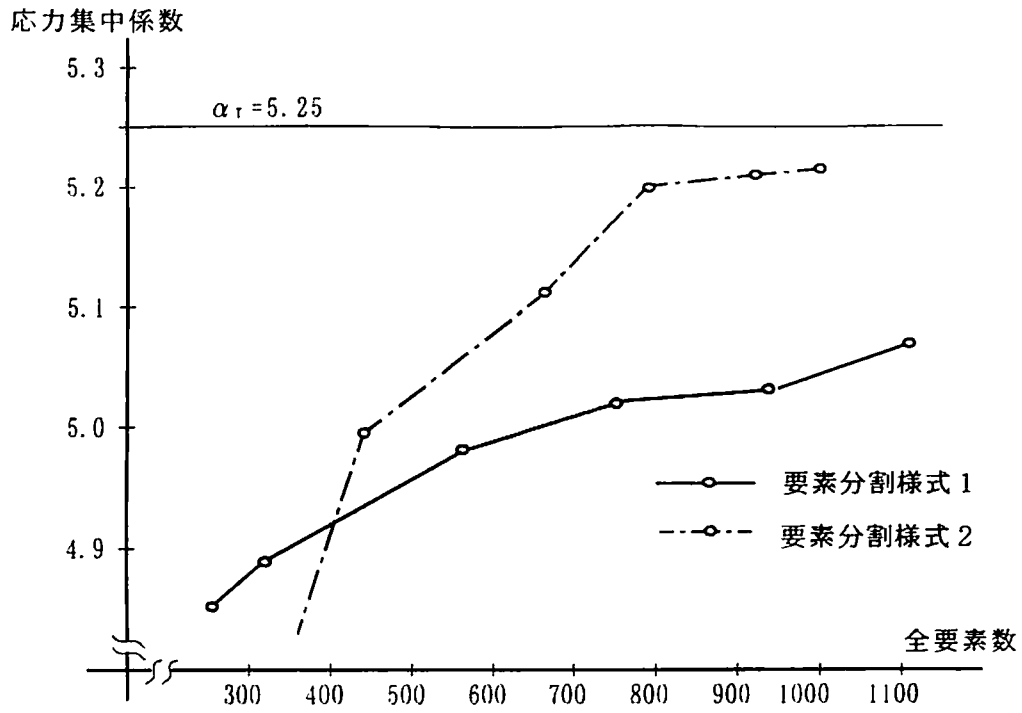
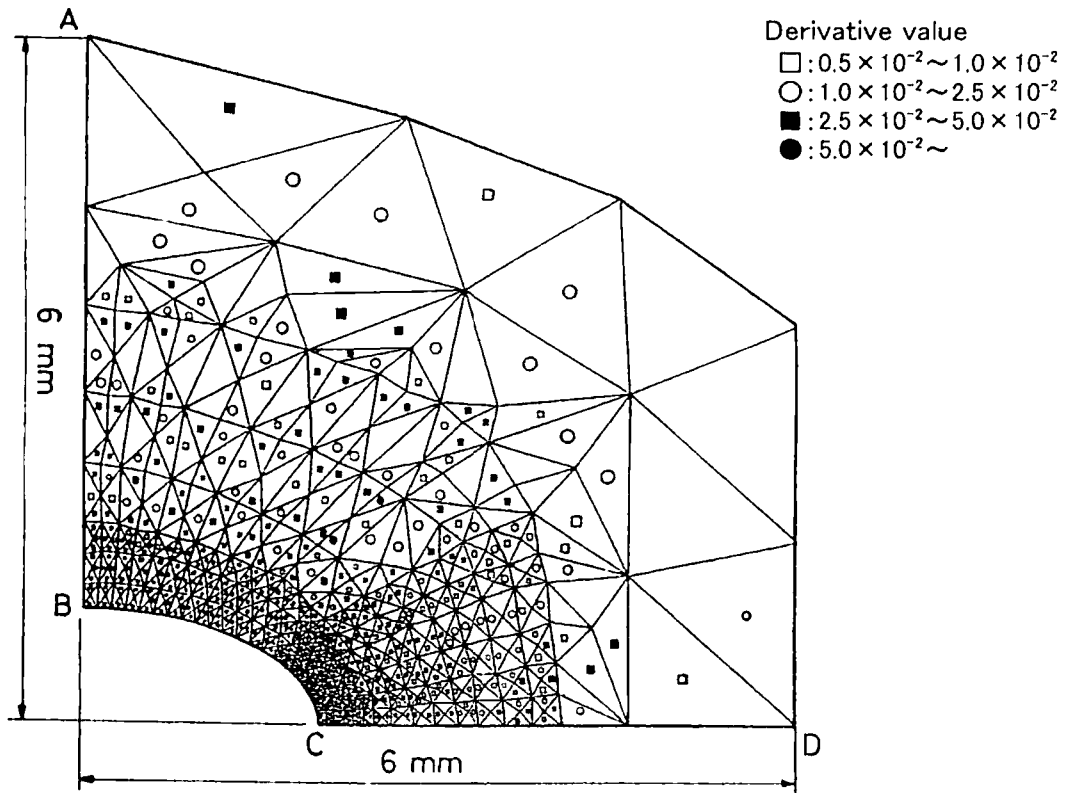


図-3.20 楕円孔モデルの応力集中係数と要素数の関係



(a) 要素分割様式 1

図-3.21 主せん断応力の微分値の分布図

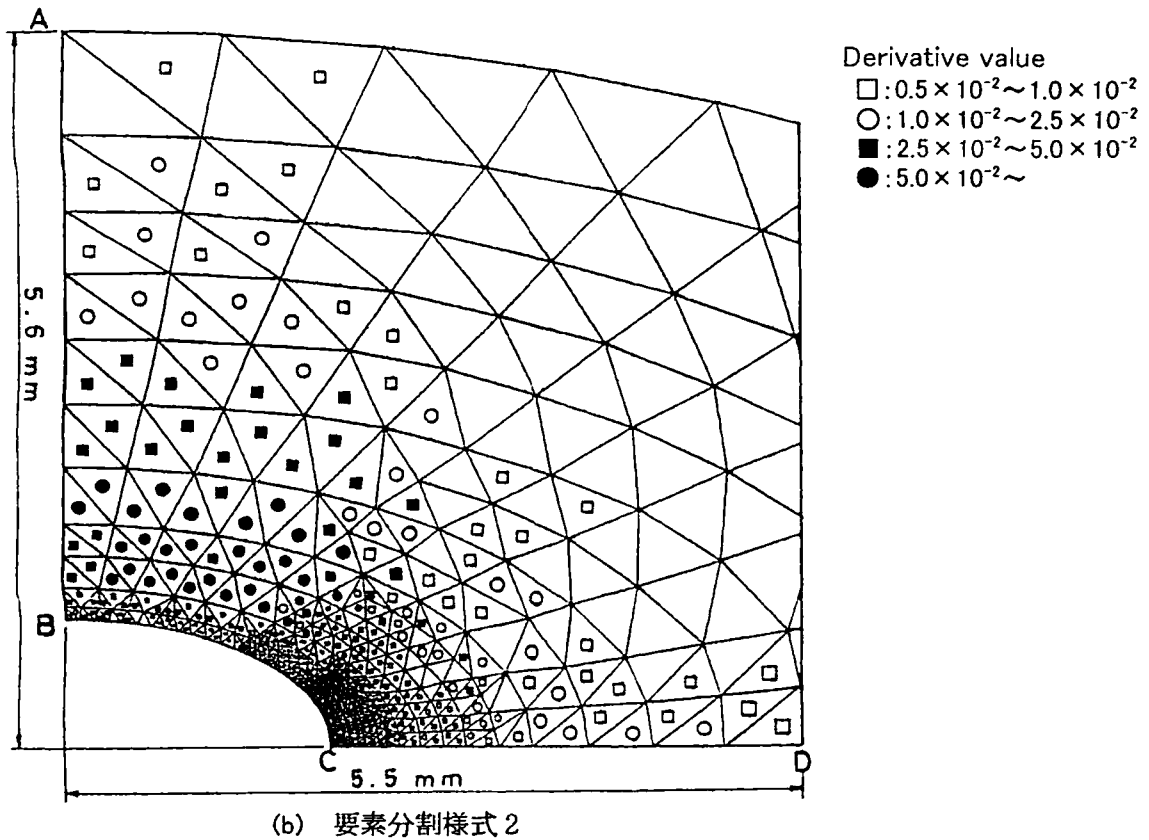


図-3.21 主せん断応力の微分値の分布図

になるよう細分割を行っている。

図-3.21はポアソン比による主せん断応力の微分値を表示したものである。要素分割様式1はせん断応力の微分値の大きな値が、偏平なメッシュ部に広く点在しているのが分かる。これに対して、要素分割様式2では集中部近傍のみに集まっている。以上のことより、主せん断応力の微分値の大小により、三角形メッシュの形状の良否は判断でき、主せん断応力の微分値が大きいメッシュが多いと応力集中が疎外され解は上昇しない。

3.5 結論

数値計算で例示したように、有限要素法において系を細分割していく際、2次元平面応力問題の応力値はポアソン比の影響を受けるが、より適性に分割されたメッシュではその影響が小さくなっていく。本章では、応力のポアソン比による微分値の大小が、メッシュの大きさ、形状の適否の一つの判定法として有効であることを示した。要素を細分割してより良い解を得るにはメッシュの大きさと同時にその形状も関係すること、その際、メッシュの大小には主応力値の微分値が、メッシュ形状の適否には主せん断応力の微分値の大小が関係することを明らかにした。数値計算結果より以下のことが判明した。

- (1) 2次元平面応力問題応力においては、応力のポアソン比による微分値の大小によりズーム領域、メッシュ形状の適否の大まかな判定は可能であり、要素内一定応力要素、高次要素に関わらず同様に適用できる。
- (2) 応力のポアソン比による微分値は、提案した両ズーム法で算定できる。しかも、ズーム法

と同様全体の再解析は必要でなく、ズーム部分のみの諸量で計算できる。従って、ズーム法解析でズームをする際、ズーム領域の判定が可能となる。

(3) 微分値の大きい要素をズーム領域外に残したまま、ズーム領域内をいかに細分割していても必ずしも良解には収束しない。これは良解を得るために少なくとも満足すべき必要条件である。

(4) ズーム領域内外において、主応力の微分値、主せん断応力の微分値が小さくなるようなメッシュ分割を行えば、下限から良解に近づく。

以上のことより、提案法は、細分割すべき領域の判定並びに得られた解が適性かどうかの判定に役立つ手法であると言えよう。

参考文献

- 3-1) 鷲津久一郎, 宮本博, 山田嘉昭, 山本善之, 川本忠彦: 有限要素法ハンドブック I 基礎編, pp. 77~83, 1981
- 3-2) K. J. Bathe and E. L. Wilson(菊地文雄訳): 有限要素法の数値計算, 科学技術出版社, pp. 330~340, 1980
- 3-3) C. S. Desai and J. F. Abel(山本善之訳): マトリックス有限要素法, 科学技術出版, 1979
- 3-4) 今村孝, 水田洋司, 平井一男, 内山義博: 応力集中部のズーム領域判定について, 土木学会第40回年次学術講演会, 1985
- 3-5) I. Hirai, Y. Uchiyama, Y. Mizuta, D. Pilkey: An Exzct Zooming Method, Finite Elements in Analysis and Design 1, pp. 61~69, 1985
- 3-6) 内山義博, 水田洋司, 平井一男: 効果的なズーム法, 八代高専紀要, 第12号, pp. 27~32, 1990
- 3-7) 内山義博, 水田洋司, 平井一男: FEM修正ズーム法による計算効率化について, 土木構造・材料論文集第11号, pp. 121-126, 1995
- 3-8) 水田洋司, 内山義博, 平井一男: 2次元の応力集中問題に及ぼすポアソン比の影響, 八代高専紀要第8号, pp. 59-63, 1986
- 3-9) 内山義博, 水田洋司, 平井一男: 境界要素法による応力集中問題の一解析法, 八代高専紀要第8号, pp. 73-77, 1986
- 3-10) Y. Uchiyama, T. Yamao, Y. Mizuta and I. Hirai: An Effective Zooming Method Considering Zooming Area, Proc. of 6th International Conference on Steel & Space Structures, pp. 117-124, 1999
- 3-11) 西田正孝: 応力集中, 森北出版, 1978
- 3-12) 右田隆雄, 平井一男, 水田洋司, 内山義博: 2次元応力集中問題のメッシュ分割について, 土木学会第41回年次学術講演会, 1986
- 3-13) Holand, I. and K. Bell: Finite element method in stress analysis, Technical University of Norway, pp. 101, 1969

第4章 相似メッシュを用いた解析

4.1 概説

近年、計算機性能の発展は目ざましく、計算時間の高速化、計算機容量の増大とパソコン程度の計算機でも、大容量を必要とするような問題の解析が可能になってきている。それにもかかわらず、有限要素法や境界要素法での解析において、より良解を得ようとすれば容量不足や計算時間の増大という問題が起ることは否めない。従って、さらに大規模の系を解析する場合、いくつかの部分構造に分割し解析するサブストラクチャー法^(4.1)やブロック対角化法^(4.2)、より効率のよいメッシュを用いる等^(4.3)の方策が考えられている。

一般に、解析する系が大規模になるほど、その大部分は規則性のあるメッシュ分割が可能である。この場合、メッシュ分割が等分割や相似分割のように規則的に行えない部分は、ズーム法^(4.3, 4.4)などと結合して解くとすると、部分構造の大部分は均等あるいは規則性のあるメッシュ分割部の解析となる。従って、この規則性のある部分の剛性方程式をいかに効果的に解くかは、系の効率的な解析に大きく影響する。

本章では、有限要素法解析において相似形メッシュで分割された系の剛性マトリックスの特性に着目、その特性を生かして剛性マトリックスの縮合を効率よく行う手法について述べる。系が相似メッシュで構成されているならば、各要素の剛性マトリックスは互いに相似比の関係にあり、その相似比を考慮すれば、一部の要素の剛性マトリックスで全体の剛性マトリックスは表せる。特に、2次元弾性問題においては、相似比に無関係に剛性マトリックスは同一となり均等メッシュと同様な扱いが可能となる。

この特性を考慮すると剛性マトリックスの縮合において、節点消去の順番を配慮すれば全体の剛性マトリックスを扱うことなく一部の剛性マトリックスのみの取り扱いで済み、しかも消去・縮合を直接行うよりもはるかに少ない回数で計算できることになる。また、系の一部で要素剛性が変化するなど、相似性が壊れた修正系においても修正部のみの取扱で解析が可能な事を示す。最後に、具体的な数値計算を通して手法の適用範囲を明確にする。

4.2 効率的な縮合法と相似メッシュ系

4.2.1 効率的な縮合法^(4.1)

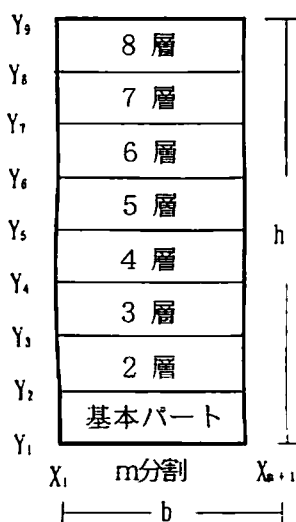


図-4.1 原系

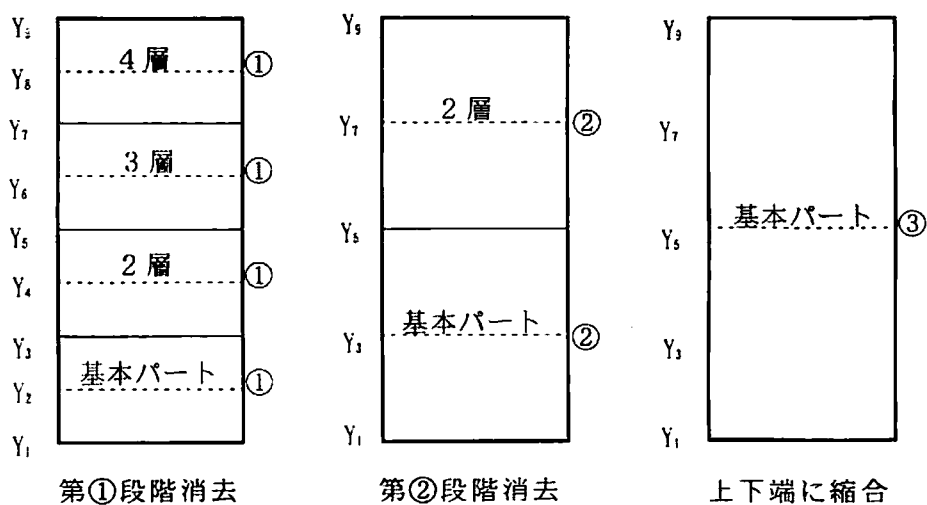
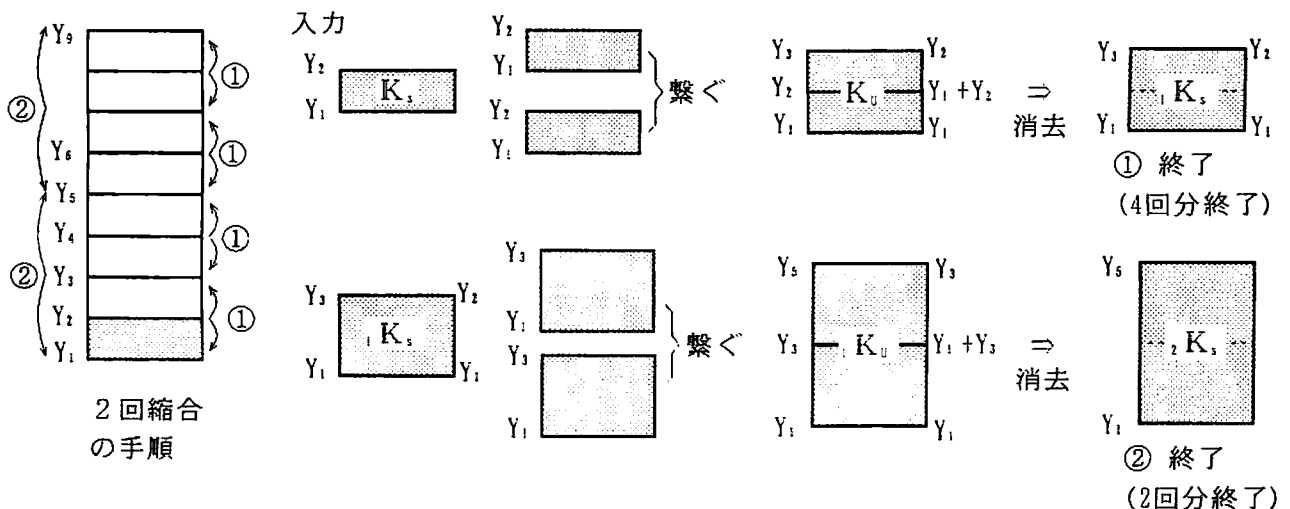


図-4.2 内部行の消去・縮合

ここでは、図-4.1に示すような均等メッシュで横 m 分割、縦8分割された長方形板を例として、均等メッシュよりなる系の剛性マトリックスの上下端への縮合は、以下のような手順を用いれば効率的に行えることを示す。最下層を基本パートとすると、縦8パートは均等であるから各パートは基本パートと同じ剛性マトリックスであり、基本パートの剛性マトリックスを基本マトリックス K_s とするとその重ね合わせで系全体の剛性マトリックスは作成できる。今、内部行 $Y_3 \sim Y_6$ 行をすべて消去して上下行 Y_1, Y_7 への縮合を行う。まず第一段階として偶数行を消去して縮合する。次に第2段階としてその偶数行を同様に消去・縮合する。以下同様にして一行おきに消去と縮合の演算を繰り返せば上下に縮合された剛性マトリックスは得られる。

図-4.2に各段階での消去・縮合の状況を示す。図より第1段階は4回の消去・縮合演算が必要であるが、4層とも同一マトリックス(①部)であるので1回だけ消去・縮合を行えばよく、しかも縮合されたマトリックスは、第2段階の基本マトリックスとなる。第2段階でも②部は同一マトリックスであり、やはり1回の消去・縮合を行えばよく、縮合されたマトリックスが、第3段階の基本マトリックスとなる。

第2段階までの実際の縮合演算を図説したものが図-4.3である。即ち、基本パートの K_s を作成、それを重ね合わせたユニットパートのユニットマトリックス K_u を作成し、第2行を消去・縮合すれば次の段階の K_s となる。以上を必要な回数繰り返せば上下端に縮合された剛性マトリックスは求められることになる。



従って、内部7行の消去・縮合に対して、必要なマトリックスは各段階での基本マトリックスのみでよく、しかも3回の演算で済む事になる。各段階で偶数行を消去していくことから、縦方向は $n=2^p$ (p は正の整数)と2の累乗で分割する必要があるが、 $n=2^p-1$ 行の消去に対して p 回の演算で済み、系が大きくなるほど計算機容量、計算時間の低減効果が期待できる。

4.2.2 相似メッシュ系の剛性マトリックス

一様な厚さ及び材質の板について、板が長方形板ならば均等なメッシュで分割することが可能であり、剛性マトリックスも同じ要素が並ぶ。一方、形状が台形とか円盤の場合は均等に分割出来ないが、相似形メッシュで分割することは可能であり、特に、平面応力問題では相似形メッシュであればやはり剛性マトリックスは同じ要素が並ぶ。例えば図-4.4でA部とB部が相似であれば、A部とB部の剛性マトリックスは全く同じであり、A部、即ち基本パートの剛性

マトリックスを2つ重ね合わせれば全体の剛性マトリックスとなる。このとき相似形の条件としては、相似比を r とすると、 $b_1/b_0 = b_2/b_1 = h_2/h_1 = r = \text{一定}$ となるように分割すればよい。また、図-4.5に示すような3次元要素の場合も、B部の剛性マトリックスは、単に rK_s とA部 K_s の相似比倍で表せる。従って、相似メッシュで分割できれば、分割数が増加しても全体の剛性マトリックスは基本マトリックスさえ分かっていれば、その重ね合わせで簡単に求められる。相似メッシュに分割できればよいから、平面問題では図-4.6のような形状などにも適用可能である。

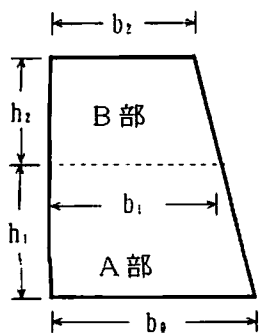


図-4.4 平面問題
相似形メッシュ

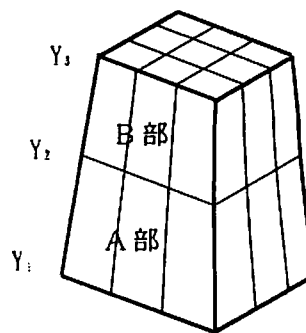


図-4.5 3次元問題
相似形メッシュ

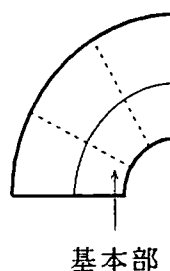
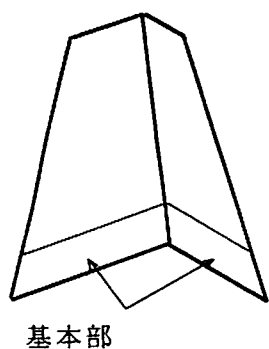


図-4.6 相似系の例

4.3 相似メッシュ系の効率的な縮合法^(4.3)

4.3.1 平面問題への適用

いま、横方向m分割、縦方向n分割された図-4.7の系相似系モデルについて、上下端 Y_{n+1} 、 Y_1 行への消去・縮合を考える。ただし、各段階で偶数行を消去していくことから、縦方向分割数nは、 $n=2^p$ （pは正の整数）と2の累乗とする。図-4.7より下2層を取り出した系、図-4.8をユニットパートと呼ぶ。

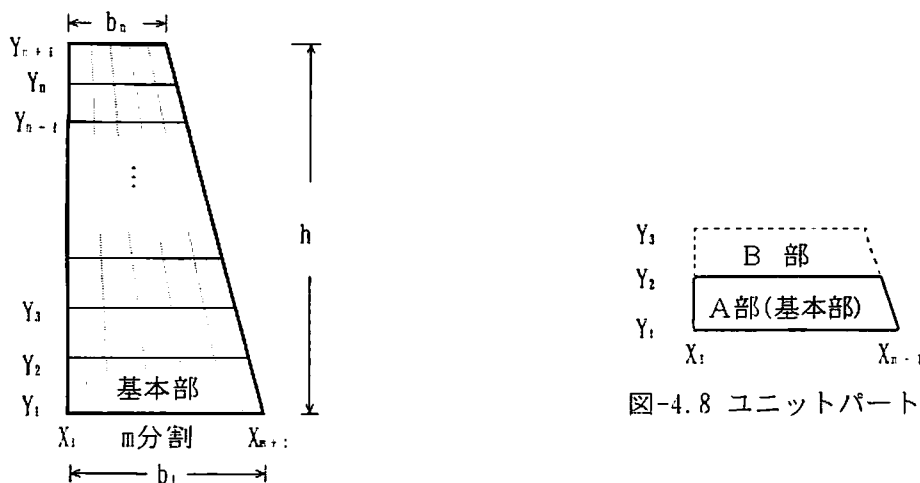


図-4.7 相似系モデル

図-4.8A部の基本マトリックス K_s は次式で表される。

$$K_s = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

ここで、下添字は Y_1 行、 Y_2 行にそれぞれ対応するものとする。また、B部の剛性マトリックスはA部と同一であるので、両者を重ね合わせればユニットパート全体の剛性方程式が、次式のように表される。

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & 0 \\ K_{21} & \bar{K}_{22} & K_{12} \\ 0 & K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix} \quad (4.2)$$

ただし、 $\bar{K}_{22} = K_{11} + K_{22}$ であり、 u 、 F はそれぞれ対応する節点変位、節点荷重である。同様に図-4.7に示す系の2層～n層はA部の剛性マトリックスと同じであり、 $Y_1 \sim Y_{n+1}$ 行に対応する節点変位を $u_1 \sim u_{n+1}$ 、節点荷重を $F_1 \sim F_{n+1}$ とすると、式(4.1)より全体剛性方程式は次のようなバンドマトリックスとなる。

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ K_{21} & \bar{K}_{22} & K_{12} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & K_{21} & \bar{K}_{22} & K_{12} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_{21} & \bar{K}_{22} & K_{12} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K_{21} & \bar{K}_{22} & K_{12} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & K_{12} & \bar{K}_{22} & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \bar{K}_{22} & K_{12} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ \cdots \\ u_n \\ u_{n+1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \\ \cdots \\ F_n \\ F_{n+1} \end{Bmatrix} \quad (4.3)$$

これらを展開して、消去・縮合を行う。まず、第1段階の縮合を行う。

式(4.3)の第2行より u_2 は

$$u_2 = -\bar{K}_{22}^{-1}(K_{21}u_1 + K_{12}u_3 - F_2) \quad (4.4)$$

第1行へ代入すると

$$(K_{11} - K_{12}\bar{K}_{22}^{-1}K_{21})u_1 - K_{12}\bar{K}_{22}^{-1}K_{12}u_3 = F_1 - K_{12}\bar{K}_{22}^{-1}F_2 \quad (4.5)$$

第4行より u_4 を求め、 u_2 と共に第3行へ代入すると

$$\begin{aligned} -K_{21}\bar{K}_{22}^{-1}K_{21}u_1 + (\bar{K}_{22} - K_{21}\bar{K}_{22}^{-1}K_{12} - K_{12}\bar{K}_{22}^{-1}K_{21})u_3 - K_{12}\bar{K}_{22}^{-1}K_{12}u_4 \\ = F_3 - K_{21}\bar{K}_{22}^{-1}F_2 - K_{12}\bar{K}_{22}^{-1}F_4 \end{aligned} \quad (4.6)$$

以下同様にして、偶数行の消去、奇数行への縮合を行うと、消去・縮合後の最下の Y_1 行と最上の Y_{n+1} 行は次式となる。

$$(K_{11} - K_{12}\bar{K}_{22}^{-1}K_{21})u_1 - K_{12}\bar{K}_{22}^{-1}K_{12}u_3 = {}_1K_{11}u_1 + {}_1K_{12}u_3 = {}_1F_1 \quad (4.7)$$

$$-K_{21}\bar{K}_{22}^{-1}K_{21}u_{n+1} + (K_{22} - K_{21}\bar{K}_{22}^{-1}K_{12})u_{n+1} = {}_1K_{21}u_{n+1} + {}_1K_{22}u_{n+1} = {}_1F_{n+1} \quad (4.8)$$

中間の Y_j 行も、同様に次式で表される。

$$\begin{aligned} -K_{21}\bar{K}_{22}^{-1}K_{21}u_{j-2} + (\bar{K}_{22} - K_{21}\bar{K}_{22}^{-1}K_{12} - K_{12}\bar{K}_{22}^{-1}K_{21})u_j - K_{12}\bar{K}_{22}^{-1}K_{12}u_{j+2} \\ = {}_1K_{21}u_{j-2} + ({}_1K_{11} + {}_1K_{22})u_j + {}_1K_{12}u_{j+2} = {}_1K_{21}u_{j-2} + {}_1\bar{K}_{22}u_j + {}_1K_{12}u_{j+2} = {}_1F_j \end{aligned} \quad (4.9)$$

ここで、 ${}_1K_{11} = K_{11} - K_{12}\bar{K}_{22}^{-1}K_{21}$

$${}_1K_{12} = -K_{12}\bar{K}_{22}^{-1}K_{12} = {}_1K_{21}^T$$

$${}_1K_{22} = K_{22} - K_{21}\bar{K}_{22}^{-1}K_{12}$$

$${}_1\bar{K}_{22} = {}_1K_{11} + {}_1K_{22}$$

$${}_1F_1 = F_1 - K_{12}\bar{K}_{22}^{-1}F_2$$

$${}_1F_{n+1} = F_{n+1} - K_{21}\bar{K}_{22}^{-1}F_n$$

$${}_1F_j = F_j - K_{21}\bar{K}_{22}^{-1}F_{j-1} - K_{12}\bar{K}_{22}^{-1}F_{j+1}$$

(4.10)

である。従って、偶数行縮合後の1回目の剛性マトリックス ${}_1K$ 、荷重項 ${}_1F$ は、式(4.1)の基本剛性マトリックス K_{11} 、 K_{12} 、 K_{21} 、 K_{22} で表され、剛性方程式は次式となる。

$$\begin{bmatrix} {}_1K_{11} & {}_1K_{12} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ {}_1K_{21} & {}_1\bar{K}_{22} & {}_1K_{12} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & {}_1K_{21} & {}_1\bar{K}_{22} & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & {}_1\bar{K}_{22} & {}_1K_{12} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & {}_1K_{21} & {}_1K_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_3 \\ u_5 \\ \cdots \\ u_{n+1} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}_1F_1 \\ {}_1F_3 \\ {}_1F_5 \\ \cdots \\ {}_1F_{n+1} \\ {}_1F_{n+1} \end{pmatrix} \quad (4.11)$$

第二段階の消去・縮合は、縮合された Y_1 、 Y_3 行よりなる部分を新しい基本部とすると、基本剛性マトリックスの要素は先に得られた ${}_1K_{11} \sim {}_1K_{22}$ であり、それを重ね合わせて図-4.8のユニットパートのマトリックスを作成、 Y_2 行を消去・縮合すれば、必要な ${}_2K_{11} \sim {}_2K_{22}$ が得られるので、これらを重ね合わせれば第二段階の縮合マトリックスとなる。

以下同様に消去・縮合を p 回繰り返せば上下に縮合された剛性マトリックスを求めることができる。また荷重項についても式(4.10)より、同様に計算すれば、縮合された剛性方程式が求

められる。以上、荷重項も考慮するために系全体の剛性方程式を用いて式の誘導を行った。

剛性マトリックスの消去・縮合にのみ着目した演算を図-4.9に示す。図は、縦8分割モデルを例とした内部行の消去・縮合手順である。B、Cが各段階でのユニットマトリックスであり、各段階で必要な剛性マトリックスは、A、 \bar{B} 、 \bar{C} の基本部マトリックスのみでよい。得られた \bar{D} マトリックスが上下端へ縮合されたマトリックスである。つまり、基本マトリックスを作成、重ね合わせて得られたユニットマトリックスの第2行目を消去・縮合すれば、これが次段階の基本マトリックスとなる。

従って、一般にj段階での剛性マトリックスの消去・縮合演算は、次のようになる。j-1段階での基本マトリックス ${}_{j-1}K_s$ は

$${}_{j-1}K_s = \begin{bmatrix} {}_{j-1}K_{11} & {}_{j-1}K_{12} \\ {}_{j-1}K_{21} & {}_{j-1}K_{22} \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

重ね合わせるにより、ユニットマトリックス ${}_jK_0$ は

$${}_jK_0 = \begin{bmatrix} {}_{j-1}K_{11} & {}_{j-1}K_{12} & 0 \\ {}_{j-1}K_{21} & {}_{j-1}\bar{K}_{22} & {}_{j-1}K_{21} \\ 0 & {}_{j-1}K_{21} & {}_{j-1}K_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & 0 \\ K_{21} & \bar{K}_{22} & K_{21} \\ 0 & K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

中央行を消去・縮合すると

$${}_jK_s = \begin{bmatrix} {}_{j-1}K_{11} & {}_{j-1}K_{12} \\ {}_{j-1}K_{21} & {}_{j-1}K_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} - K_{12}\bar{K}_{22}^{-1}K_{21} & -K_{12}\bar{K}_{22}^{-1}K_{22} \\ -K_{21}\bar{K}_{22}^{-1}K_{21} & K_{22} - K_{21}\bar{K}_{22}^{-1}K_{12} \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

ここで、 ${}_{j-1}K_{22} = {}_{j-1}K_{11} + {}_{j-1}K_{22}$ であり、式(4.14)のマトリックス要素は、Kで表現している。

以降の節では、荷重項の縮合については全く同様な演算となるので、剛性マトリックスの縮合についての誘導のみを行う。図-4.7の系は、横m、縦n(=2^p)分割であり、直接演算では、2(m+1) × (n+1)のマトリックスで、n-1回の消去・縮合を必要とするのに対し、本法では大きさ2(m+1) × 3のマトリックス、p回の消去・縮合で済むことになり、計算容量の低減、計算時間の短縮が期待できる。なお、荷重項は、各段階において全て求め、記憶しておく必要があるが、荷重はベクトルであるから、計算時間あるいは容量的にもあまり問題にならない。

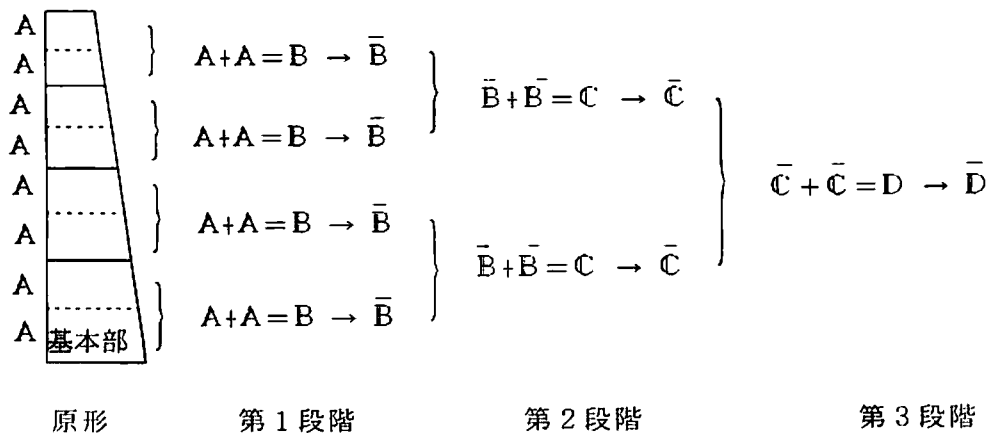


図-4.9 2次元問題内部行の消去・縮合

4.3.2 中間行節点変位の算定

中間行の節点変位が必要ならば、次のように後退代入で求められる。図-4.10aの中間行 $p-1$ 回縮合時の基本マトリックスは、次式で与えられる。

$${}_{p1}K_c = \begin{bmatrix} {}_{p1}K_{11} & {}_{p1}K_{12} \\ {}_{p1}K_{21} & {}_{p1}K_{22} \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

ここで、左下添字 $p1$ は $p-1$ 回目の消去・縮合を表す。図-4.10aの第 $p-1$ 回段階消去時の剛性方程式は、式(4.15)を重ね合わせた次式で与えられる。

$$\begin{bmatrix} {}_{p1}K_{11} & {}_{p1}K_{12} & 0 \\ {}_{p1}K_{21} & {}_{p1}\bar{K}_{22} & {}_{p1}K_{21} \\ 0 & {}_{p1}K_{21} & {}_{p1}K_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_c \\ u_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}_{p1}F_1 \\ {}_{p1}F_c \\ {}_{p1}F_{n+1} \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

但し、 ${}_{p1}\bar{K}_{22} = {}_{p1}K_{11} + {}_{p1}K_{12}$ である。また、中央 Y_c 行の節点変位である u_c は、図-4.10(a)の点線部の変位であるが、次式で求められる。

$$u_c = {}_{p1}\bar{K}_{22}^{-1} ({}_{p1}F_c - {}_{p1}K_{21}u_1 - {}_{p1}K_{12}u_{n+1}) \quad (4.17)$$

次に、中間行 $p-2$ 回縮合時の基本部の剛性マトリックス ${}_{p2}K_c$ は、式(4.15)で下添字を $p2$ に変更すればよく、図-4.10bにおける第 $p-2$ 回段階消去系の剛性方程式は、基本剛性マトリックス ${}_{p2}K_c$ の重ね合わせで得られ、式(4.16)より次式となる。

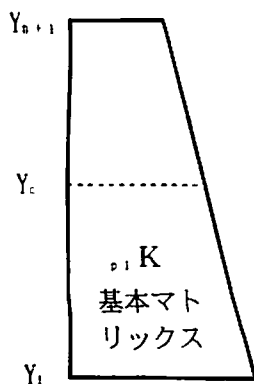
$$\begin{bmatrix} {}_{p2}K_{11} & {}_{p2}K_{12} & 0 & 0 & 0 \\ {}_{p2}K_{21} & {}_{p2}\bar{K}_{22} & {}_{p2}K_{21} & 0 & 0 \\ 0 & {}_{p1}K_{21} & {}_{p2}\bar{K}_{22} & {}_{p2}K_{12} & 0 \\ 0 & 0 & {}_{p2}K_{21} & {}_{p2}\bar{K}_{22} & {}_{p2}K_{12} \\ 0 & 0 & 0 & {}_{p2}K_{21} & {}_{p2}K_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_{n1} \\ u_c \\ u_{n2} \\ u_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}_{p2}F_1 \\ {}_{p2}F_{n1} \\ {}_{p2}F_c \\ {}_{p2}F_{n2} \\ {}_{p2}F_{n+1} \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

これより、 Y_{n1} 、 Y_{n2} 行の未知節点変位 u_{n1} 、 u_{n2} は、その上下行の変位を用いて

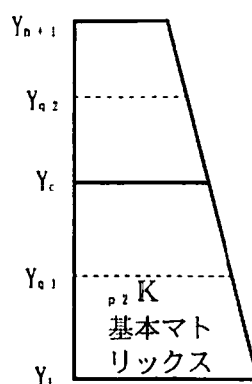
$$u_{n1} = {}_{p2}\bar{K}_{22}^{-1} ({}_{p2}F_{n1} - {}_{p2}K_{21}u_1 - {}_{p2}K_{12}u_c) \quad (4.19)$$

$$u_{n2} = {}_{p2}\bar{K}_{22}^{-1} ({}_{p2}F_{n2} - {}_{p2}K_{21}u_c - {}_{p2}K_{12}u_{n+1})$$

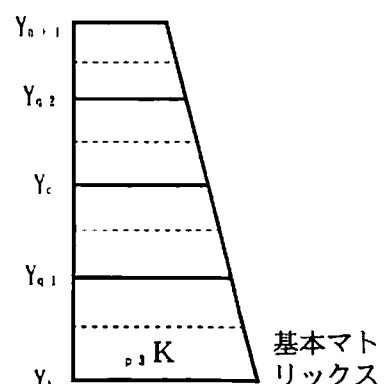
となる。 $p-3$ 段階変位は図-10(c)点線部の変位でありその上下行の変位を用いて同様に求められる。



(a) 第 $p-1$ 段階消去



(b) 第 $p-2$ 段階消去



(c) 第 $p-3$ 段階消去

図-4.10 後退代入

上記では、基本部剛性マトリックスの重ね合わせで作成した剛性方程式を用いたが、式(4.15)、(4.16)あるいは、図-4.10より分るように、中間節点変位の算定に必要な諸量は、各消去段階での基本部剛性マトリックスと、その時の上下行の節点変位のみである。以下、同様に繰り返してけば、全体の節点変位は算定できる。

一般に、j 段階消去時の i 行節点変位は、j 段階での上下行の節点変位 u_{i+1} 、 u_{i-1} と j-1 段階での基本剛性マトリックスを用いて次式で表される。

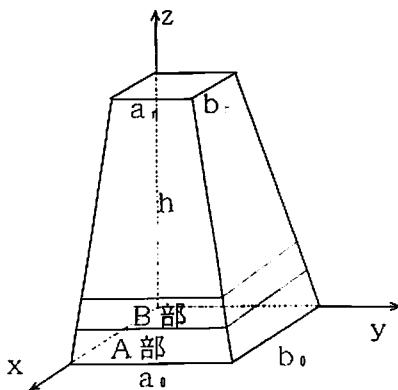
$$u_i = -{}_{i-1}\bar{K}_{22}^{-1}({}_{i-1}F_{i-1} - {}_{i-1}K_{21}u_{i-1} - {}_{i-1}K_{12}u_{i+1}) \quad (4.20)$$

4.3.3 立体問題への適用

3次元においては、相似メッシュで分割された系の任意の剛性マトリックスは、基本剛性マトリックスの相似比 r の累乗倍で表される。図-4.11に3次元モデルを示す。2次元同様、縦方向8分割、内部7行の消去・縮合手順を図-4.11に示す。最下層をサブパートとすると、上7層の各マトリックスはサブパートのサブマトリックス K_s の累乗、 $K_2 = rK_s$ 、 $K_3 = r^2K_s$ 、... $K_8 = r^7K_s$ であり、全体の剛性マトリックスはこれらの重ね合わせで得られる。

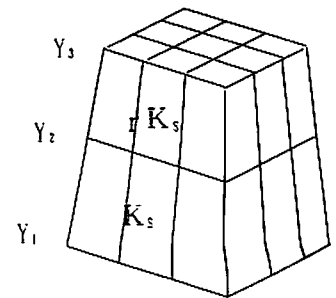
$$K = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & u_6 & u_7 & u_8 & u_9 \\ K_{11} & K_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ K_{21} & \bar{K}_{22} & rK_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & rK_{21} & rK_{22} & r^2\bar{K}_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2K_{21} & r^2\bar{K}_{22} & r^3K_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^3K_{21} & r^3\bar{K}_{22} & r^4K_{12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r^4K_{12} & r^4\bar{K}_{22} & r^5K_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & r^5K_{21} & r^5\bar{K}_{22} & r^6K_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & r^6K_{21} & r^6\bar{K}_{22} & r^7K_{12} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & r^7K_{21} & r^7\bar{K}_{22} \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

ここで、 $K_{22} = K_{11} + rK_{22}$ である。



(a) 立体モデル

$$\begin{aligned} \frac{a_1}{a_0} &= \frac{b_1}{b_0} = r_0 \\ r &= \sqrt[3]{a_1/a_0} ; e = \frac{1-r}{1-r^8} h \\ a_j &= a_0 r^{j-1}, b_j = b_0 r^{j-1} \\ h &= e \sum_{m=0}^{j-1} r^m \end{aligned}$$



(b) 3次元問題
ユニットパート

図-4.11 3次元モデル

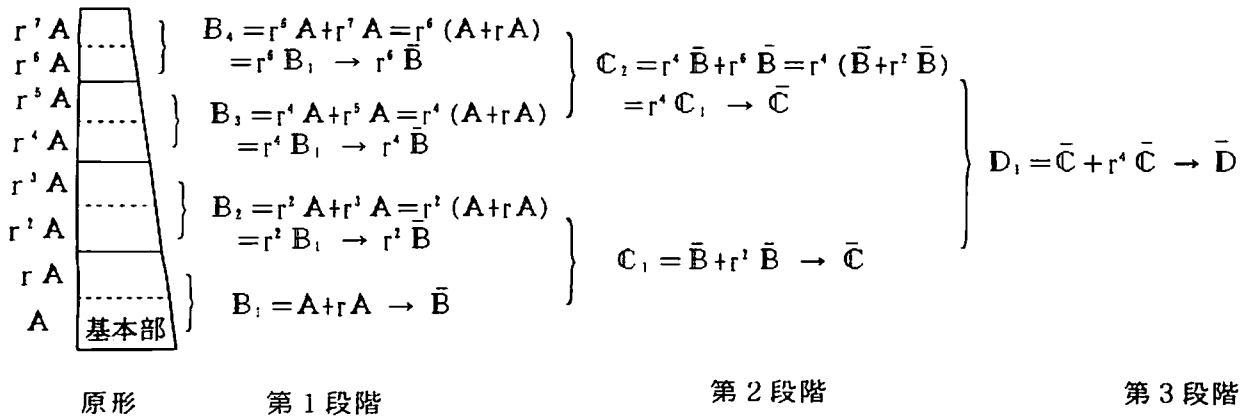


図-4.12 立体解析での内部行の消去・縮合

2次元問題と同様、常に偶数行から消去・縮合を行えばよいが、2次元と異なるのは相似比の累乗が関係することである。しかし、次の様な操作により、2次元同様に上下端への縮合マトリックスは計算できる。図-4.12に示すように、原形で基本部の剛性マトリックスをAとすると、j層のマトリックスは $r^{j-1}A$ で表される。

第一段階での縮合ユニットの剛性マトリックスがB、中央行消去・縮合したマトリックスが \bar{B} であり、この \bar{B} を次段階の基本マトリックス K_2 として、C作成→消去・縮合して \bar{C} 作成、 \bar{C} を次の K_3 としてD作成→消去・縮合して \bar{D} 作成と3回繰り返せば得られた \bar{D} マトリックスが中間行を全て消去、上下行に縮合されたマトリックスとなる。

この時、各演算に必要なマトリックスは各段階での基本部のマトリックスのみでよく、これに相似比の逆数rの累乗倍したものを加え縮合ユニットの剛性マトリックス $K_j (=K_j + r^j K_j)$ を作成、次々と消去・縮合を繰り返していけば、上下端に縮合されたマトリックスは得られる。

マトリックス演算で表すと、基本部マトリックスは

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = K_1 \quad (4.22)$$

K_1 をr倍して重ね合わせると、ユニットマトリックスは

$$B = A + rA = \begin{bmatrix} Y_1 & Y_2 & Y_3 \\ A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{21} & A_{22} + rA_{11} & rA_{12} \\ 0 & rA_{21} & rA_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_1 & Y_2 & Y_3 \\ B_{11} & B_{12} & 0 \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ 0 & B_{31} & B_{33} \end{bmatrix} = {}_1K_2 \quad (4.23)$$

Bマトリックスの Y_3 行を消去・縮合すると

$$\bar{B} = \begin{bmatrix} Y_1 & Y_2 \\ \bar{B}_{11} & \bar{B}_{12} \\ \bar{B}_{21} & \bar{B}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} - B_{12} B_{22}^{-1} B_{21} & -B_{12} B_{22}^{-1} B_{23} \\ -B_{31} B_{22}^{-1} B_{21} & B_{33} - B_{31} B_{22}^{-1} B_{23} \end{bmatrix} = {}_1K_3 \quad (4.24)$$

\bar{B} マトリックスを r^2 倍して重ね合わせると

$$C = \bar{B} + r^2 \bar{B} = \begin{bmatrix} Y_1 & Y_2 & Y_3 \\ \bar{B}_{11} & \bar{B}_{12} & 0 \\ \bar{B}_{21} & \bar{B}_{22} + r^2 \bar{B}_{11} & r^2 \bar{B}_{12} \\ 0 & r^2 \bar{B}_{21} & r^2 \bar{B}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_1 & Y_2 & Y_3 \\ C_{11} & C_{12} & 0 \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ 0 & C_{31} & C_{33} \end{bmatrix} = {}_2K_4 \quad (4.25)$$

であり、以下消去・縮合、縮合ユニット作成と同様な操作を行えばよい。

一般に j 段階での、基本マトリックスとユニットマトリックスは次のように表される。

$k = 2^j$ 、 $m = k - 1$ 、 $n = m + k = 2k - 1$ 、 $p = 2^{j+1}$ 、 $q = p - 1$ と表示すると

$$K_A = {}_j K_S = \begin{bmatrix} u_1 & u_{1+1} \\ \vdots & \vdots \\ {}_j K_{11} & r^0 \cdot {}_j K_{12} \\ \vdots & \vdots \\ r^0 \cdot {}_j K_{21} & r^0 \cdot {}_j K_{22} \end{bmatrix} \quad (4.26)$$

ここで、 $j_1 = j - 1$ とおくと

$$\begin{aligned} {}_j K_{11} &= {}_{j_1} K_{11} - r^0 \cdot {}_{j_1} K_{12} \cdot {}_{j_1} \bar{K}_{22}^{-1} \cdot {}_{j_1} K_{21} \\ {}_j K_{12} &= -{}_{j_1} K_{12} \cdot {}_{j_1} \bar{K}_{22}^{-1} \cdot {}_{j_1} K_{22} = {}_j K_{21} \\ {}_j K_{22} &= {}_{j_1} K_{22} - r^0 \cdot {}_{j_1} K_{21} \cdot {}_{j_1} \bar{K}_{22}^{-1} \cdot {}_{j_1} K_{12} \\ {}_j K_{21} &= {}_{j_1} K_{21} + r^0 \cdot {}_{j_1} K_{11} \end{aligned} \quad (4.27)$$

B部マトリックスは、 $K_B = r^k \cdot {}_j K_S$ であるから、ユニットマトリックス K_U は、

$${}_j K_U = (1+r^k) \cdot {}_j K_S = \begin{bmatrix} {}_j K_{11} & r^0 \cdot {}_j K_{12} & 0 \\ r^0 \cdot {}_j K_{21} & r^0 \cdot {}_j K_{22} + r^k \cdot K_{11} & r^0 \cdot {}_j K_{12} \\ 0 & r^0 \cdot {}_j K_{21} & r^0 \cdot {}_j K_{22} \end{bmatrix} \quad (4.28)$$

なお、 ${}_j K_U$ の K_{22} は

$$K_{22} = r^k \cdot {}_j K_{22} + r^k \cdot K_{11} = r^k ({}_j K_{22} + r^0 \cdot {}_j K_{11}) = r^k \cdot {}_j \bar{K}_{22} \quad (4.29)$$

となり、式(4.21)の主対角要素である。

4.3.4 曲げを受ける棒材への適用

曲げせん断を受ける棒要素を図-4.13に示す。ここで、 E はヤング係数、 I は部材の断面2次モーメントである。

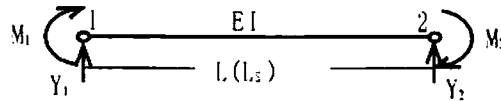


図-4.13 棒要素

要素の外力-変位関係は、剛性マトリックスを用いて次式で表される。

$$\begin{Bmatrix} Y_1 \\ M_1 \\ Y_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} = EI \begin{bmatrix} \frac{12}{L^3} & -\frac{6}{L^2} & -\frac{12}{L^3} & -\frac{6}{L^2} \\ -\frac{6}{L^2} & \frac{4}{L} & \frac{6}{L^2} & \frac{2}{L} \\ -\frac{12}{L^3} & \frac{6}{L^2} & \frac{12}{L^3} & \frac{6}{L^2} \\ -\frac{6}{L^2} & \frac{2}{L} & \frac{6}{L^2} & \frac{4}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \quad (4.30)$$

相似メッシュ系の特性を活かした縮合を行うには、基本マトリックスの係数倍で他のマトリックスが表せること、ユニットパートのユニットマトリックスの係数倍で他のパートのマトリックスが表されること、ユニットマトリックスの縮合マトリックスの係数倍で他のパートの縮合マトリックスが表されることが必要である。

そのために、次のように剛性マトリックスを無次元化しておく。上式1,2行をを展開し、

$$\rho = EI / L^3 \text{ をくくり出すと}$$

$$Y_1 = \rho (12v_1 - 6L_s\theta_1 - 12v_2 + 6L_s\theta_2) \quad (4.31)$$

$$M_1/L_s = \rho (-6v_1 + 4L_s\theta_1 + 6v_2 + 2L_s\theta_2)$$

従って、 $\bar{M} = M/L_s$ 、 $\bar{\theta} = L_s\theta$ とおくと、式(4.30)は無次元化され次式となる。

$$\begin{Bmatrix} Y_1 \\ \bar{M}_1 \\ Y_2 \\ \bar{M}_2 \end{Bmatrix} = \rho \begin{bmatrix} 12 & -6 & -12 & -6 \\ -6 & 4 & 6 & 2 \\ -12 & -6 & 12 & 6 \\ -6 & 12 & 6 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \bar{\theta}_1 \\ v_2 \\ \bar{\theta}_2 \end{Bmatrix} \quad (4.32a)$$

$$F_{12} = K_s u_{12} \quad (4.32b)$$

ここで、 $F_{12} = [Y_1 \ M_1 \ Y_2 \ M_2]^T$ 、 $u_{12} = [v_1 \ \theta_1 \ v_2 \ \theta_2]^T$

テーバーを持つ片持ち梁を相似要素に n 分割した系を図-4.14に示す。相似要素の各諸量は、表に示すとおりである。梁断面は $b \times d$ の矩形とすると、任意断面での曲げ剛性は

$$\rho_k = \frac{EI_k}{L_k^3} = \frac{E}{L_k^3} \frac{bd^3}{12} = \frac{Eb}{12} \left(\frac{d_k}{L_k}\right)^3 \quad (4.33)$$

ここで、 d_k/L_k は

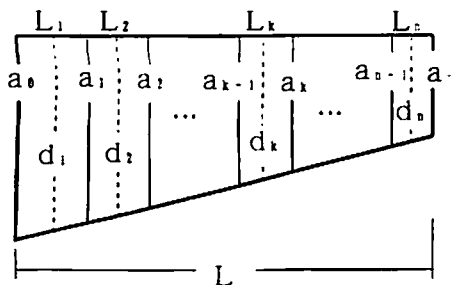
$$\begin{aligned} \frac{d_k}{L_k} &= \frac{\frac{1}{2} r^{k-1} (1+r) a_0}{r^{k-1} L_s} = \frac{\frac{1}{2} (1+r) a_0}{L_s} \\ &= \frac{1}{2} (1+r) a_0 \cdot \frac{a_0 - a_1}{a_0 (1-r) L} = \frac{1}{2} \frac{\Delta a}{L} \frac{1+r}{1-r} \end{aligned} \quad (4.34)$$

ただし、 $\Delta a = a_0 - a_1$ である。曲げ剛性は

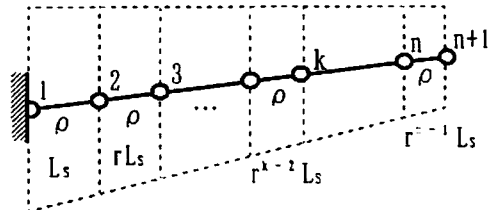
$$\rho_k = \frac{EI_k}{L_k^3} = \frac{Eb}{12} \left(\frac{1}{2} \frac{\Delta a}{L} \frac{1+r}{1-r}\right)^3 = \frac{Eb}{96} \left(\frac{\Delta a}{L} \frac{1+r}{1-r}\right)^3 = \rho = \text{一定} \quad (4.35)$$

従って、剛性マトリックス K_s は要素によらず次のように一定となる。

$$K_s = \rho \begin{bmatrix} 12 & -6 & -12 & -6 \\ -6 & 4 & 6 & 2 \\ -12 & -6 & 12 & 6 \\ -6 & 12 & 6 & 4 \end{bmatrix} \quad (4.36)$$



(a) 片持ち梁諸元



(b) 相似棒要素

$$\begin{aligned} r &= \sqrt[3]{a_0/a_1}, \quad a_k = r^k a_0, \quad d_k = \frac{1}{2} r^{k-1} (1+r) a_0 \\ L_s &= \frac{a_0 (1-r)}{a_0 - a_1} L, \quad L_k = r^{k-1} L_s \end{aligned}$$

図-4.14 片持ち梁モデル

2-3材の力-変位関係は、 $L_2 = r L_3$ 、 $M_2 = M_3/L_2$ より

$$Y_2 = \rho_2 (12 v_1 - 6 r L_3 \theta_1 - 12 v_2 - 6 r L_3 \theta_2) = \rho (12 v_1 - 6 r \theta_1 - 12 v_2 - 6 r \theta_2)$$

$$M_2/r L_3 = M_{23}/r = \rho_2 (-6 v_1 + 4 r L_3 \theta_1 + 6 v_2 + 2 r L_3 \theta_2) = \rho (-6 v_1 + 4 r \theta_1 + 6 v_2 + 2 r \theta_2)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1 \\ \bar{M}_1 \\ Y_2 \\ \bar{M}_2 \end{bmatrix} = K_5 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ \bar{\theta}_1 \\ v_2 \\ \bar{\theta}_2 \end{bmatrix} \quad (4.37)$$

つまり、 $r^{-1} F_{23} = K_5 r u_{23}$ と K_5 で表された。これより

$$F_{23} = r K_5 r u_{23} \quad (4.38a)$$

同様に、3-4材、4-5材、…、 $k-m$ 、… の力-変位関係は、

$$F_{34} = r^2 K_5 r^2, \quad F_{45} = r^3 K_5 r^3, \quad \dots, \quad F_{k-1,k} = r^{k-1} K_5 r^{k-1}, \quad \dots \quad (4.38b)$$

と、任意要素の剛性マトリックスは基本マトリックスと相似比の累乗で表された。

ここで、相似比マトリックスは

$$r_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r \end{bmatrix} \quad r = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r \end{bmatrix} \quad R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & r \end{bmatrix} \quad (4.39)$$

次にユニットマトリックスについて検討する。

1-2材と2-3材の剛性マトリックスを重ね合わせて

$${}_1 K_0 = K_{1,2,3} = \begin{bmatrix} K_5 & \dots \\ \dots & r K_5 r \end{bmatrix} \quad (4.40)$$

2-3材と3-4材の剛性マトリックスを重ね合わせると

$$\begin{aligned} K_{2,3,4} &= \begin{bmatrix} r^2 K_5 r^2 & \\ & r^3 K_5 r^3 \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} r^2 & & \\ & K_5 & \\ & & \dots \end{bmatrix} r^2 + \begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & r K_5 r \end{bmatrix} r^2 \right) \\ &= R^2 \left(\begin{bmatrix} K_5 & \dots \\ \dots & \dots \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & r K_5 r \end{bmatrix} \right) R^2 = R_2 \begin{bmatrix} K_5 & \dots \\ \dots & r K_5 r \end{bmatrix} R_2^T = R_2 \cdot {}_1 K_0 \cdot R_2^T \end{aligned} \quad (4.41)$$

となり、 $K_{2,3,4}$ は ${}_1 K_0$ に左右からの相似比マトリックスの積で表される。

最後に、マトリックスの縮合について検討する。ユニットパートの剛性方程式を式(4.42)で、また、 Y_2 行を消去・縮合したサブパートの剛性方程式を式(4.43)で表す。ここで、 a_{ij} は、1-2材の剛性マトリックス成分であり、 b_{ij} は、2-3材の剛性マトリックスの成分である。

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} + b_{11} & b_{12} \\ 0 & b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \quad (4.42)$$

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = {}_1K_5 u_{1,2} \quad (4.43)$$

次に、 $F_k = r_0^{-1} F_k$ 、 $\bar{u}_k = r_0^{-1} u_k$ ($k=3, 4, 5$)とおくと、3、4番目の要素よりなるユニットの剛性方程式は式(4.41)より

$$\begin{Bmatrix} \bar{F}_3 \\ F_4 \\ \bar{F}_5 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} + b_{11} & b_{12} \\ 0 & b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}_3 \\ \bar{u}_4 \\ \bar{u}_5 \end{Bmatrix} \quad (4.44)$$

となる。式(4.44)の剛性マトリックスの要素は式(4.42)と同一であるから、 Y_4 行の消去・縮合の結果は、式(4.43)と同一である。つまり

$$\begin{Bmatrix} \bar{F}_3 \\ \bar{F}_5 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}_3 \\ \bar{u}_5 \end{Bmatrix} \quad (4.45)$$

従って、 $r^{-1} \cdot F_{3,5} = {}_1K_5 \cdot r^{-1} \cdot u_{3,5}$ より $F_{3,5} = r^{-1} \cdot {}_1K_5 \cdot r^{-1} \cdot u_{3,5}$ とユニットマトリックスを縮合した ${}_1K_5$ の左右から r^{-1} 倍すれば得られる。残りのユニットの縮合マトリックスも以下のように r の累乗と ${}_1K_5$ で表される。

$$F_{5,7} = r^{-4} \cdot {}_1K_5 \cdot r^{-4} \cdot u_{5,7} \quad , \quad F_{7,9} = r^{-6} \cdot {}_1K_5 \cdot r^{-6} \cdot u_{7,9} \quad , \quad \dots \quad (4.46)$$

第2段階以降も、同様にして基本部の基本マトリックス ${}_1K_5, {}_3K_5, \dots$ でユニットマトリックス、縮合マトリックスは表す事が出来る。

4.3.5 一部修正系への適用

相似メッシュ系で、一部の要素の剛性が、例えば降伏などの理由で図-4.15(a)のように変化する場合、また最初から図-4.15(b)の様に一部剛性が付加された場合などは、相似メッシュ系ではなくなる。しかし、影響する範囲が小範囲であれば、以下に述べるように相似メッシュ系の一部修正として、影響部のみの取扱で済み、相似系の消去・縮合法が有効に使える。図-4.15(a)で、原系の剛性マトリックスを K_k 、節点変位を u_k 、節点荷重を F_k とすると、原系の剛性方程式は次式で表される。

$$K_k u_k = F_k \quad (4.47)$$

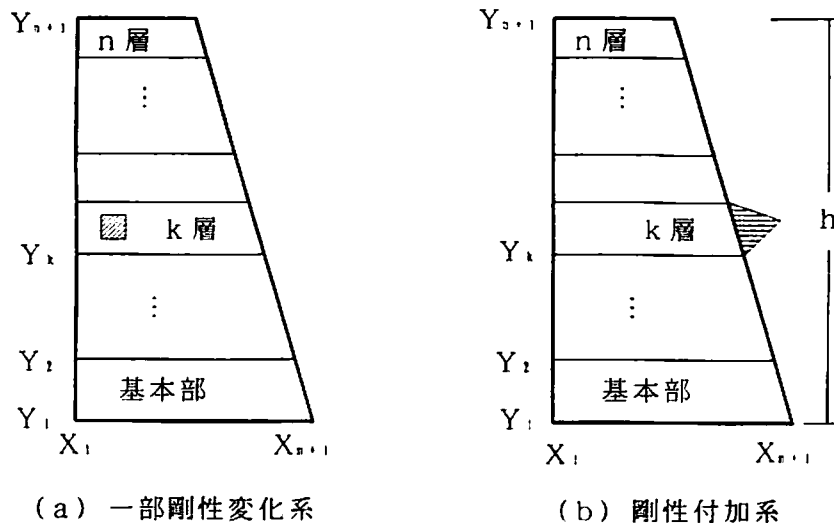


図-4.15 一部非相似を有する系

なお、前節の消去・縮合によって、原系の各段階での K_A の縮合剛性マトリックス並びに節点変位 u_A は求められているものとする。いま、図-4.154(a)のように k 層部の斜線部に剛性変化 ΔK が生じたすると、修正後の剛性マトリックスは、 $K_B = K_A + \Delta K$ に、それに伴って節点変位も u_B と変化すると考えると、修正後の剛性方程式は

$$K_B u_B = (K_A + \Delta K) u_B = F_A \quad (4.48)$$

変形すると、

$$K_A u_B = F_A - \Delta K \bar{u}_B = F_B \quad (4.49)$$

ここで、 \bar{u}_B は ΔK 部に対応する節点変位である。従って、 ΔK 部に対応する修正後の節点変位 \bar{u}_B が得られれば、原系である相似系に外力 F_B の作用する問題として、相似系の消去・縮合法が適用できる。

そこで、式(4.48)を変形すると

$$(\mathbf{I} + \mathbf{f}_A \Delta K) u_B = \mathbf{f}_A F_A = u_A \quad (4.50)$$

ここに、 $\mathbf{f}_A = K_A^{-1}$ である。 $\mathbf{f}_A \Delta K$ は、 K つまり系全体の逆マトリックスである \mathbf{f}_A を含むからこのままでは問題である。しかし、一部修正を対象にしているので、 ΔK は全体の大きさに比べ小部分であり、 \mathbf{f}_A も次に示すように ΔK に対応する小部分のみで済む。 k 層部が修正部であるから、分割マトリックスで表すと

$$\mathbf{f}_A \Delta K = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{11} & \mathbf{f}_{1k} & \mathbf{f}_{1j} \\ \mathbf{f}_{k1} & \mathbf{f}_{kk} & \mathbf{f}_{kj} \\ \mathbf{f}_{j1} & \mathbf{f}_{j1} & \mathbf{f}_{jj} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Delta K_{kk} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{f}_{1k} \Delta K & 0 \\ 0 & \mathbf{f}_{kk} \Delta K & 0 \\ 0 & \mathbf{f}_{jk} \Delta K & 0 \end{bmatrix} \quad (4.51)$$

従って、式(4.50)は、次式で表される。

$$(\mathbf{I} + \mathbf{f}_A \Delta K) u_B = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{f}_{1k} \Delta K & 0 \\ 0 & \mathbf{I} + \mathbf{f}_{kk} \Delta K & 0 \\ 0 & \mathbf{f}_{jk} \Delta K & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{B1} \\ u_{Bk} \\ u_{Bj} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{A1} \\ u_{Ak} \\ u_{Aj} \end{bmatrix} \quad (4.52)$$

故に、修正部 k に対応する節点変位 u_{Bk} は、次式で得られることになる。

$$u_{Bk} = (\mathbf{I} + \mathbf{f}_{kk} \Delta K)^{-1} u_{Ak} \quad (4.53)$$

従って u_{Bk} 、即ち式(4.49)の \bar{u}_B は、修正部 k の大きさ ΔK のマトリックス演算で求められる。また、 K_A の縮合剛性マトリックスは求められているから、 \mathbf{f}_{kk} は k 部の各点に次々と単位の節点荷重が作用するときの k 部の節点変位として、相似系の消去・縮合法で求めることができる。求めた u_{Bk} を、式(4.48)に代入すれば F_B が得られ、修正変位 u_B は相似系の消去・縮合法で計算できる。この場合の問題は、系全体に対する修正部の大きさであり、修正量の大小は問題にならない。

一方、図-4.15(b)のように、一部剛性が付加されて相似性が壊れた場合についても、 ΔK が異なるのみで上記と同様に取り扱うことが出来る。相似系部を K 、付加部を ΔK 、 $\bar{K}_{22} = K_{22} + \Delta K_{11}$ とおき、付加部が行列の最後になるように並べ替えると、剛性方程式は次式で表される。

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & 0 \\ K_{21} & \bar{K}_{22} & \Delta K_{21} \\ 0 & \Delta K_{12} & \Delta K_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} \quad (4.54)$$

これを展開し、第3式の u_3 を第2式へ代入すると

$$K_{21} u_1 + (\bar{K}_{22} - \Delta K_{12} \Delta K_{22}^{-1} \Delta K_{21}) u_2 = F_2 - \Delta K_{12} \Delta K_{22}^{-1} F_3 \quad (4.55)$$

まとめると次式となる。

$$K_{21} u_1 + (K_{22} + \Delta \bar{K}) u_2 = \bar{F}_2 \quad (4.56)$$

$$\begin{aligned} \text{ここで、} \quad \Delta \bar{K} &= \Delta K_{11} - \Delta K_{12} \Delta K_{22}^{-1} \Delta K_{21} \\ \bar{F}_2 &= F_2 - \Delta K_{12} \Delta K_{22}^{-1} F_1 \end{aligned} \quad (4.57)$$

さらに、式(4.54)の第1式とまとめると次式で表示できる。

$$(K + \Delta K) u = F \quad (4.58)$$

すなわち、付加部の影響を式(4.56)で剛性、荷重の変化として表しておけば、式(4.48)で示した剛性変化の場合と同様に取り扱うことができることになる。

4.4 数値計算結果と考察

4.4.1 はじめに

相似メッシュ系を効率的に解析できる提案法に対して、その妥当性を検討するために以下の計算をおこなう。まず、平面問題を例として、変位のチェックを行いながら提案法の計算容量、計算時間について検討する。さらにテーパ付梁について、テーパ勾配に対する応力について計算を行い、提案法の有効性について検討する。また、3次元問題、いくつかの相似メッシュ系よりなる構造物、一部修正を持つ構造に対して提案法を適用しその妥当性について検討する。

4.4.2 片持ち梁の解析

(1) 計算容量と計算時間について

相似メッシュモデルとして、図-4.16のような左端固定、右端自由で高さが変化する片持ち梁について、数値計算を行った。右自由端に鉛直荷重 $P=640\text{kgf}$ が鉛直下方向へ作用するものとし、モデル緒元は表-4.1に示す通りである。縦方向は等分割、横分割はメッシュ縦横の比が1となるように分割した。

相似メッシュの各寸法は横方向分割数 $n=2^3$ とすると、相似比 r で n 分割であるから

$$b = a r^m \text{ より } r = \sqrt[m]{\frac{b}{a}} \text{ 相似比 } r, \quad j \text{ 列目の高さ } b_j, \quad j \text{ 列目の幅 } L_j \text{ はそれぞれ} \quad (4.59)$$

$$r = \sqrt[m]{\frac{b}{a}}, \quad b_j = a r_j^m, \quad L_j = d \sum r^m \quad (m=0 \sim j-1)$$

で与えられる。ここで、 $d = (1-r)/(1-r^m)$ である。

ここでは、本解析法と他解法との比較を通して計算容量、計算時間について検討をする。比較解法としては、一般に用いられる反復法(ICCG法)⁴⁾を使って数値計算を行なった。反復法の前処理には不完全修正コレスキー分解を用い、収束判定は、相対残差ノルムで 10^{-7} とした。提案法の精度は残差ノルム⁵⁾で 10^{-9} 程度である。計算には、CPU: Intel Pentium II (266MHz)、RAM: 128Mb を搭載したパーソナルコンピュータを用い、使用言語はFortranで倍精度計算を行った。本法の適用性を調べるために、左右端寸法は固定、長さ L を4通り変化させ

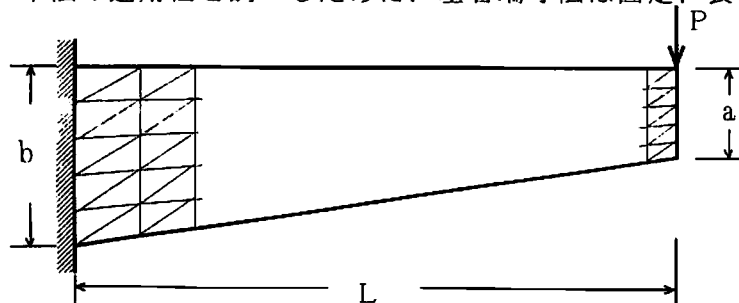


図-4.16 変断面片持ち梁

たモデルについて計算容量、計算時間の比較を行った。

表-4.2に各モデルの緒元、演算で取り扱う系の自由度、計算時間を示す。また、両者の計算時間の比較図を図-4.17に示す。縦軸は反復法を基準とした計算時間比、横軸は系の総自由度とし、全節点変位を求めるのに必要な演算時間で比較している。計算容量、計算時間のいずれについても、反復法は系の全自由度に、本法は基本部分の自由度に依存する。基本部分は、はりの長さLには無関係であるから、はりが長くなるほど本法が有利になる。縦横分割数が同じモデルAでも計算容量は本法が少なく済んだ。演算では、横分割数は 2^p より、消去すべき内部行は $2^p - 1$ 行であるが、本法では、各段階で基本部分のみの演算でよいからp回で済む。ただし、各段階で縦1行の自由度を持つマトリクス演算を5回必要とする。従って、計算時間でも縦分割が少なく横分割数が多いモデルDほど計算時間の低減は大となる。

表-4.1 片持ち梁諸元

諸元		数値
左端	b	100cm
右端	a	50cm
スパン	L	100, 200, 300, 400cm
厚さ	t	1cm
ポアソン比	ν	0.3
ヤング係数	E	$2.1 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$

表-4.2 提案法と反復法(ICCG法)との比較

モデル	桁高(m)		桁長(m)	分割数			自由度		計算時間(秒)		
	支点	先端		桁高	桁長	高/長	部分	全体	本法	反復法	時間比
A	1.0	0.5	1.0	64	64	1.0	130	8320	11	6	1.83
				128	128		258	33024	98	41	2.39
				256	256		514	131564	921	318	2.90
B	1.0	0.5	2.0	64	128	2.0	130	1664	12	18	0.67
				128	256		258	66048	115	134	0.86
				256	512		514	263168	1067	1070	1.00
C	1.0	0.5	3.0	43	128	3.0	88	11264	5	12	0.42
				85	256		172	44032	33	83	0.40
D	1.0	0.5	4.0	171	512	4.0	344	176128	325	653	0.50
				32	128		66	8448	3	8	0.38
				64	256		130	32280	15	60	0.25
				128	512		258	132096	138	479	0.29

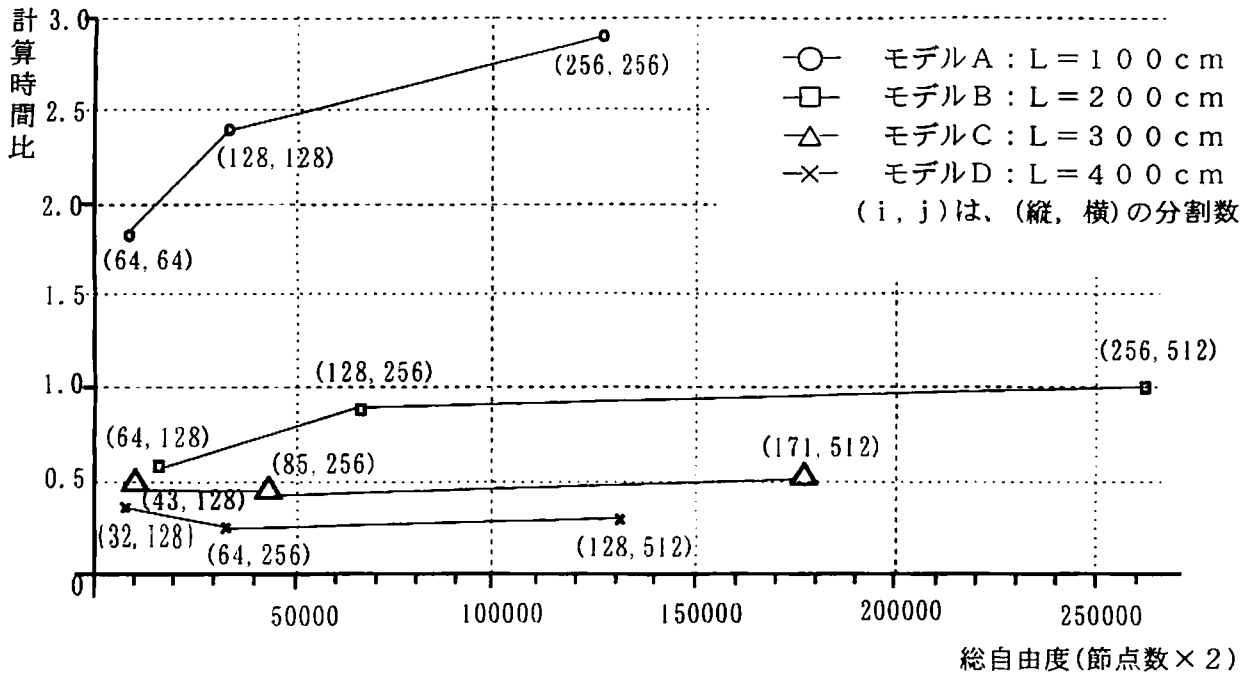


図-4.17 反復法(ICCG法)と計算時間の比較

以上のことより、計算機容量については、縦横比が1の場合でも本法が有利であり、梁は一般にそうであるが、横に長くなるほど本法の優位性が増す。

計算時間については、縦横分割数比が1:1のモデルAでは劣るが、縦横分割数比が1:2以上であれば、あるいは横分割数を増加して精度を上げる場合には、本法は非常に有効な手法であるといえる。

得られた解の良否を検討するために、片持ち梁モデルA~Dについての自由端のたわみを表-4.3に示す。理論値は、構造力学⁴⁾でのせん断たわみを考慮した変断面はりの自由端のたわみ値である。本法でのたわみは、各モデルとも要素数最大の時の自由端中央の値である。妥当な結果が得られたと思われる。

表-4.3 自由端たわみ(mm)

モデル	分割数		本 法	理 論 値
	桁高	桁長		
A	256	250	0.03577	0.03312
B	256	512	0.18725	0.18587
C	171	512	0.57821	0.57787
D	128	512	1.32700	1.32875

(2) テーパー勾配と応力の関係

次に、変断面梁の応力について検討するために、自由端部の高さに変化する片持ち梁について数値計算を行った。ここでは、同条件でテーパの相違による影響を調べるために図-4.18の様な下テーパ付(モデルU-T)、上テーパ付(モデルO-T)と両テーパ付(モデルD-T)梁

について、また左端を $b = 1\text{m}$ と固定し、自由端の高さ a を 0.1m 、 0.5m 、 0.9m と変化させた。荷重は自由端上部に鉛直荷重 $P = 5000\text{kN}$ が鉛直下方向へ作用するものとした。解析モデルの材料定数や形状寸法等は表-4.4に示す通りである。分割方法は、縦方向には等分割、横方向にはメッシュ縦横の比が1となるように分割した。計算には、CPU: Intel Pentium III (500MHz)、RAM: 256Mb を搭載したパーソナルコンピュータを用い、使用言語はFortranで倍精度計算を行った。なお本法の解析結果は、汎用的な有限要素法解析プログラムであるMARC⁽¹⁾との比較検討を行い、変位および応力分布がほとんど一致することを確認している。

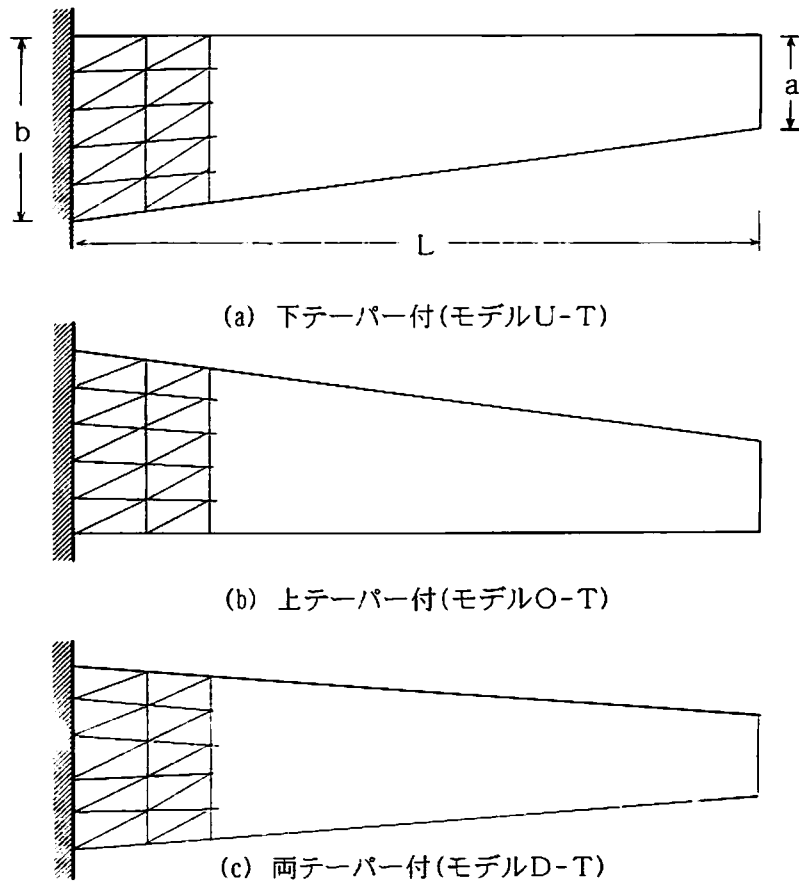


図-4.18 解析モデル

表-4.4 テーパ付片持ち梁諸元

諸元	数値
左端	b 1.0m
右端	a 0.5m
スパン	L 1.0, 2.0, 3.0, 4.0m
厚さ	t 0.01m
ポアソン比	ν 0.3
ヤング係数	E 200GP

各モデルについて、分割数の増加につれて変位がどのように収束していくかを示したものが図-4.19である。解析たわみ v_c は、自由端の節点変位の平均値を用い、理論たわみ v_r は、せん断変形を考慮した変断面梁の自由端たわみである⁴⁻¹⁰⁾。縦軸には、解析値と理論値との比 v_c/v_r を取り、横軸は要素の縦分割数である。 $a/b=0.9, 0.5, 0.1$ とテーパの勾配が大きくなるにつれて要素分割数の影響が大きくなるが、いずれも横分割数が128(要素数131072)以上あればほぼ収束しているのが分る。

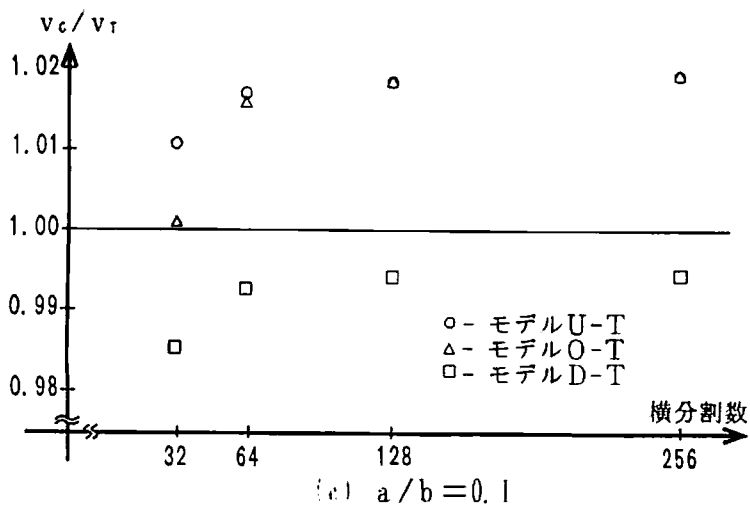
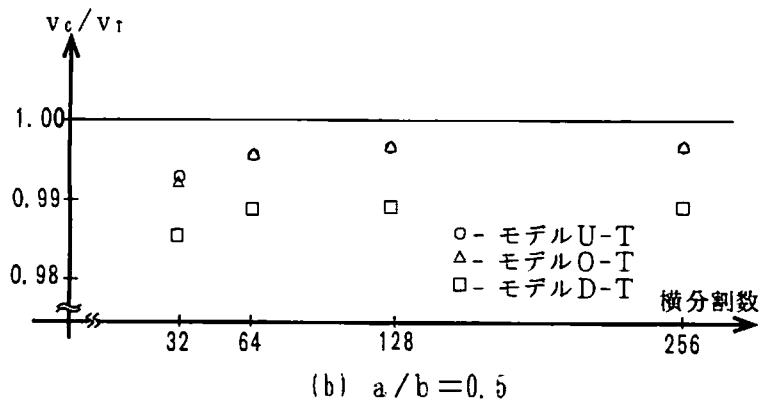
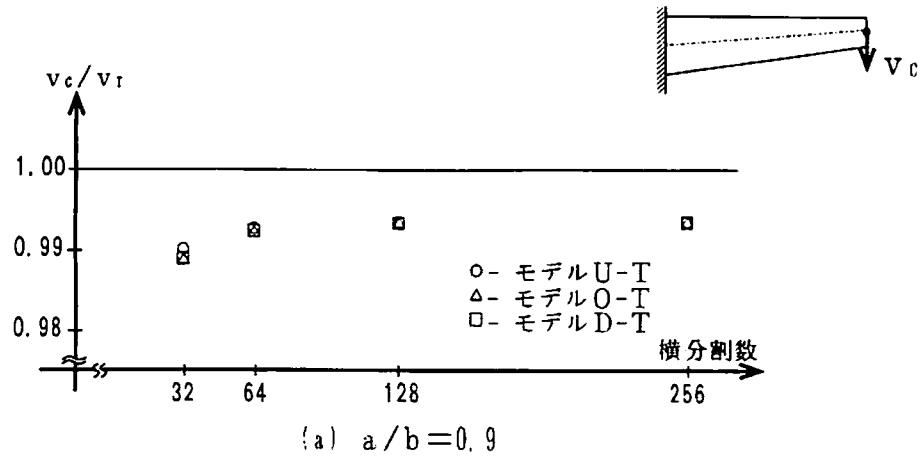


図-4.19 自由端たわみと分割数の関係

解の収束する傾向として、テーパ勾配の小さい $a/b=0.9$ の梁では、図-4.19(a)に示すように要素数の増加につれて3モデルとも一定値に収束するのに対し、勾配が大きい梁では、上または下の一方のみにテーパを有するモデルと上下にテーパを持つモデルとでは、図-4.19(b)、(c)に示すように収束値に多少差があることがわかった。また、テーパ勾配が大きい $a/b=0.1$ の場合は理論値より上で収束している。これは、テーパ勾配が大きいので構造力学の梁理論では対応できず、理論値が実際より低めの値となっているためと思われる。表-4.5には、横分割数256の場合の自由端たわみ値を示す。誤差は、モデルU-T ($a/b=0.1$)で1.9%、モデルD-T ($a/b=0.5$)で1%、他は全て1%以下と僅少である。

表-4.5 自由端たわみの比較 ($\times 10^{-3}$ m)

モデル	自由端高さ (a)		
	0.1m	0.5m	0.9m
理論値	2.578293	1.038089	0.690536
U-T	2.627421	1.034920	0.686198
D-T	2.564932	1.027467	0.686006
O-T	2.627258	1.034897	0.686195

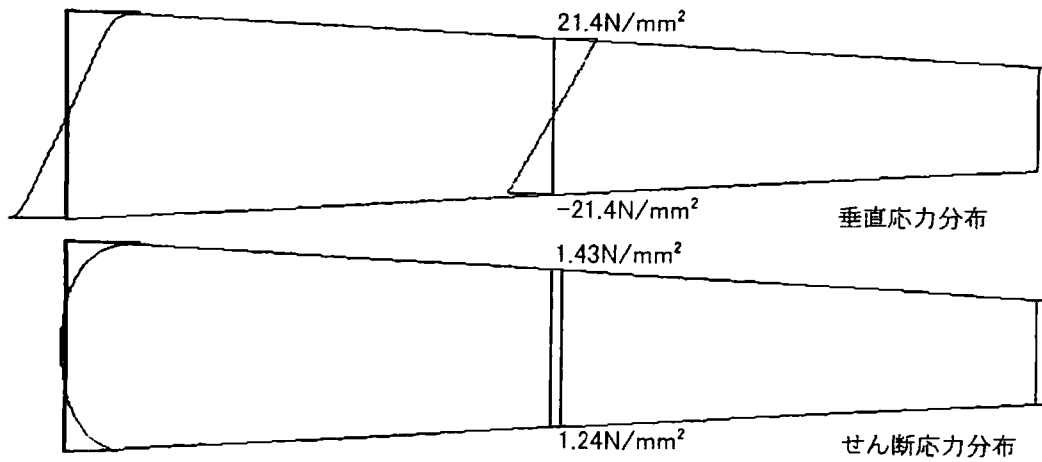
(解析値は横256分割時の結果である)


図-4.20は、メッシュの切り方によって解に差があるかについて調べたものである。図(b)が正メッシュで、ここで扱う解析例は全てこのメッシュで分割している。図(a)が逆メッシュである。両図より分るように垂直応力、せん断応力共両者に差異は見られなかった。従って、メッシュの切り方には特別注意する必要はない。

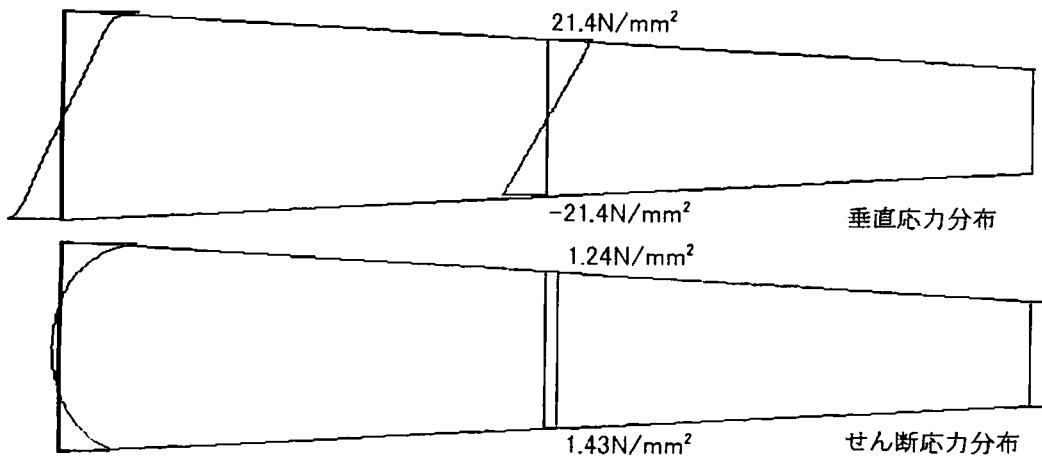
図-4.21~23は、横分割128、縦分割数512の場合について $a/b=0.9, 0.5, 0.1$ と変化させた時の各モデルの垂直応力 (σ_x) とせん断応力 (τ_{xy}) の分布状況を示したものである。ただし、 $a/b=0.9$ については、3種とも大きな差は見られないのでモデルU-Tのみ示した。応力分布は、上側に垂直応力、下側にせん断応力を示し、固定端から1列目要素、2列目要素、4列目要素、…と2の累乗列目要素を256列目要素まで9列の要素について表示している。

これらより垂直応力については、固定端の近傍では上下端で突出するなど、テーパによってかなり影響を受けるが、いずれも固定端から離れるにつれて所謂三角形分布となり、テーパの勾配に関わらず勾配無しの均等断面梁の場合と同様な分布となった。

一方せん断応力分布については、Timosenko⁽⁴⁾⁽⁵⁾等が述べているように固定端の近傍では上下端に大きな値を持つ放物線分布となった。均等断面梁では固定端から離れた断面においては、自由境界すなわち、梁の上下端で0、中央部で最大となる放物線分布となるが、テーパがある場合は、テーパ勾配の大きい図-4.23に顕著に見られるように、テーパ部に最大値を持つ放物線分布となった。固定端近傍での分布状況を明確にするために、モデルU-Tの $a/b=0.5$ の場合について垂直応力、せん断応力の倍率を変えて拡大表示した応力分布図を図-4.24に示す。固定端部近傍での両応力分布の乱れ、せん断応力分布の特異さがよく見て取れる。なお、モデルO-Tは、モデルU-Tと上下逆の分布となる。また、両テーパがある場合のモデルD-Tのせん断応力の分布について拡大表示した結果を図-4.25に示す。モデルO-TとモデルU-Tを平均した分布となっていることがわかる。



(a) 逆メッシュ 




(b) 正メッシュ 

図-4.20 正逆メッシュの応力分布

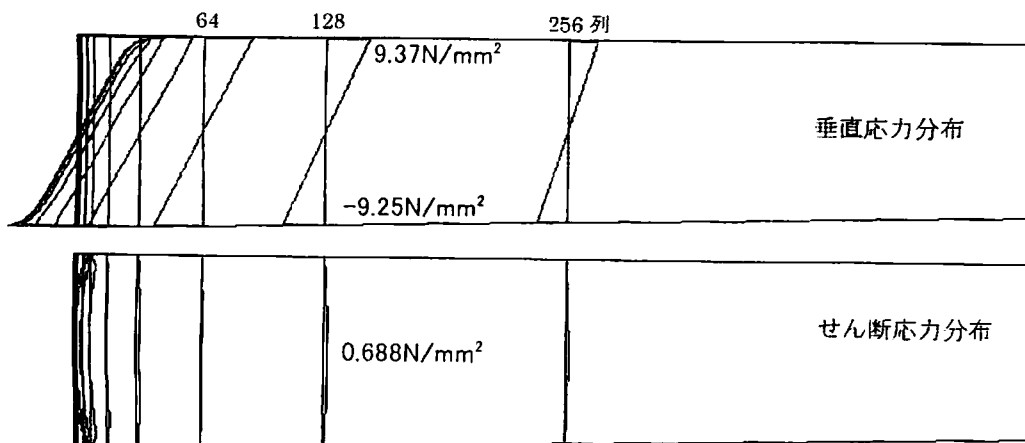
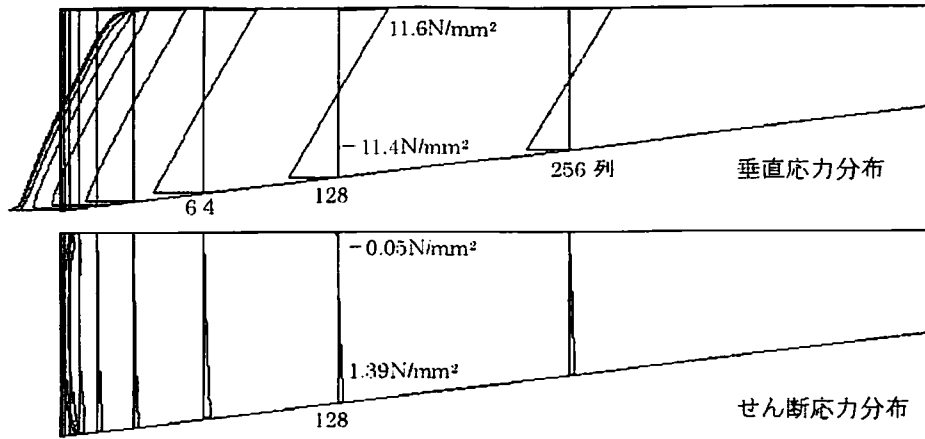
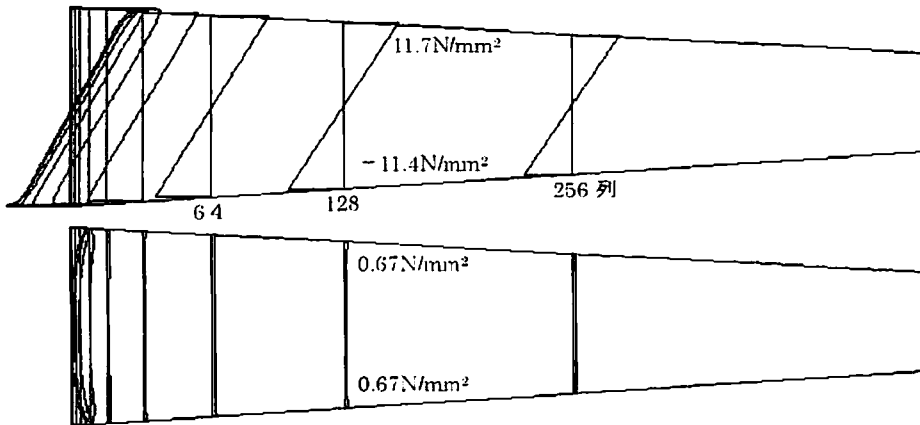


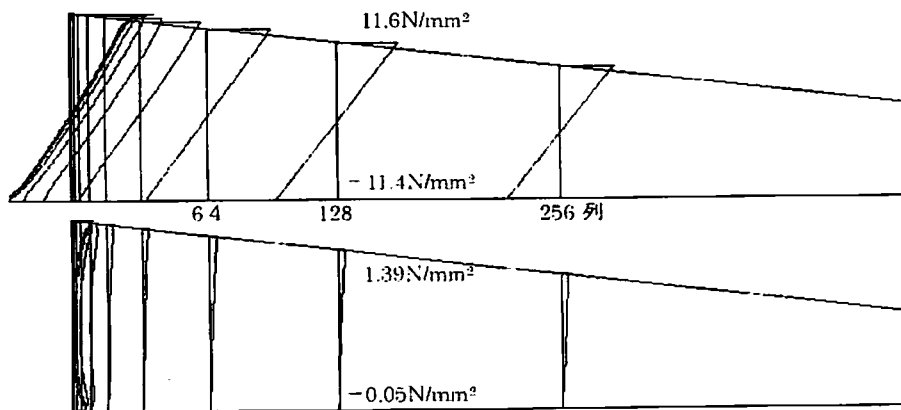
図-4.21 モデルU-Tの応力分布(a/b=0.9)



(a) モデルU-T

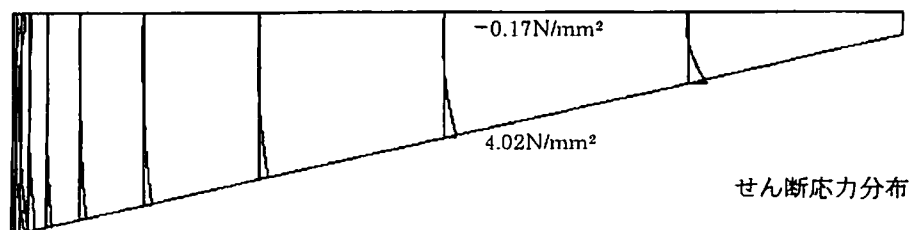
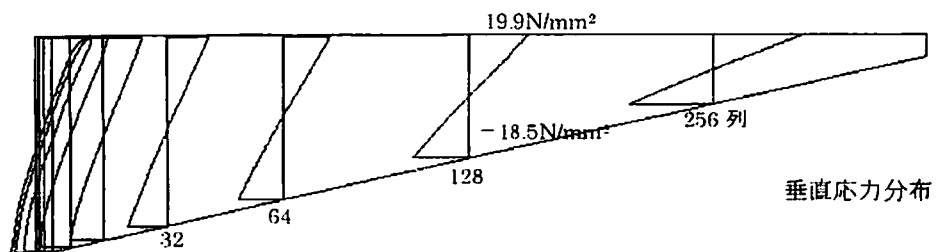


(b) モデルD-T

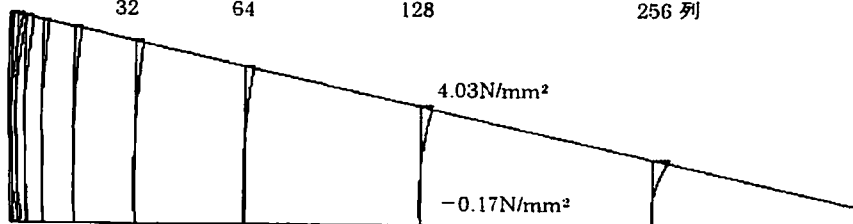
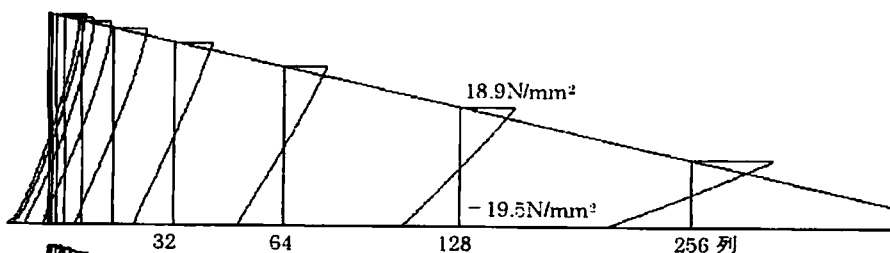
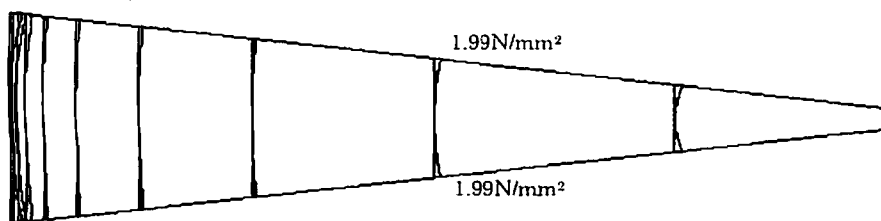
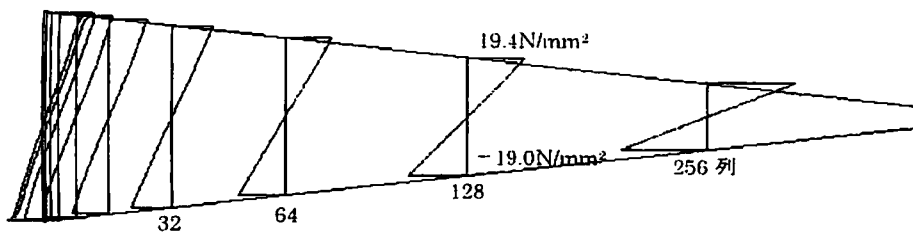


(c) モデルO-T

図-4.22 a/b=0.5 の応力分布

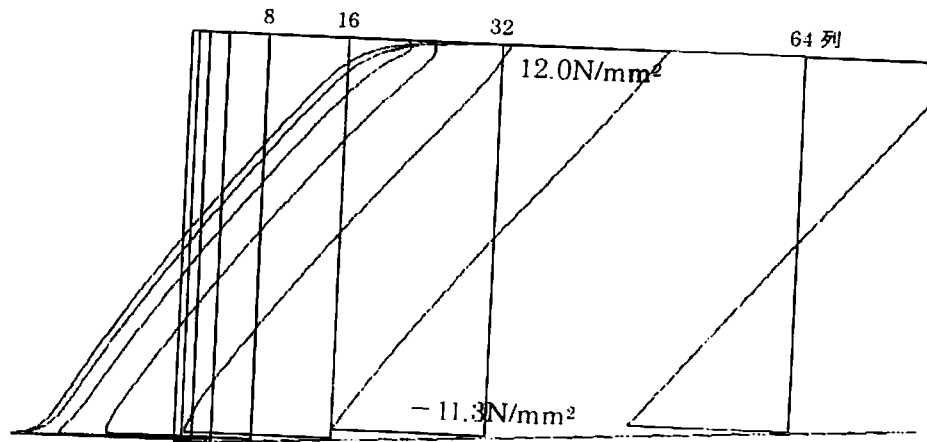


(a) モデルU・T

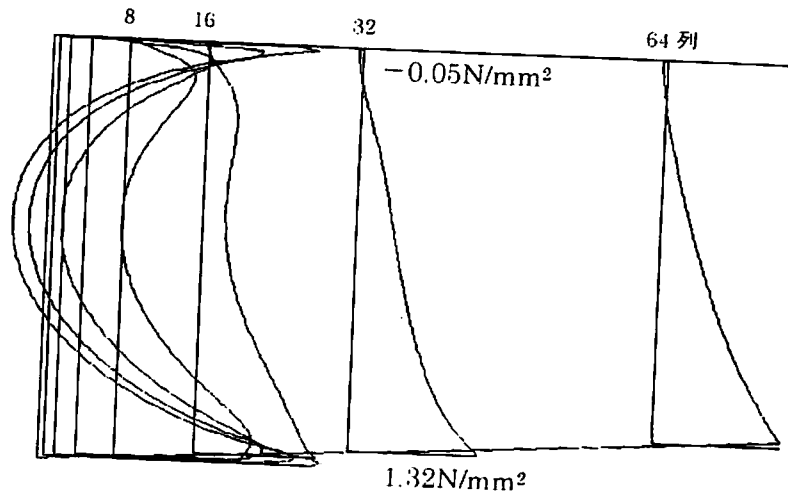


(c) モデルO・T

図-4.23 a/b=0.1 の応力分布



(a) 垂直応力



(b) せん断応力

図-4.24 モデルJ・T応力の拡大表示(a/b=0.5)

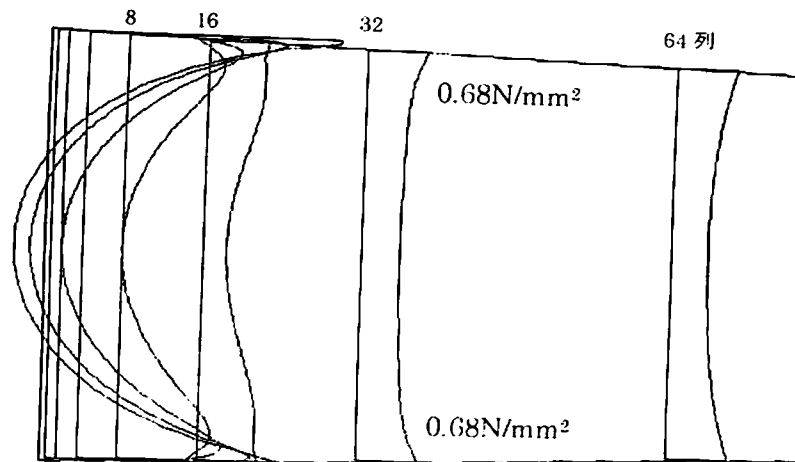
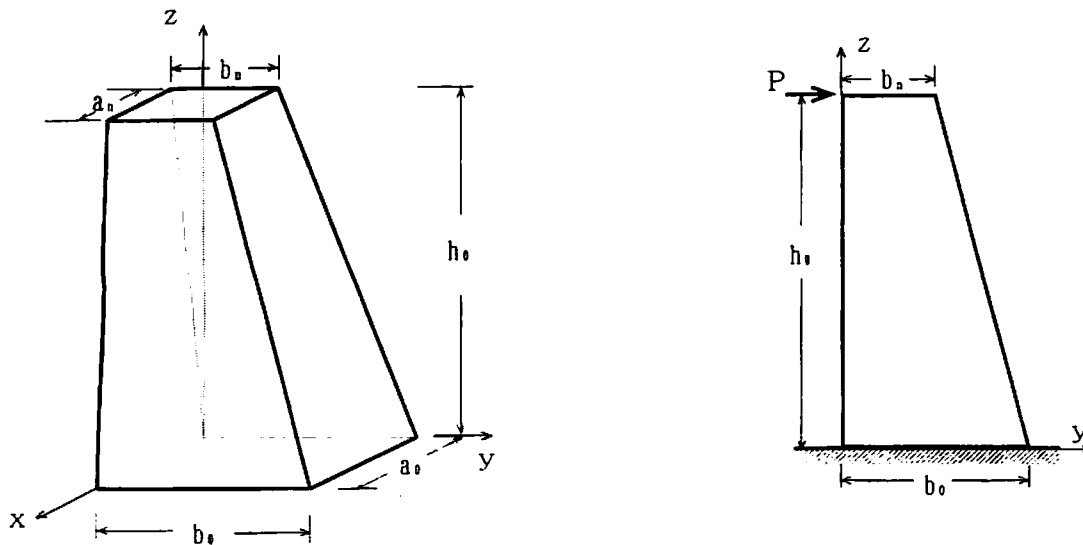


図-4.25 モデルD・Tせん断応力の拡大表示(a/b=0.5)

4.4.3 立体片持ち柱の解析

本手法の妥当性を確かめるための立体解析例として、図-4.26に示すような変断面柱で底面固定、柱頭が自由な片持ち柱に水平力が作用するモデルを用いた。表-4.6に解析モデル諸元を示す。座標系XYZは底面側を原点にして設定している。使用した要素は4面体よりなる要素内一定応力要素⁽¹⁾を用いたが、データ作成上、図-4.27に示すような4面体5個よりなる6面体を基本とし、また対称性の点から図-4.28に示す逆メッシュとの平均要素を用いた。



関係式

$$r_0 = \frac{a_1}{a_0} = \frac{b_1}{b_0} \quad ; \quad r = \sqrt{a_1/a_0} \quad ; \quad e = \frac{1-r_1}{1-r_0} h$$

$$a_j = a_0 r^j \quad ; \quad b_j = b_0 r^j \quad ; \quad h_{j+1} = e \sum_{n=0}^j r^n \quad (j=0 \sim n)$$

図-4.26 立体モデル

表-4.6 立体モデル諸元

諸元		数値
荷重	P	10.45kgf
高さ	h	1000mm
固定辺幅	a ₀	40mm
固定辺成	b ₀	100mm
自由端幅	a ₁	200mm
自由端成	b ₁	50mm
ヤング係数	E	100.0kgf/mm ²
ポアソン比	ν	0.3

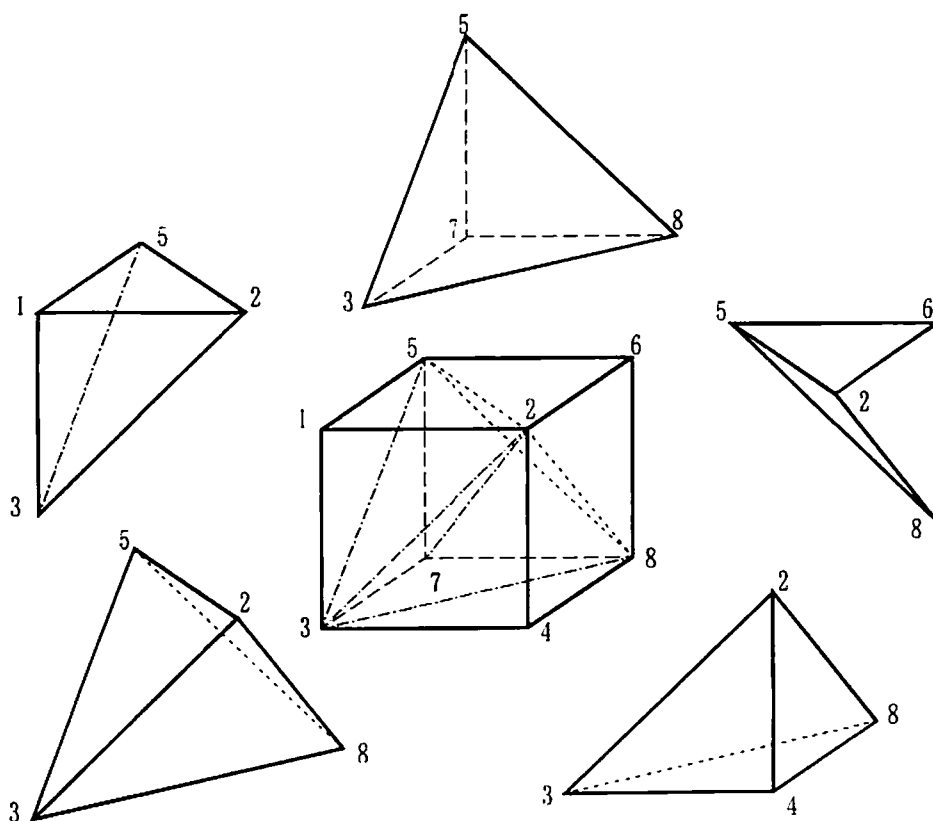


図-4.27 正メッシュより構成された6面体

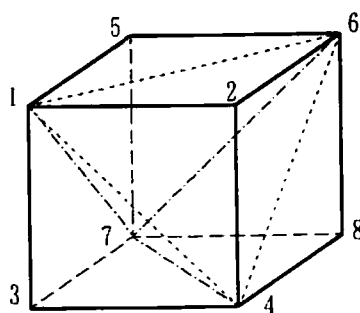


図-4.28 逆メッシュより構成された6面体

解析は、X方向は4分割に固定し、Y方向及びZ方向の分割数を変化させた4種類のモデルA～Dについて実施し、その結果を表-4.7に示す。モデル名3Lは本法を、3Dはバンドマトリックスを用いた直接剛性法による解である。

A、Bモデルについては、両方法で柱頭変位を求めているが、両解法の結果は完全に一致した。従って、剛性マトリックスに相似比が関係するような問題でも、提案法が適用できることが分った。

さらに、構造力学エネルギー法によると、せん断変形を考慮した片持ち柱の柱頭変位 u は、 $u = 21.06302\text{mm}$ であり、モデルA～DとY、Z方向の分割数を増加させていくに従いその値へ近づいていくことから妥当な結果が得られたと言える。なお、モデルDについては本法での演算時間は5時間とかなりの時間を要したが、バンドマトリックス法で直接解こうとすると82万円の方程式を解く必要があり、これからも本法の有効性が示されたと思われる。

表-4.7 立体モデル解析結果(上段：本法，下段：直接法)

モデル	分割数		基本パート	系全体	柱頭変位 (mm)
	Y方向	Z方向	要素数	節点数	
3L-A	10	128	200	110	20.54799
3D-A			21600	7095	20.54799
3L-B	16	128	320	170	20.73092
3D-B			54825	8192	20.73092
3L-C	40	512	800	410	21.01237
3D-C			40960	105165	
3L-D	80	1024	1600	810	21.03799
3D-D			1638400	415125	

4.4.4 異なるテーパーを持つ梁からなる構造物の解析

サブストラクチャーの一例として、図-4.29に示すようなテーパーを持つ構造物の解析を行った。構造物は、3つの梁（Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ）よりなり、ここでは、これをモデルM-Tと呼ぶ。荷重は中央部（Ⅱ部）に等分布で鉛直方向に作用させ、境界は両端固定とした。解析モデルの諸元を表-4.6に示す。解析は、各部で消去・縮合を行い、左右境界に縮合、境界で結合して境界の

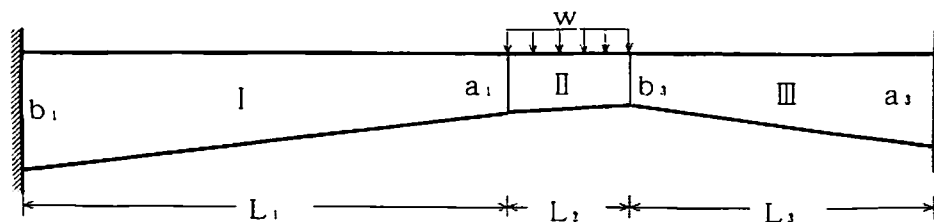


図-4.29 3つの異なるテーパーを持つ梁よりなる構造物(モデルM-T)

変位を求め、後退代入で系の全変位を算定、応力を計算した。横分割数を20~256に変化させた場合について、中央Ⅱ部の横分割数と垂直応力およびせん断応力の最大値との関係を図-4.30に示す。なお、垂直応力については、荷重の影響を考慮して中央Ⅱ部梁スパン中央部下端の最大応力を用いた。図より垂直応力、せん断応力とも横分割数が256で十分と思われる。次に、横分割数と各パートの要素数、最大応力値の関係を表-4.9に示す。応力値が安定する横方向が256分割では、180万要素以上とかなりの分割数が必要である事が分る。従って、さらに大規模な問題の場合は並列コンピュータの使用が考えられる。

表-4.8 解析モデルM-Tの諸元

諸元		数値
等分布荷重	w	50.0kN/m
Ⅰ部左端	b ₁	1.0m
Ⅰ部右端	a ₁	0.5m
Ⅰ部スパン	L ₁	4.0m
Ⅲ部左端	b ₃	0.45m
Ⅲ部右端	a ₃	0.8m
Ⅲ部スパン	L ₃	2.5m
Ⅱ部スパン	L ₂	1.0m
厚さ	t	0.01m
ポアソン比	ν	0.3
ヤング係数	E	200GPa

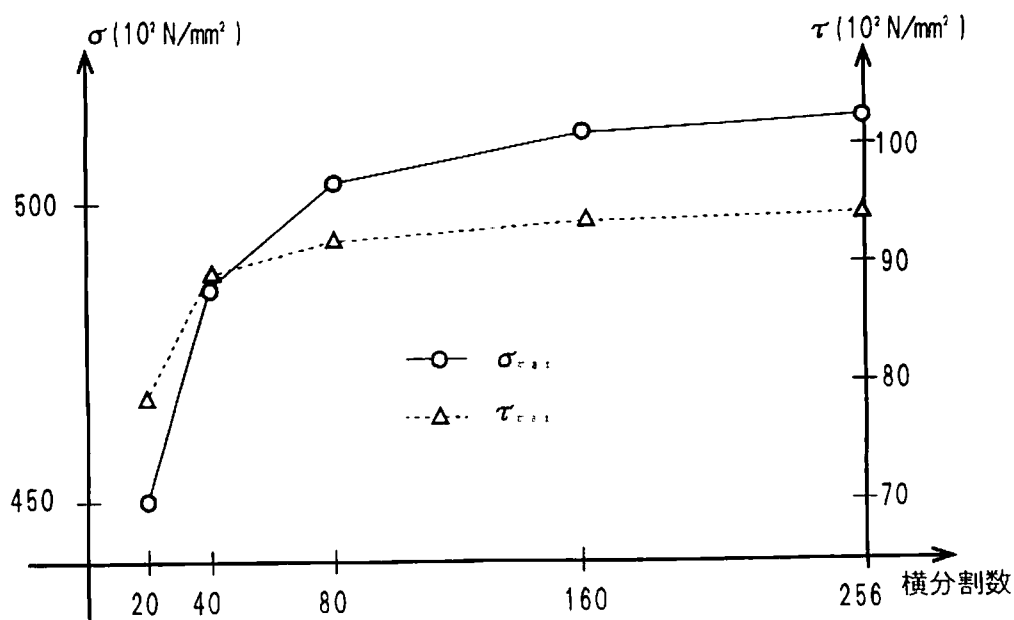
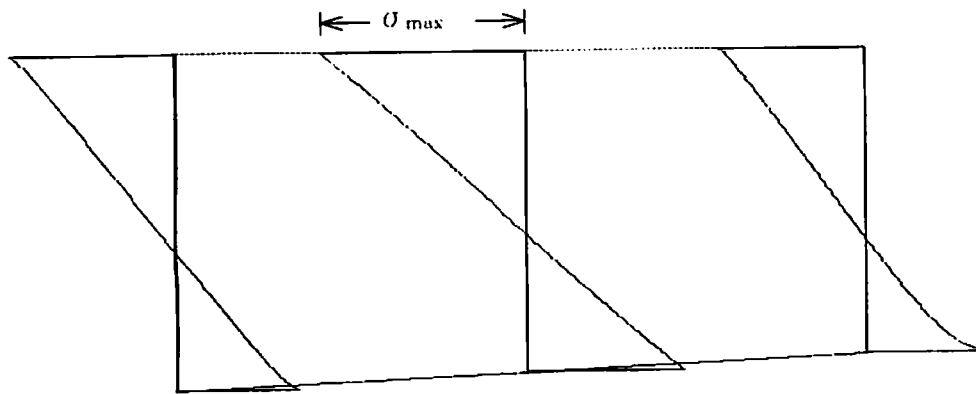


図-4.30 モデルM-Tの最大応力と横分割数の関係

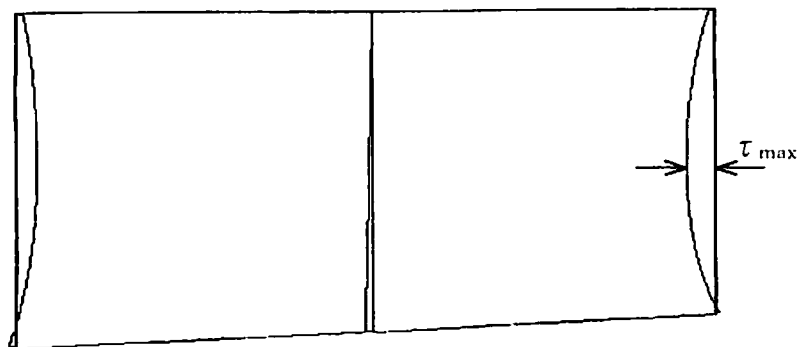
表-4.9 横分割数と最大応力の関係

横分割数	要素数			最大応力 (N/mm ²)	
	I部	II部	III部	σ_x	τ_{xy}
20	5120	640	2560	4.5049	0.78273
40	20480	5120	10244	4.8631	0.89055
80	81920	20480	40960	5.0357	0.91885
160	327680	81920	163840	5.1200	0.93937
256	1048576	262144	524288	5.1509	0.93937

また、中央II部の両境界と中央列についての応力分布を図-4.31に、拡大表示したせん断分布を図-4.32に示す。垂直応力については、垂直応力分布図で左右端の下端に応力の乱れがあり境界の影響が見られる。せん断応力については、中央II部のテーパ勾配は小さいが、拡大表示した図-4.32せん断応力分布図で分るようにテーパの影響が見られる。



(a) 垂直応力($\sigma_{max}=418.38\text{N/cm}^2$)



(b) せん断応力($\tau_{max}=93.94\text{N/cm}^2$)

図-4.31 モデル M-T II 部の応力分布

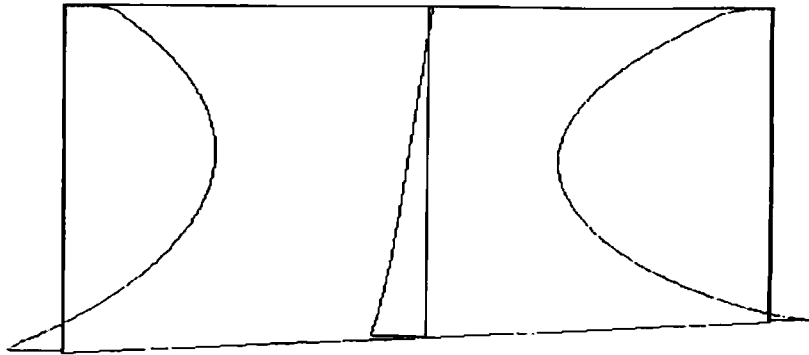


図-4.32 モデル M-T II 部のせん断応力拡大表示

4.4.5 一部付加剛性を持つ梁の解析

非相似系の例として、図-4.33に示すように図-4.18のモデルU-Tの固定端部の上下に要素を付加した片持ち梁（モデルU-TM）について解析を行った。付加前の梁部分のモデル諸元はモデルU-Tと同様とし、自由端の高さは500mmとした。付加要素は、上下各4要素、計8要素とし、その高さは左2列の長さ(21.63mm)に合わせた。横分割数128の場合のモデルU-TMとモデルU-Tについて、拡大した垂直応力、せん断応力の分布を図-4.34および図-4.35に示す。図-4.34の(a)、(b)より、付加剛性付モデルU-TMの垂直応力の最大値は、梁上下で極端に応力分布が急変するモデルU-Tに比べ応力が緩和され(○印部参照)、付加剛性がないモデルU-Tの約6割となっている。また、付加剛性と結合している第2列目までは、応力緩和が見られるが、第3列目はやはり大きな応力となっている。一方、せん断応力に関しては、垂直応力ほど極端な変化は見られず、モデルU-TMの方が付加剛性との境界部(τ_i)で大きな応力を生じ、逆に大きくなった(○印部参照)。これは、剛性付加部分と梁部の両境界部で応力集中が生じた結果であると考えられる。なお、自由端での両者の平均たわみは、モデルU-TMで $v_{cr}=20.68\text{mm}$ 、モデルU-Tで $v_c=20.69\text{mm}$ とその誤差は0.06%であり、ほとんど影響がなかった。

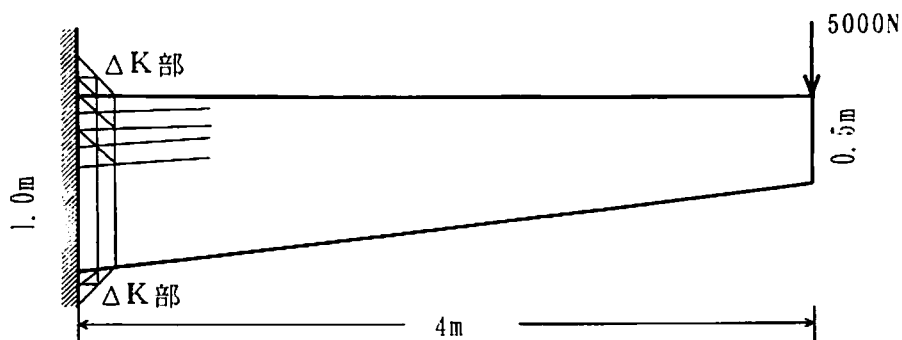


図-4.33 一部非相似要素を持つ片持ち梁
(モデルU-TM)

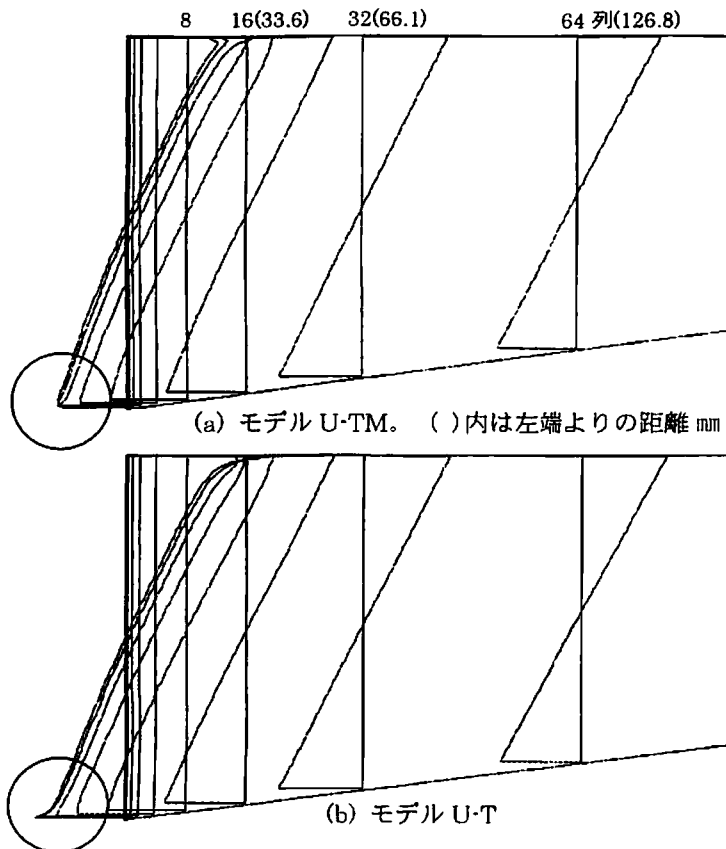


図-4.34 垂直応力の拡大表示。

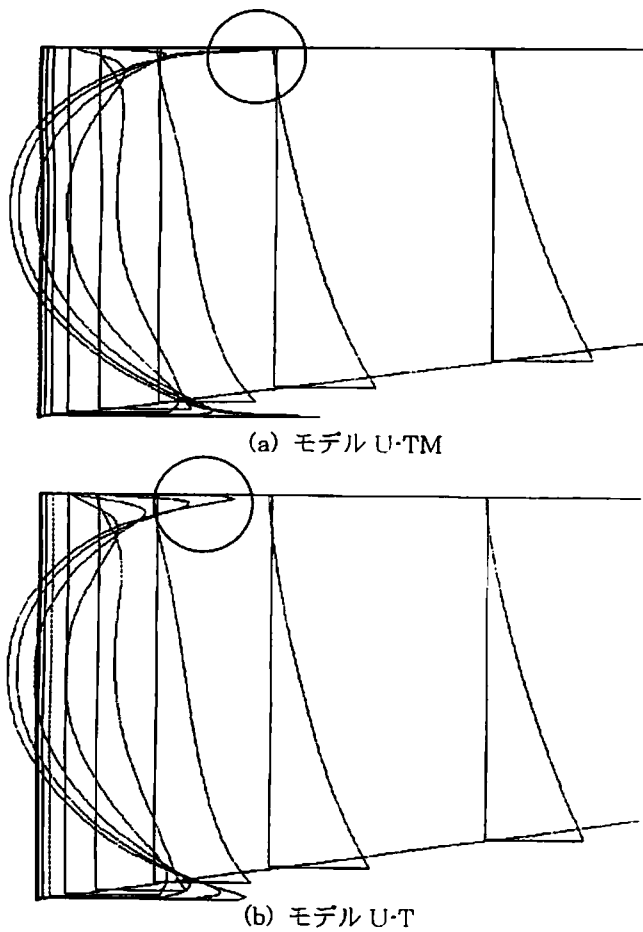


図-4.35 せん断応力の拡大表示

4.4.6 降伏により一部剛性が変化した梁の解析

修正系への二番目の適用例として、図-4.18に示すモデルU-Tについて、荷重の増大とともに要素が降伏し、剛性が次々と変化する場合について計算を行い、荷重Pの増加に伴う降伏の進展及び変位状況を追跡した。同図を図-4.36に、またモデル諸元は表-4.4でスパン4.0mを用いた。

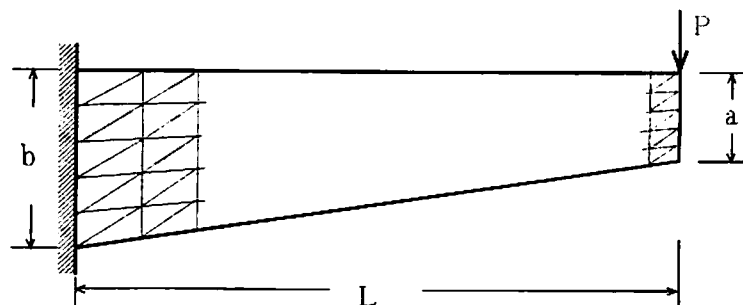


図-4.36 変断面片持ち梁

要素の降伏判定は、2次元問題におけるvon Misesの降伏条件式

$$\sigma_s = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y + 3\tau_{xy}^2} \quad \dots (4.60)$$

を用い、 $\sigma_s = 240\text{MPa}$ で降伏するものとした。降伏した要素の剛性は、降伏後それ以上の耐力は負担しないものとして、初期剛性の1/10倍を用い荷重を増加させて行った。

図-4.37は、汎用計算機MARC⁽¹⁾によって求めた荷重-たわみ曲線であり、図上に○印で本法の結果をプロットしている。なお、MARCでのメッシュは四角形要素を用い、分割は横20分割、縦60分割とし、本法でのメッシュは三角形要素を用い、分割は横方向に32分割、縦方向に128分割としている。初期段階ではあるが、両者の差はほとんど見られず、妥当な結果が得られた。

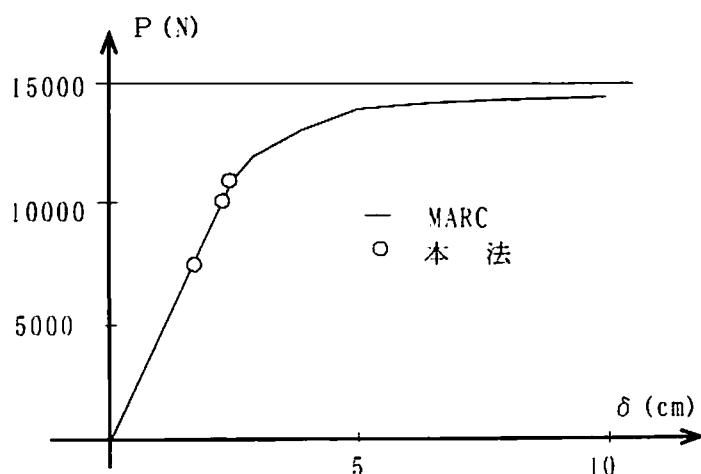
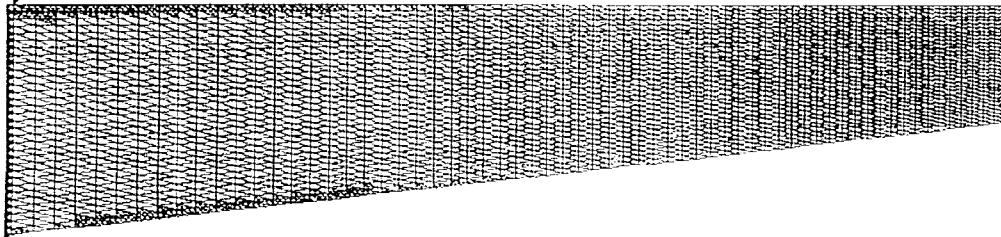


図-4.37 モデルU-Tの荷重(P)-自由端たわみ(δ)曲線

図-4.38は、本法と汎用計算機MARCで解析した塑性開始時の要素降伏状況であり、黒いマーク部が降伏要素である。ここでは一部修正への適用であり、本法ではMARCの塑性開始時と対応して降伏要素40個まで求めた。両者は良く合致していると言えよう。



(a) 本法による解析

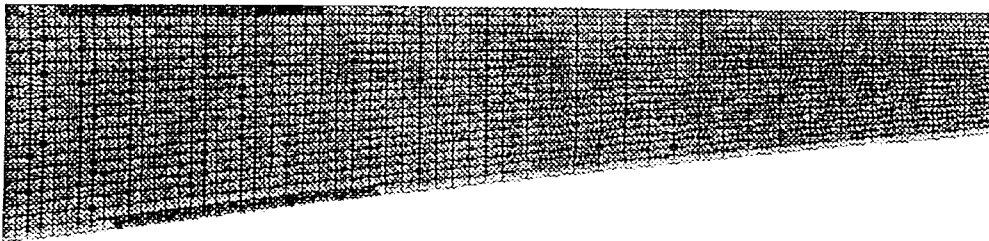
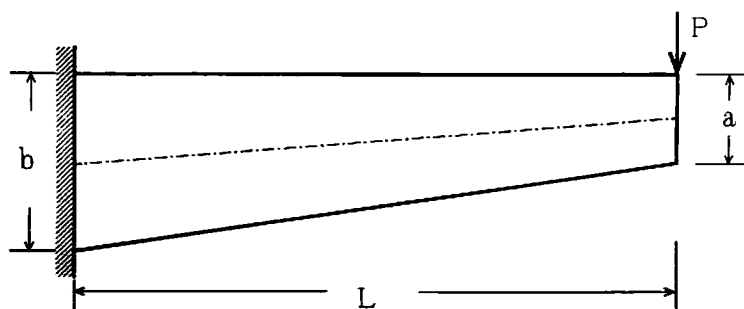


図4-38 モデルU-Tの降伏状況図
(マーク部：降伏要素)

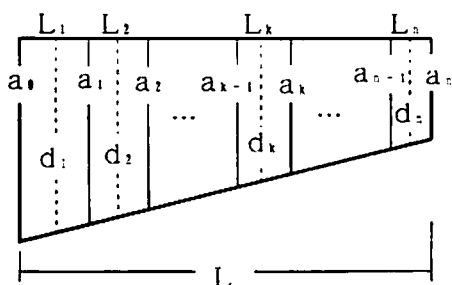
4.4.7 曲げを受ける棒材の解析

4.3.4で述べた提案法の妥当性について検討するために、図-4.39(a)に示すような自由端に集中荷重を受ける片持ち梁について数値計算を行った。モデル諸元は表-4.4でスパンを4.0mとしている。図-4.39(b)に要素の基本長さ $L_1=L_s$ 、 k 要素の長さ L_k と高さ d_k の関係を示す。棒要素を図心で表したのが図-4.39(c)であり、この時曲げ剛性 ρ は各要素で一定となる。

解析は、固定端寸法1.0m、スパン4.0mは固定し、自由端と固定端の寸法比($\eta = a/b$)を $\eta = 0.01, 0.02, 0.05, 0.1, 0.5$ と変化させた5ケースについて行い、分割数の増加につれてたわみの正解への収束状況を調べた。また、比較のため梁を等分割したモデルについても同様に解析を行った。結果を表-4.10に示す。なお、理論解としては、構造力学より求めた曲げたわみを用いた。



(a) モデル形状



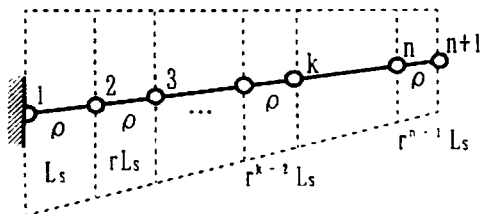
(b) 片持ち梁諸元

各寸法

$$\begin{aligned} a_k &= r^k a_0 \\ d_k &= \frac{1}{2} r^{k-1} (1+r) a_0 \\ L_k &= r^{k-1} L_s \end{aligned}$$

ただし、

$$\begin{aligned} a_0 &= a, \quad a_n = b \\ r &= \sqrt[n]{a_n/a_0} \\ L_s &= \frac{a_0(1-r)}{a_0 - a_n} L \end{aligned}$$



(c) 相似棒要素

曲げ剛性

$$\rho_k = \frac{E I_k}{L_k^3} = \frac{E t}{96} \left(\frac{a_0 - a_n}{L} \frac{1+r}{1-r} \right)^3$$

図-4.39 変断面片持ち梁モデル

表-4.10 相似分割, 均等分割の細分割に伴う自由端たわみ(mm)

自由端寸法		10mm	20mm	50mm	100mm	500mm
要素数	理論解	-7.539	-6.097	-4.353	-3.203	-1.276
16	相似系	-7.586	-6.132	-4.374	-3.216	-1.278
	等分割	-8.556	-6.700	-4.514	-3.247	-1.278
32	相似系	-7.551	-6.106	-4.358	-3.206	-1.277
	等分割	-8.130	-6.326	-4.395	-3.214	-1.277
64	相似系	-7.542	-6.100	-4.354	-3.204	-1.276
	等分割	-7.764	-6.161	-4.363	-3.206	-1.276
128	相似系	-7.539	-6.099	-4.353	-3.203	-1.276
	等分割	-7.601	-6.113	-4.355	-3.204	-1.276
256	相似系	-7.539	-6.097	-4.353	-3.203	-1.276
	等分割	-7.554	-6.101	-4.353	-3.203	-1.276
512	相似系	-7.539	-6.097			
	等分割	-7.542	-6.098			

解析結果より、相似比に応じた長さで要素分割した相似系のたわみは、要素数128もあればテーパー勾配の大小に関わらず理論解に良く合致し、提案法の妥当性が確かめられた。一方、等しい長さで要素分割した等分割系では、テーパー勾配が小さい場合は問題無いが、テーパー勾配が大きくなると収束が悪くなり、相似形分割の場合の2～4倍の分割数を必要とした。これは、要素の偏平さに起因すると思われる。従って特にテーパー勾配が大きい場合は、テーパー勾配に応じた要素分割が必要である。

4.5 結論

相似形メッシュで分割される場合、相似メッシュ系の特性を活かした効率的な縮合法を用いて計算容量、計算時間の低減が可能な手法を提案し2次元問題、3次元問題、一部修正系問題さらに次元の異なる要素を持つ棒構造への応用を試み、数値計算を通してその妥当性について検討を加えた。得られた結論を以下にまとめる。

- (1) 大規模な構造物の解析に一般に用いられる反復法と比べて、計算容量については提案法が優位であり、計算時間についても、高さスパン比が1/2以上では提案法が優位となり、梁が細長くなる程その優位性は増す。従って、計算容量、計算時間が低減できる。
- (2) テーパーを持つ梁の応力は、テーパーによって影響を受けるが、特にせん断応力においてその影響は大であり、テーパーのある側に高い応力が生じる。上下両テーパーを持つ梁のせん断応力の分布は、上テーパー付梁と下テーパー付梁の平均応力分布である。
- (3) 2次元の平面問題では、要素内一定応力要素、高次要素に関わらず相似要素であれば同一の剛性マトリックスとなる。従って、均等分割の場合と同様簡単に取り扱える。
- (4) 3次元問題で相似系の剛性マトリックスは、相似比の累乗倍した剛性マトリックスで表され、それさえ考慮すれば2次元問題と同様に取り扱うことができ、提案した縮合法が便利に適用できる。
- (5) いくつかの相似メッシュ系よりなる構造物の解析は、各相似系パートで相似縮合法を適用

- し、結果を重ね合わせた縮合系を作成し解くという、所謂サブストラクチャー法である。
- (6) 系の一部要素の剛性変化等で相似関係が壊れた系についても、その変化部のみの修正ですみ、従って変化した部分が系全体に比べて小さければ、相似縮合法が便利に適用できる。更に付加剛性によって系全体の自由度が増加するような問題へも同様に適用可能である。
- (7) 要素剛性マトリックス内に異なる次元の要素を持つ棒要素の場合、相似要素の剛性マトリックスは相似比を要素に持つ相似比マトリックスの累乗積となるが、相似比マトリックスは主対角にのみ値を持つ対角マトリックスであり、簡単な演算を付加するだけで相似系縮合法が適用できる。

参考文献

- 4-1) 土木学会編：構造工学シリーズ、構造工学における計算力学の基礎と応用, pp. 370~371
- 4-2) 有尾一郎、池田清宏、鳥居邦夫：ブロック対角化法による平面構造物の有限要素法並列解析、構造工学論文集、Vol. 38. A, pp. 317~324, 1992. 3
- 4-3) T. J. Healey and J. A. Treacy: Exact Block Diagonalization of Large Eigenvalue Problems for Structures with Symmetry, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 31, pp. 265-285
- 4-4) C. S. Desai and J. F. Abel (山本善之訳)：マトリックス有限要素法、科学技術出版、1979
- 4-5) I. Hirai, Y. Uchiyama, Y. Mizuta and D. Pilkey: An Exact Zooming Method, Finite Elements in Analysis and Design 1, pp. 61~69, 1985
- 4-6) 内山義博、水田洋司、平井一男：FEM修正ズーム法による計算効率化について、土木構造・材料論文集、第11号、1995年12月、P121~126
- 4-7) 内山義博、平井一男、石原元：大次元マトリックスの縮合に関する一方法について、八代高専紀要第10号、pp. 21~25、1988. 3
- 4-8) 内山義博、山尾敏孝、片山拓朗、平井一男：相似形メッシュを用いた梁解析の一手法、応用力学論文集、Vol. 4, pp. 211~218, 2001. 8
- 4-9) Richard B., Michael B., Tony F. Chan, James D., June D., Jack D., Victor E., Roldan P., Charles P. and Henk von der Vorst (長谷川里美、長谷川秀彦、藤野清次共訳)：反復法 Templates、朝倉書店、1996
- 4-10) 崎元達郎：構造力学[下]、森北出版、1998
- 4-11) MARC K7:Users Manual Vol. A-E, 1997
- 4-12) S. P. Timosenko and J. N. Goodier: Theory of Elasticity, McGraw-Hill Company, pp. 53-59, 1970
- 4-13) K. J. Bathe and E. L. Wilson (菊地文雄訳)：有限要素法の数値計算、科学技術出版、1979

第5章 結 論

5.1 総 括

各章で得られた結論は各章末で述べたが、本章ではそれらの内主要な結論を要約する。

<第2章 ズーム解析法>

分割マトリックス、拡大マトリックスの考えを導入、要素を細分割するたびに系全体を再解析することなく、系の細分割部（ズーム部）のみの解析で済み、しかもズーム毎にその影響が系全体にフィードバックし得るズーム法の誘導を行い、さらにバンドマトリックスの特性を生かしてズーム可能な修正ズーム法の提案を行った。最後に数値計算を行い提案法について検討を加えた。本章では以下のような結論を得た。

- (1) 提案した両ズーム法とも、解析的には厳密であり、何回ズームを繰り返しても数値計算上の誤差を除けば正しい解が得られる。
- (2) 修正ズーム法は、バンドマトリックスを用いることから問題にもよるが、ズーム法と比べ計算機容量、計算時間ともかなりの低減が期待できる。
- (3) 有限要素法で応力集中問題を解析する場合、集中部近傍のみを単に細分割しても正解に収束するとは限らず、適正なメッシュ分割が必要となる。

<第3章 適正なズーム領域判定法>

効果的にズーム解析を行うためのズーム領域の判定法の誘導を行った。理論的には平面応力問題の応力はポアソン比の変化に無関係であるが、有限要素法の基礎式にはポアソン比が含まれる。その影響を応力のポアソン比による微分値として捉え、長方形板の中央に円穴、楕円穴を持つ系の解析を通してその妥当性について検討を加えた。本章では以下のような結論が得られた。

- (1) 2次元平面応力問題においては、応力のポアソン比による微分値の大小により、ズーム領域、メッシュ形状の適否の大まかな判定は可能であり、要素内一定応力要素、高次要素に関わらず同様に適用できる。
- (2) 応力のポアソン比による微分値は、提案した両ズーム法で算定できる。しかも、ズーム法と同様全体の再解析は必要でなく、ズーム部分のみの諸量で求めることが出来る。従って、ズーム法解析を行う際は、ズーム領域の判定を行いながらズームが可能となる。
- (3) 微分値の大きい要素をズーム領域外に残したまま、その部分以外をいかに細分割していても必ずしも良解には収束しない。これは良解を得るために少なくとも満足すべき必要条件である。
- (4) ズーム領域内外において、主応力の微分値、主せん断応力の微分値が小さくなるようなメッシュ分割を行えば、下限から良解に近づく。

以上のことより、提案法は、細分割すべき領域の判定並びに得られた解が適性かどうかの判定に役立つ手法であると言えよう。

<第4章 相似メッシュを用いた解析>

解析すべき系が相似形メッシュで分割される場合、相似メッシュ系の特性を活かして効率的

に解析できる手法の提案を行い、2次元問題、3次元問題、一部修正系問題、さらに次元の異なる要素を持つ棒構造への拡張を試み、数値計算を通してその妥当性を検討した。本章では以下のような結論が得られた。

- (1) 大規模な構造物の解析に一般に用いられる反復法と比べて、計算容量については提案法が優位であり、計算時間については、高さスパン比が $1/2$ 以上では提案法が優位となる。従って、構造物が細長くなる程その優位性は増す。
- (2) テーパーを持つ梁は、テーパーによって影響を受けるが、特にせん断応力に於てその影響は大であり、テーパーのある側に大きいせん断応力が生じる。
- (3) 系が相似要素で構成されていれば、2次元平面問題、3次元立体問題あるいは剛性マトリックスの要素の次元が異なる棒要素へも提案する縮合法は便利に適用出来る。
また、一部の要素剛性変化あるいは付加剛性によって相似性が壊れるような問題でも、その修正部のみを取扱を付加するのみで提案法が適用できる。

従って提案法は、対象とする系が規則的であれば、パソコンレベルの計算機でも大型計算機と匹敵する解析が可能な手法である。

5.2 今後の課題と将来への展望

本研究では、有限要素法の解析に於てより精度良い解を得ようとする問題となる。計算容量、計算時間を低減し得る手法としてズーム法、相似系縮合法の誘導を行い、また適正なズーム領域並びにメッシュ形状の判定法についても取り上げ、数値計算によってその有効性について検討し、一応の成果を得た。

今後研究していく上での課題として次のことが考えられる。

- (1) ズーム法では、ズーム内部の細分割は任意に行えるがズーム境界は前回ズームで規定される。従って、ズーム領域の近傍で大幅な要素分割を行うとメッシュが偏平になるので無理が生じる。次のズームに応じてズーム境界の自由度の拡大を行うことは可能か。
- (2) 有限要素法を用いる場合一番の問題は、メッシュ細分割に伴うデータ量の増加である。多くのメッシュ自動分割法が提案されているので、提案したズーム領域判定法をメッシュ自動分割に組み入れることは可能か。
- (3) 相似系縮合法は、大規模な問題に対してサブストラクチャー法を用いる際、相似系よりなる部分構造の解析に有効であるから、並列計算を考えたルーティンの中に組み入れる。
- (4) 系全体が相似系である構造物は少ないと考えられる。ズーム法等で不規則部分はある程度カバー出来るが、より複雑な一般の構造物についても、座標変換等により相似系への変換を行えば相似縮合法の適用が可能ではないか。
- (5) 簡単な棒要素についてはあるが、剛性マトリックス内の要素の次元が異なる場合でも相似系縮合法が適用出来た。さらに、坂の曲げ問題へ適用できれば、形鋼の座屈問題などより幅広い問題への解法として有効であろう。

現在は、各手法とも適用範囲が狭く適用も限定されるが、上に述べた課題が解決されれば実構造物の解析に有効に使用でき、パソコン程度の計算機でも大規模な解析が可能となると思われる。

謝 辞

本研究を遂行するにあたり、熊本大学の山尾敏孝教授には、終始変らぬ暖かいご指導とご鞭撻を賜りました。まがりなりにも、本論文をまとめることが出来たのは、山尾敏孝教授のお蔭と深く感謝の意を表します。

崇城大学の平井一男教授には、理論構成上の貴重なヒント、アドバイスをいただき心から感謝いたします。また九州産業大学の水田洋司教授にも適切なアドバイスをいただき感謝いたします。平井一男教授には、学生時代から研究の進まない愚弟子にもかかわらず最後まで暖かいご指導を賜り厚く感謝しております。

熊本大学の崎元達郎教授、牧野雄二教授をはじめ環境システム工学科の先生方には、本研究に対して貴重なご助言、ご指導を賜りました。心から感謝いたします。

本論文をまとめるにあたり、福岡県職、右田隆雄氏の修士論文は、数値計算結果など貴重な資料となりました。厚く感謝の意を表します。

本論文は、以上の方々をはじめ、多くの方々のご協力とご支援の賜であります。ここに再度感謝の意を表し、御礼申し上げます。

最後に、長い間黙って陰ながら支えてくれた妻に感謝する。

平成14年3月22日

内山義博