

中学生の空間図形認識の特質

山本 信也

Characteristics of Spatial Cognition of Junior High School Students

Shinya YAMAMOTO

1. 序 文

算数・数学科の図形についての授業では、数学的对象である図形が具体的な事物や図などを用いながら提示され、その概念に関する理解や性質の学習が進められるのが一般的である。具体的な事物を介しながら、その図形自体について理解し、その間にあるいろいろな関係についての理解することが図形指導の目標の一つになっている。ところで、そのような図形の授業において、教師が特定の図形を表すものとして提示する図が、ある生徒たちはそれを特定の図形と認め、別の生徒たちはそう認めなかったりする状況がしばしば観察される。視覚的に同じものであっても、見る主体によってその見方が異なるという状況は、日常的な場面でもしばしば経験されることであるが、これと同じようなことが実際の教室の中で、教師と生徒、あるいは生徒同士の間で生じているといわなければならない。図形についての学習の中で、特定の幾何学的な図形を表す図について生徒の間に異なる見方が生じるということは、教師自身には経験的に知られているであろうし、またそのことを考慮しながら授業が計画され、展開されているのが実情であろう。

しかし、児童・生徒の図形に対する認識の実態に関する最近の調査研究によれば、その結果は、必ずしも望ましいものとはいえない実情である。小関熙純らによるの平行四辺形についての調査研究(小関熙純他, 1984)では、正方形、ひし形、長方形を平行四辺形として見なしていない中学生が、第1, 2, 3学年でそれぞれ60%, 28%, 31%にとどまったことが報告されている。また空間図形認識の実態に関しては研究自体の数が多くない状況であるが、いくつかの研究の中で部分的に報告されている結果からも望ましいものとはいえない(飯島, 1988)。さらに、与えられた空間図形の表現を見て、実際の立体模型を構成する能力についての調査(M. COOPER & J. SWELLER 1989)、与えられた立体模型を表現し伝達する能力に関する調査研究(D. BEN-CHAIM & G. LAPPAN 1989)など、空間図形認識に関する従来の研究で明らかにされている結果は、とりわけ中学生といえども、空間図形についての認識は我々が予想するほどには十分ではないことを予想させる。

このような調査研究の結果からすれば、たしかに個々の図形について指導の具体的な改善を漸次進めていくことも必要であろうが、同時に図形に対する児童・生徒の認識に係わる基本的な問題をあらためて設定し、考察することが必要である。児童・生徒が図を見る場合に一定の傾向があるのか、あるいは図に対する見方はどのように変化し、授業の中で示される図に対する特定の見方をどのような過程を経て彼らは共有し、獲得するようになるのか。かような認識論的な問題が、個々の図形指導の指導方法のあり方と基本的に係わる問題であろうし、これらを経験的にすでに解決された問題として看過せず、あらためて設定し再考察することが必要であろう。換言すれば、特定の図形を表す図に対する個々の生徒の見方の相違という状況を、数学と児童・生徒との認識論的關係の

問題の枠組みの中で捉え、考察することが必要である。

本研究では、このように同一の図に対する異なる見方が生徒間に生じる状況に注目し、児童・生徒の図形認識の特質という問題をあらためて主題化しようとするものである。すなわち個々の図形の授業で観察され、経験的に知られている授業で図形の指導で特定の図形として認識することが要求される対象(図)を中学生はどのように認識しているのか、ということが本研究の中心的課題である。また本研究は実際的な調査結果等を基礎的な資料としながら、児童・生徒の数学的認識を捉える枠組み(山本, 1986-1990)を検討し、数学的認識の成立過程を把握しようとする試みの基礎研究の一つとして位置づけられるものである。

上述の問題意識の中で本研究は、空間図形のなかでも最も基本的な図形である「角柱」を取り上げ、与えられた見取図が、角柱か否かを判断するアンケート調査によって空間図形認識の特質を明らかにしようとしたものである。一般に、ある見取図が角柱を表しているかどうかの認識は、どの面をその底面と見なすかに依存する。すなわち、上と下の面を底面として上下方向の平行移動によって構成されている空間図形として見取図を見なして、それが角柱と認識される場合だけではなく、例えば側面を底面として、底面の前後あるいは左右の平行移動によって構成されている空間図形として見取図を見なして、それが角柱と認識される場合もありうる。直方体の場合には、どの面を底面と見なすかに依存せずそれは角柱と見なせるが、一般の空間図形について角柱か否かの判断は、どの面を底面と見なすか、あるいはどの方向の平行移動によって構成された図形と見なすかに依存する。したがって、生徒が教科書等の図などから「角柱の底面は、空間図形の上と下にある面である。」という知識が形成したり、あるいは「角柱は、ある平面の上下方向の平行移動によって構成される空間図形である。」という知識を形成している場合には、上下方向以外の平行移動で構成されたと見なせる空間図形であっても角柱とは判断しない場合が予想される。このことは、見取図から同じ空間図形が主体の内部に表象されたとしても、空間図形の「底面」についての理解、あるいは空間図形の「平行移動」についての理解の違いによって角柱か否かの判断は異なることを意味している。このように、見取図を特定の空間図形と認識するか否かは、単に見取図から特定の空間図形を表象できるか否かに帰着するものではなく、幾何的な知識と関連する問題である。このことの端的な例として取り上げたのが角柱である。

2. 研究の方法

中学生の見取図に対する認識の傾向とその特徴を明らかにするために、大学生、一般人に対してもアンケート調査を実施した。アンケートは、54個の見取図から構成し、各々に対して角柱か否かを判断してもらう方法で行った。54個の見取図のなかには、配置を変えた同じ見取図(平面図形として合同な図形)が3つ含まれており、実質上は18種の見取図から構成されている。それらを底面の上下方向の平行移動、左右方向の平行移動、そして前後方向の平行移動という3つの方向性を考慮して置き換え、それらをランダムに配列してアンケート用紙を作成した。(資料1)

被験者(総数458名):中学生;熊本市内公立中学校233名(第1学年:81名,第2学年:78名,第3学年:74名)大学生;熊本大学教育学部3年生126名,一般人;99名

調査時期:中学第1学年は昭和63年2月角柱について学習以前に調査し,第2,3学年については,同年3月,一般の人については30才前後の女性を中心として,同年4,5月に実施した。大学生は,教育学部3年生を対象として同年12月に実施した。

3. 結果と考察

このアンケート調査から明らかになったことは、以下の通りである。

(1) 中学生の学年間の見方の差

表1によれば、見取図を判断する中学生の学年間に角柱についての判断の顕著な差は認められない。角柱についての指導は小学校6年生、中学校第1学年で行われている実情でありながら、今回の調査では、その指導の効果は見られないといえよう。このような状況は、空間図形に関する指導上の問題というよりも、中学校における空間図形指導の実情（国宗他，1985）の結果の一端を表しているのかも知れない。

表1 角柱と判断した比率（中学生）

問題番号	1学年	2学年	3学年	問題番号	1学年	2学年	3学年
1	86.6	87.2	89.2	28	39.0	29.5	16.2
2	46.3	47.4	56.8	29	84.1	80.8	91.9
3	95.1	92.3	97.3	30	79.3	78.2	79.7
4	59.8	60.3	55.4	31	91.5	91.0	95.9
5	37.8	50.0	29.7	32	54.9	44.9	63.5
6	67.1	73.1	62.2	33	34.1	47.4	36.5
7	46.3	43.6	45.9	34	11.0	19.2	16.2
8	52.4	48.7	52.7	35	59.8	56.4	67.6
9	54.9	47.4	63.5	36	90.2	87.2	90.5
10	47.6	42.3	47.3	37	36.6	39.7	29.7
11	62.2	57.7	70.3	38	43.9	32.1	51.4
12	90.2	88.5	85.1	39	47.6	51.3	50.0
13	47.6	41.0	54.1	40	78.0	85.9	77.0
14	92.7	93.6	95.9	41	78.0	78.2	90.5
15	45.1	38.5	51.4	42	90.2	92.3	95.9
16	79.3	78.2	85.1	43	30.5	25.6	16.2
17	84.1	78.2	79.7	44	50.0	39.7	31.1
18	45.1	39.7	45.9	45	54.9	55.1	73.0
19	90.2	91.0	97.3	46	89.0	91.0	97.3
20	86.6	85.9	91.9	47	53.7	37.2	59.5
21	52.4	38.5	59.5	48	59.8	50.0	70.3
22	35.4	24.4	14.9	49	59.8	70.5	59.5
23	47.6	44.9	55.4	50	53.7	33.3	55.4
24	12.2	20.5	14.9	51	78.0	65.4	71.6
25	46.3	59.0	47.3	52	57.3	59.0	64.9
26	64.6	70.5	62.2	53	11.0	15.4	13.5
27	56.1	48.7	62.2	54	81.7	79.5	91.9 (%)
					n = 82	n = 78	n = 74

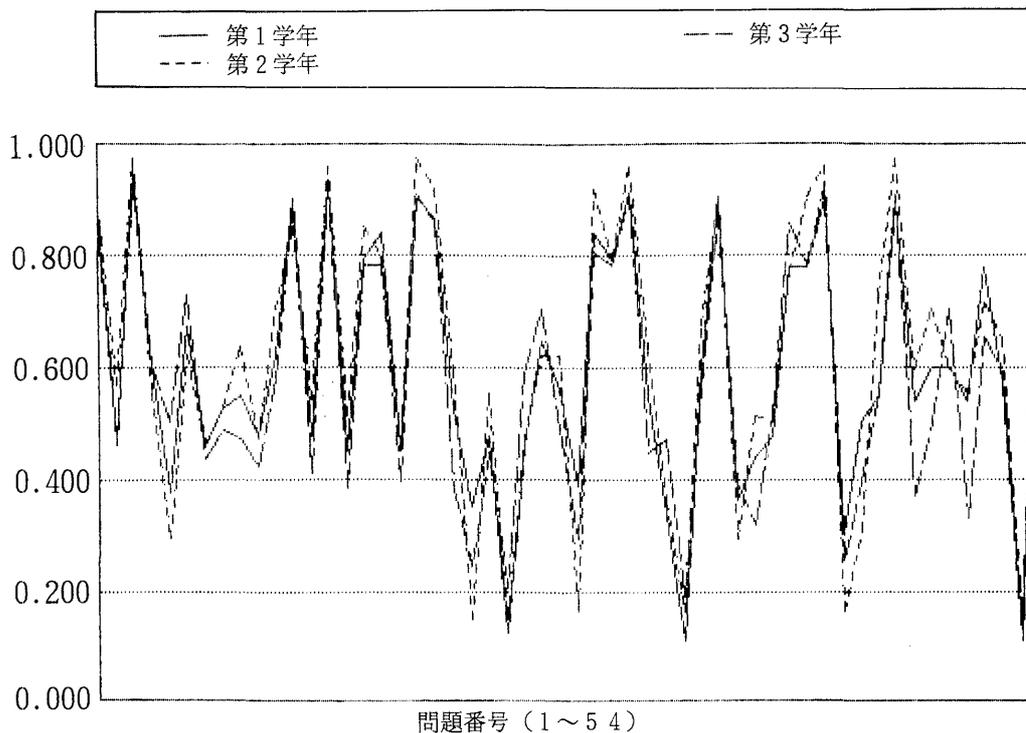


図1 角柱と判断した割合 (中学1. 2. 3年)

(2) 中学生, 大学生, 一般人の見取図の見方の違い

中学生, 大学生, 一般人の集団では見取図を角柱としてみる見方に違いがあるかを検討するために以下のような手順で χ^2 検定 (母集団が異なる場合) を行った.

配置を変えた同じ見取図3つに対して「すべて角柱と見なす場合」, 「すべて角柱と見なさない場合」, 「あるものは角柱と見なし, 別のものは見なさない場合」の三つ判断について中学生, 大学生, 一般人の集団間で有意差があるかどうかについて検定を行った. 18種の見取図すべてに行った検定の結果は以下の通りである.

表2 (母集団が異なる場合の χ^2 検定の結果)

見取図1	72.263897 **	見取図10	63.940918 **
見取図2	40.150094 **	見取図11	65.92045 **
見取図3	31.135892 **	見取図12	49.526482 **
見取図4	10.942475 ** (df = 2)	見取図13	66.600479 **
見取図5	9.6403744 ** (df = 2)	見取図14	54.320852 **
見取図6	9.8308017	見取図15	8.9600851
見取図7	19.208086 **	見取図16	12.830116
見取図8	59.605229 **	見取図17	12.814603 ** (df = 2)
見取図9	20.245764 ** (df = 2)	見取図18	34.469515 **

df = 4, $\chi^2 = 13.277$, ** p < .01 df = 2, $\chi^2 = 9.219$, ** p < .01

その結果, 大学生, 中学生, 一般人の各集団で有意差が認められた見取図が15種, 認められな

かったものが3種であった。見取図の見方におけるその配置の影響に関して、中学生と大人の間には一般に差があると言えるが、見取図によっては見方に差があるとは言えないものもあり、一概に中学生とは異なるとはいえない。以下の見取図は、有意差（有意水準1%）が認められなかった見取図である。

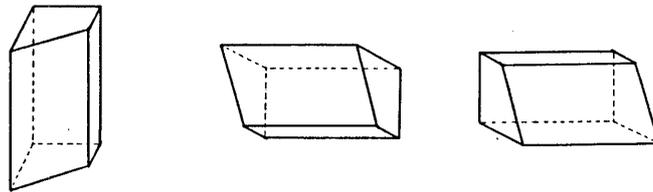


図2 見取図6

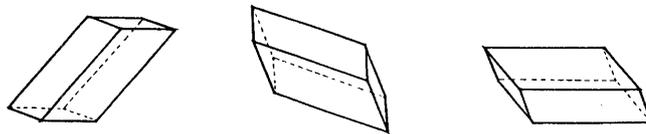


図3 見取図15

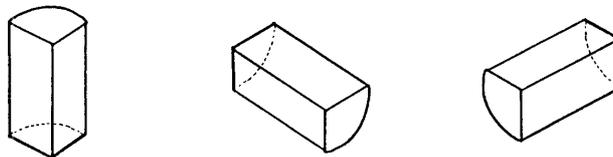


図4 見取図16

(3) 18種の見取図に対する中学生の見方

同じ見取図を配置を変えて角柱か否かを中学生に判断させた場合、一貫した判断がなされない場合があることが予想される。そこで18種の見取図のそれぞれに対して、(2)と同様、同じ三つの見取図について「すべて角柱と見なす場合」、「すべて角柱と見なさない場合」、「あるものは角柱と見なし、別のものは見なさない場合」という三つ判断の有意差があるのかについて χ^2 検定（同一母集団）を行った。以下の表は各見取図について一般人、大学生、中学生（1，2，3年生）のそれぞれについて検定を行った結果である。

表3 (同一母集団の χ^2 検定の結果)

	一般人	大学生	中1生	中2生	中3生
見取図1	19.91**	155.67**	12.17**	10.62**	7.00**
見取図2	38.29**	202.13**	70.27**	55.35**	46.73**
見取図3	109.03**	252.00**	66.02**	53.95**	99.11**
見取図4	153.78**	246.00**	101.07**	104.75**	130.57**
見取図5	143.10**	240.10**	109.56**	99.92**	124.97**
見取図6	43.63**	113.32**	44.95**	27.45**	35.86**
見取図7	25.00**	57.07**	2.95	2.60	15.11**
見取図8	13.09**	121.53**	2.66	5.48	4.00
見取図9	63.43**	191.47**	56.37**	47.56**	66.03**
見取図10	28.44**	94.94**	5.88	2.91	1.32
見取図11	11.89**	116.78**	.61	3.84	6.68
見取図12	10.39**	62.39**	.32	2.68	.76
見取図13	11.89**	102.28**	1.27	1.90	5.70
見取図14	2.59	51.88**	4.20	1.97	5.22
見取図15	4.39	11.66**	11.80**	17.64**	10.24**
見取図16	65.58**	104.58**	18.02**	34.96**	76.24**
見取図17	137.57**	217.21**	110.15**	69.38**	71.70**
見取図18	33.85**	132.76**	10.41**	2.83	20.46**

$$\chi^2 = 9.219, \text{ d f} = 2, \text{ ** } p < .01$$

中学校第1, 2, 3学年とも18種の見取図のうち12種の見取図に対しては三つの判断の間に有意差が認められたが, その他6種の見取図(見取図8, 10, 11, 12, 13, 14)に対しては有意差が認められなかった。一方大学生の場合には18種すべてに対して有意差が認められ, 一般人の場合には16種の見取図に対して有意差が認められた。

この結果からいえることは, 中学生は, 特に大学生と比較して, 同一の見取図に対して一貫した見方がされない傾向があるということである。すなわち, 中学生の集団としての傾向として, 配置を変えた同一の3つの見取図に対して, 角柱か否かの判断が一貫するとはいえないことを示唆する結果である。以下に示した見取図は, 同一の見取図に対して三つの判断の有意差が認められなかった例である。(ただし, 「○○○」は, 3つの見取図すべてを角柱と判断した割合を表し, 「×××」は, すべて角柱と判断しなかった割合を表し, 「その他」はそれ以外の判断を表している。)

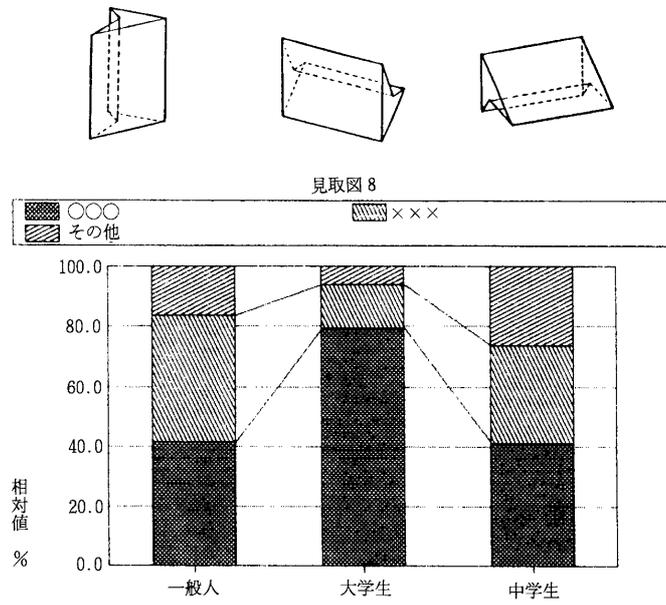


図 5 見取図 8 に対する一般人、大学生、中学生の反応

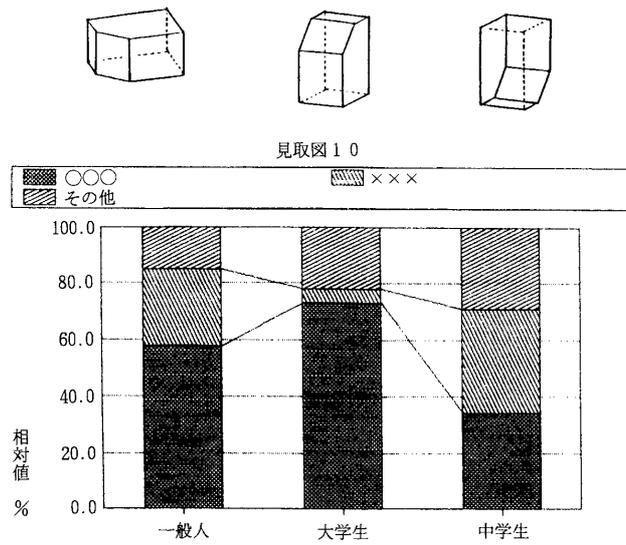


図 6 見取図 10 に対する一般人、大学生、中学生の反応

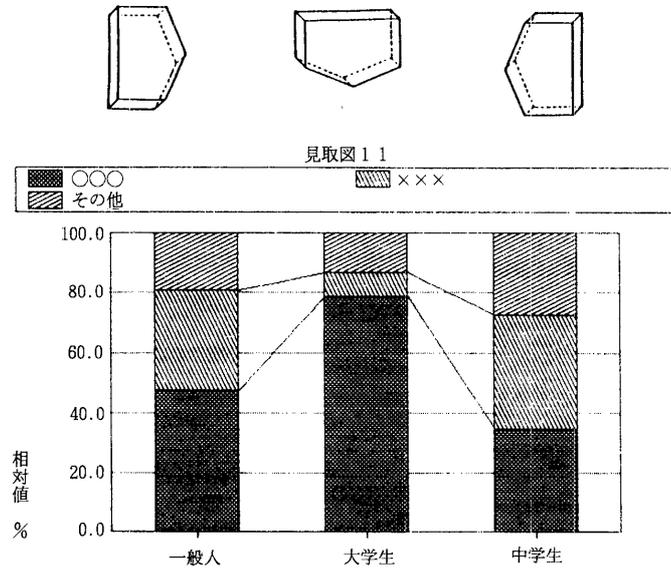


図 7 見取図 1 1 に対する一般人、大学生、中学生の反応

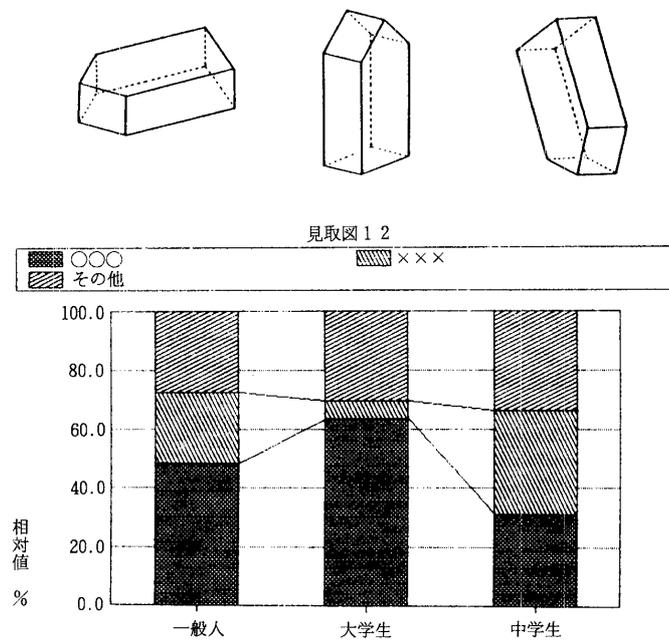


図 8 見取図 1 2 に対する一般人、大学生、中学生の反応

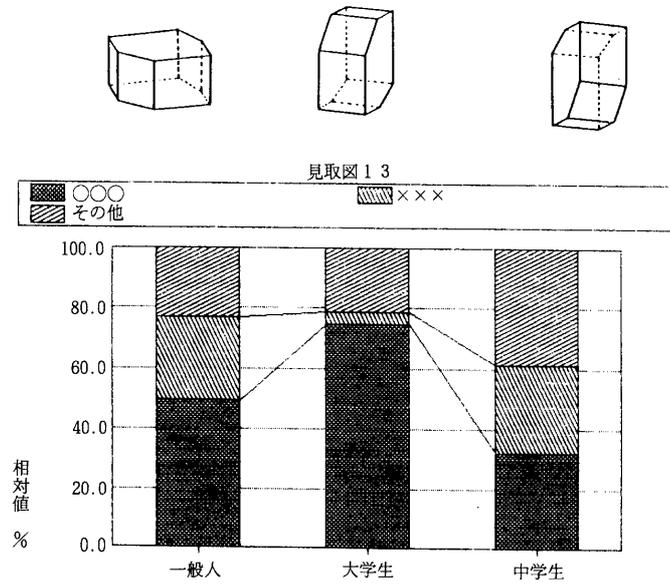


図 9 見取図 1 3 に対する一般人、大学生、中学生の反応

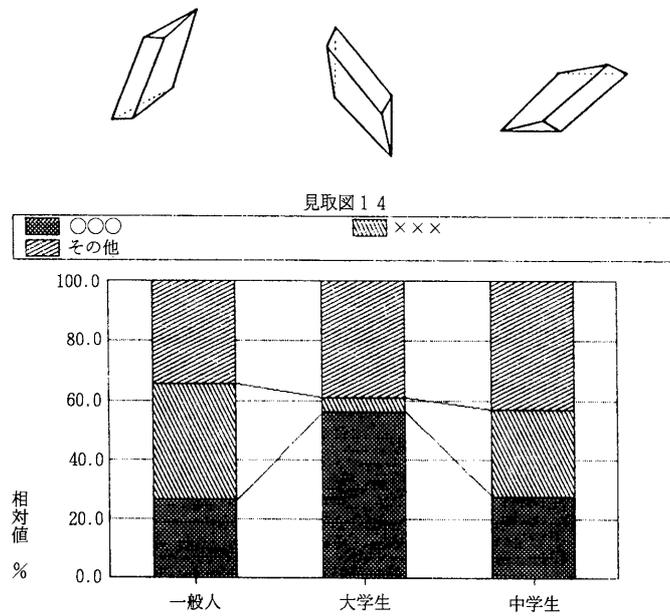


図 1 0 見取図 1 4 に対する一般人、大学生、中学生の反応

(4) 見取図の見方とその配置

先に述べたように、見取図が角柱かどうかを判断する場合、どの面を底面と見るかが問題となる。教科書等で示されている角柱の見取図から当初予想されたことは、見取図自体が同じ場合、底面の上下方向への平行移動によって構成されると見なせる見取図の方が、他の方向（左右、前後）への平行移動を考えなければならない見取図の方よりも、角柱と判断されやすいのではないかということであった。そこで、明らかに角柱であると判断できる見取図4と、角柱ではない見取図18に対する生徒の反応を指標として、以下のように中学生全体から二つのタイプの集団を抽出し分析を行った。ただし、以下の文中の「○○○」の表記の意味は、見取図の配置に関係なく3つの見取図を角柱とみなす判断、「×××」は、見取図の配置に関係なく3つの見取図を角柱とみなさない判断、そして「○××」は、底面の上下方向への平行移動によって構成されると見なせる見取図は、角柱とみなすが、他は角柱とみなさない判断を表している。

集団A；見取図4のすべてを角柱と判断し、見取図18のすべてを角柱と判断しなかった生徒（140名 中学生全体の60.1%）

集団B；見取図4のすべてを角柱と判断し、見取図18のすべても角柱と判断した生徒（81名 中学生全体の34.8%）

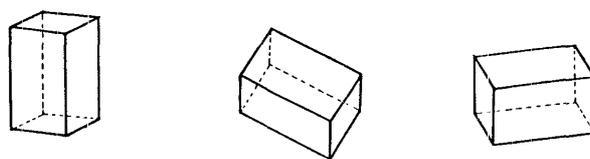


図1.1 見取図4

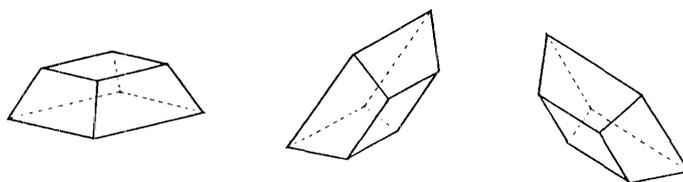


図1.2 見取図18

角柱について基本的な理解していると思われる集団（集団A）とそうではない集団（集団B）の違いについて以下のような検討を行った。平行移動の方向を見直さなければ角柱と見なせない見取図2，見取図6，見取図7，見取図12について全データ（合計221名）を抽出し，分析を行った。

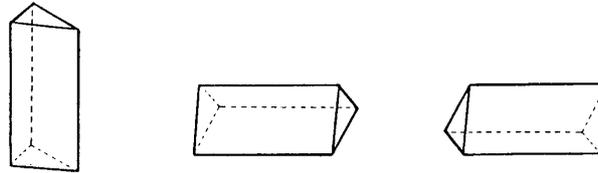


図13 見取図2

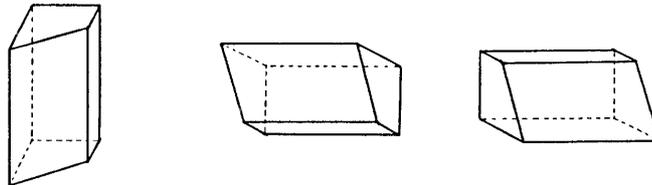


図14 見取図6

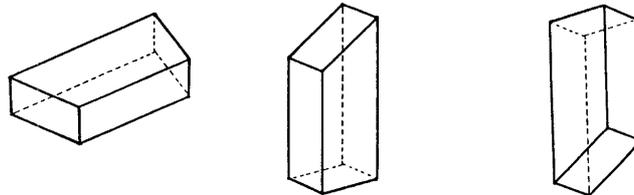


図15 見取図7

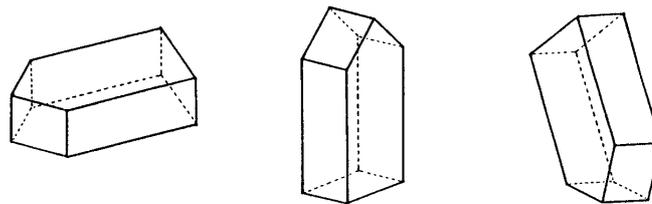


図16 見取図12

	集団A(140)	集団B(81)
①見取図2, 6, 7, 12の全てに対して「○○○」と判断した生徒	22	14
②見取図2, 6, 7, 12の全てに対して「×××」と判断した生徒	0	0
③見取図2, 6, 7, 12の全てに対して「○××」と判断した生徒	0	0

(人数)

さらに見取図2, 6, 7, 12の任意の二つについて「○××」と判断している中学生について調べた結果は以下の通りである。

	集団A(140)	集団B(81)
④見取図2と6の両方に各々○××とした生徒	1	1
⑤見取図2と7の両方に各々○××とした生徒	0	0
⑥見取図2と12の両方に各々○××とした生徒	1	1
⑦見取図6と7の両方に各々○××とした生徒	0	0
⑧見取図6と12の両方に各々○××とした生徒	4	4
⑨見取図7と12の両方に各々○××とした生徒	3	3

(人数)

二つの集団ともにその数は少数(4名以下)にとどまり、顕著な特徴は見出されなかった。すなわち、見取図自体が同じ場合、底面の上下方向への平行移動によって構成されると見なせる見取図の方が、他の方向(左右, 前後)への平行移動を考えなければならない見取図の方よりも、角柱と判断されやすいということ支持する結果得られなかった。しかもそのことは、角柱について理解されている集団Aと理解されていない集団Bの違いを顕著に示す特徴であるともいえなかった。

4. 結 語

今回のアンケート調査を行った結果明らかになったことは、以下のことである。

- (1)中学生の学年間には空間図形認識について顕著な差は見いだされなかった。
- (2)中学生は空間図形認識に関して大学生、一般人とは異なる傾向にある。

特に、結果と考察(3)をもとにしていえることは、中学生の場合、配置を変えた同一の3つの見取図に対して、角柱か否かの判断が一貫するとはいえない傾向がある。このことが特に大学生と比較して中学生の集団が空間図形認識について異なる点である。このことは、生徒の図形認識の仕方にはかなりばらつきがあるという従来からの指摘(国宗 1985)と一致している点である。

- (3)教科書等に示されている角柱の見取図から考えると、底面が上下に位置した見取図が角柱と判断されやすいのではないかと予想されたが、今回の調査結果とその分析からそれを支持する結果は見いだされなかった。

ところで、個々の見取図について判断する過程は、一定の既存の知識にもとづきながら、漸次見取図が角柱か否かの判断が行われると仮定すると、底面が上下に位置した見取図が角柱と判断されやすいのではないかとわれわれが予想するのも自然なことのように思われる。しかし、実際は、このような予想を支持する結果は今回得られなかった。見取図を見ながら、角柱か否かの判断を行っていく過程は、一定の知識にもとづいて行われるというのではなく、むしろ判断を何回か行っていく過程で、生徒自身が持つ既存の知識そのものが生徒の内部で自己修正されいく過程ではないか、ということを今回の調査結果は示しているように思われる。すなわち、当初は角柱でないかと判

断した見取図についての判断が修正されたり、あるいはその逆の場合がアンケートに答えていく過程で起こったのではないかということを想起させる調査結果である。また、このような判断の修正という状況は、多くの生徒のアンケート用紙の解答欄において判断が修正された形跡があるという事実からも推測することができる。しかしながら、今回の調査では最終的な反応だけに注目し、個々の判断の修正という点は配慮したものではなかったため、上述の生徒の内部における自己修正過程の存在ということは、今のところ一つの仮説にすぎない。今回の調査の結果から示唆された生徒の図形認識についての特質に関する理論的説明、及び図形認識における自己修正過程の確認とその様相を検討することが今後の課題である。

5. 参考文献

- 飯島康男 1988 算数・数学の指導に取り入れる実験の意義. 数学教育学論究, 49・50, 3-27.
国宗進他 1985 空間図形の指導について. 数学教育, 67, 24-32 .
小関熙純他 1984 図形認知の発達の研究——「平行四辺形」概念の形成過程について——. 数学教育学論究, 41・42, 3-23.
COOPER, M. & SWELLER, J. [1989] Secondary school students' representations of solids. Journal for Research in Mathematics Education, 20, 2, 202-212.
BEN-CHAIM, D., LAPPAN, G., & HOUANG, R. T. [1989] Adolescents' ability to communicate spatial information: analyzing and effecting students' performance. Educational Studies in Mathematics, 20, 121-146.
山本信也 1986 数学的認識の基礎構造 熊本大学教育学部紀要(人文科学) 35, 23-34
山本信也 1990 算数・数学科授業の基底的構造 平林一栄先生頌寿記念出版会編 数学教育のパーспекティブ 聖文社 248-266
岩原信九郎 1989 教育と心理のための推計学 日本文化科学社

(1991年5月20日 受理)

資料：18種の見取図（各見取図の右上の番号は、調査用紙での番号を示す）

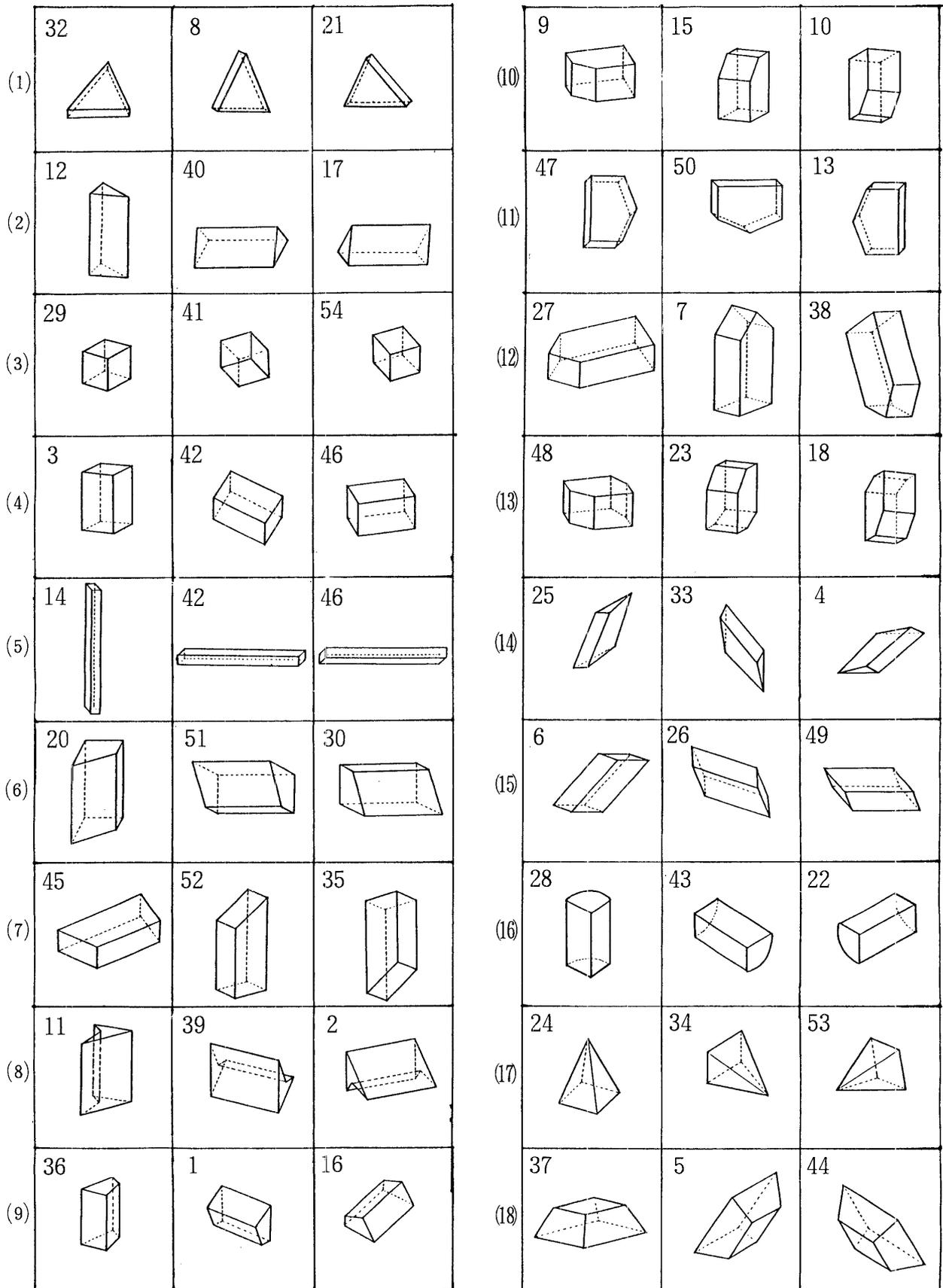


図17