熊本大学教育学部紀要，人文科学
第49号，75－92，2000

三要因尤度比検定と χ^2 検定及びその残差分析法

篠　原　弘　章

Maximum Likelihood Test, χ^2 Test and Residual Analysis in Three-Dimensional-Contingency Tables

Hirofumi SHINOHARA

（Received September 1, 2000）

Maximum likelihood test or Chi-square test for three-dimensional contingency tables has eight models. Seven out of these eight models have direct estimates of expectant frequencies. The remaining one model requires indirect estimates of expected frequencies by iterative method. This model was shown in Shinohara（1989）.

This paper shows seven models of maximum liklihood test, chi-square test and residual analysis for three-dimensional tables with direct estimates. These seven models are useful to understand many hierarchical log-linear models.

Key words : maximum likelihood test, chi-square test, residual analysis

は じ め に

多重クロス表についての体系的な解説は，Bishop, Fienberg and Holland（1975）や Haberman（1978），Fienberg（1977）に示されている．

3要因クロス表の検定モデルについて，弓野（1981）は18のモデルを期待値とともにリストしたが，これらのモデルは，実質的には8種類のモデルにまとめることができる．この8種類のうち1個は期待値を繰り返し法で推定するものである．他の残り7個は期待値を直接算出できる．Haberman（1978, p. 231）は，期待値を直接計算可能な7つのモデルの残差分析法を表にまとめている．

ここでは，Haberman による残差分析の誤差成分に関する一般公式を適用して，期待値が直接算出可能な7個の残差分析法の公式の証明を行うと同時に Sutcliffe（1957）流の尤度比値（あるいは x^2，以下尤度比は G^2 で示す）の分割法を示す．

Table 1 に示した8個のモデルは，3要因クロス表における尤度比（または x^2）検定法の期待値と自由度である．モデル2～4は，周辺度数を固定した場合のモデルであり，これは日常よく遭遇する仮説検証モデルで，要因間の関連の意味が分かりやすい．自由度は一般式のほかに，3個の要因がすべて2カテゴリーからなるときの，それぞれの全体の自由度もあわせて示した．

以下の記述や表では，要因を示す添字は，要因Aを i＝1, 2, …, p まで，要因Bを j＝1, 2, …, q まで．要因Cを k＝1, 2, …, r までと表記する．また，n^{A}_{i}，n^{B}_{j}，n^{C}_{k}は，それぞれ要因A，B，Cの i, j, k カテゴリーのセルでの人数．さらに，2要因集計表での人数 n^{AB}_{ij}，n^{AC}_{ik}，n^{BC}_{jk} は，それぞれ AB 集計，AC 集計，BC 集計の各セルの人数である．n^{ABC}_{ijk}は3要因から成る集計表の各セルの人数である．N は被験者総数を表すものとする．

3要因表の各セルの度数 n^{ABC}_{ijk}に対応する期待値は，$\hat{m}^{ABC}_{ijk}$で示す．2要因集計表の AB 集計，AC 集計，BC 集計の各セルの期待値をそれぞれ$\hat{m}^{AB}_{ij}$，$\hat{m}^{AC}_{ik}$，$\hat{m}^{BC}_{jk}$で，1要因集計表である A 集計，

B 集計，C 集計の期待値をそれぞれ$\hat{m}^{A}_{i}$，$\hat{m}^{B}_{j}$，$\hat{m}^{C}_{k}$で示す．

各モデルでの残差成分，尤度比および x^2 統計量

Haberman（1978，p. 275）は 4 要因クロス表の期待値$\hat{m}$を（1）式で書き表わし，（2）式で示す残差成分（r_{ijkl}）の分母の平方根の中を値$\hat{C}_{ijkl}$を（3）式による一般式で表現している．この一般式は三要因クロス表の場合でも適用できる．

$$\hat{m}_{ijkl}=\frac{1}{c}\times n^{T(1)}\times\left(\frac{n^{T(2)}}{n^{y(2)}}\right)\times\ \cdots\ \times\left(\frac{n^{T(b)}}{n^{y(b)}}\right) \quad \cdots (1)$$

と定義したとき，残差成分 r_{ijkl} は

$$r_{ijkl}=\frac{n_{ijkl}-\hat{m}_{ijkl}}{\sqrt{\hat{C}_{ijkl}}} \quad \cdots (2)$$

$$\hat{C}_{ijkl}=\hat{m}_{ijkl}\ \left\{1-\hat{m}_{ijkl}\sum_{a=1}^{b}(1/n^{T(a)})+\hat{m}_{ijkl}\sum_{a=2}^{b}(1/n^{V(a)})\right\} \quad \cdots (3)$$

以下に，三要因クロス表についての各モデルでの残差分析法の算出式を導出する．
例えば，3 要因の独立モデル（A，B，C 固定モデル）での期待値$\hat{m}^{ABC}_{ijk}$は

$$\hat{m}^{ABC}_{ijk}=\frac{n^{A}_{i}}{c}\times\left(\frac{n^{B}_{j}}{N}\right)\times\left(\frac{n^{C}_{k}}{N}\right) \quad \cdots (4)$$

で示される．

さて，表現を簡単にするために，本稿では（2）式の分母全体を d として

$$d^{ABC}_{ijk}=\hat{C}^{1/2}_{ijk} \quad \cdots (5)$$

とおくと，（2）式の残差成分 r_{ijkl} は，3 要因の場合（6）式で表せる．

$$r^{ABC}_{ijk}=\frac{n^{ABC}_{ijk}-\hat{m}^{ABC}_{ijk}}{\sqrt{\hat{C}^{ABC}_{ijk}}}=\frac{n^{ABC}_{ijk}-\hat{m}^{ABC}_{ijk}}{d^{ABC}_{ijk}} \quad \cdots (6)$$

ABC 集計表全体の尤度比の x^2 統計量（以下 G^2 で表記する）は，いずれの 8 つのモデルも，

$${}_{T}G^{2}_{ABC}=\sum_{i=1,}^{p}\ \sum_{j=1,}^{q}\ \sum_{k=1}^{r}\left\{n^{ABC}_{ijk}\log_{e}(n^{ABC}_{ijk}/\hat{m}^{ABC}_{ijk})\right\} \quad \cdots (7)$$

の一般公式によって計算できる．また，通常の x^2 統計量も次の一般公式，

$${}_{T}x^{2}_{ABC}=\sum_{i=1,}^{p}\ \sum_{j=1,}^{q}\ \sum_{k=1}^{r}\left\{(n^{ABC}_{ijk}-\hat{m}^{ABC}_{ijk})^{2}/\hat{m}^{ABC}_{ijk}\right\} \quad \cdots (8)$$

によって求めることができる．また，各要因集計での期待値は，Sutcliffe が述べているように

A，B，C 集計では，
$$\hat{m}_i^A=\sum_{j=1,}^{q}\sum_{k=1}^{r}\hat{m}_{ijk}^{ABC},\quad \hat{m}_j^B=\sum_{j=1,}^{p}\sum_{k=1}^{r}\hat{m}_{ijk}^{ABC},\quad \hat{m}_k^C=\sum_{i=1,}^{p}\sum_{j=1}^{q}\hat{m}_{ijk}^{ABC}$$

AB，AC，BC 集計では，
$$\hat{m}_{ij}^{AB}=\sum_{k=1}^{r}\hat{m}_{ijk}^{ABC},\quad \hat{m}_{ik}^{AC}=\sum_{j=1}^{q}\hat{m}_{ijk}^{ABC},\quad \hat{m}_{ik}^{BC}=\sum_{i=1}^{p}\hat{m}_{ijk}^{ABC},$$

となるので，各要因効果の変動源の尤度比値（またはx^2）の算出は，それぞれの定義式を用いるとコンピュータ・プログラムの作成には都合がよい．また，各モデルで周辺度数が固定された場合は，それぞれの変動源の尤度比（またはx^2）は 0 となる．自由度も固定された部分は 0 となる．全体の自由度は，固定された変動源部分の一般式による自由度を減じたものとなる（Table 1-3. 1 ～ Table 1-3. 4 を参照）．自由度の一般式はモデル 8 の Table 1-3. 4 であらわされる．

以下に 8 種類の各モデルについて残差成分の公式を導出して証明を行う．

Table 1 3 要因クロス表の 8 つの尤度比検定モデルの期待値と自由度*

	固定する要因	期待値 ($\hat{m}$)	自由度 (df)	各要因カテゴリーが全て２の時のdf
1	AB,AC,BC	$\hat{m}_{ijk}^{ABC}$は繰り返し法による	(p-1)(q-1)(r-1)	1
2	AB,AC	$\hat{m}_{ijk}^{ABC}=n_{ij}^{AB}n_{ik}^{AC}/n_i^A$	p(q-1)(r-1)	2
3	AB,C	$\hat{m}_{ijk}^{ABC}=n_{ij}^{AB}n_k^C/N$	(pq-1)(r-1)	3
4	A,B,C	$\hat{m}_{ijk}^{ABC}=n_i^An_j^Bn_k^C/N^2$	(pqr-p-q-r+2)	4
5	固定したAB_{ij}毎にCは均等分布	$\hat{m}_{ijk}^{ABC}=n_{ij}^{AB}/r$	pq(r-1)	4
6	A,B固定,Cは均等分布	$\hat{m}_{ijk}^{ABC}=n_i^An_j^B/(Nr)$	(pqr-p-q+1)	5
7	A固定,BCで均等分布	$\hat{m}_{ijk}^{ABC}=n_i^A/(qr)$	p(qr-1)	6
8	ABCのすべてのセルで均等分布	$\hat{m}_{ijk}^{ABC}=N/(pqr)$	pqr-1	7

* 要因A，B，Cのそれぞれのカテゴリー数をp，q，rとする．

Table 2 3 要因クロス表の残差分析法の残差成分の算式

固定する要因	残差成分(r_{ijk})の算出式
1 AB,AC,BC	$r_{ijk}=\dfrac{n_{ijk}^{ABC}-\hat{m}_{ijk}^{ABC}}{[\hat{m}_{ijk}^{ABC}]^{1/2}}$ または $r_{ijk}^{*}=\dfrac{n_{ijk}^{ABC}-\hat{m}_{ijk}^{ABC}}{[\hat{m}_{ijk}^{ABC}(1-n_{ij}^{AB}/n_i^A)(1-n_{ik}^{AC}/n_i^A)]^{1/2}}$
2 AB,AC	$r_{ijk}=\dfrac{n_{ijk}^{ABC}-n_{ij}^{AB}\cdot n_{ik}^{AC}/n_i^A}{[(n_{ij}^{AB}\cdot n_{ik}^{AC}/n_i^A)(1-n_{ij}^{AB}/n_i^A)(1-n_{ik}^{AC}/n_i^A)]^{1/2}}$
3 AB,C	$r_{ijk}=\dfrac{n_{ijk}^{ABC}-n_{ij}^{AB}\cdot n_k^C/N}{[(n_{ij}^{AB}\cdot n_k^C/N)(1-n_{ij}^{AB}/N)(1-n_k^C/N)]^{1/2}}$
4 A,B,C	$r_{ijk}=\dfrac{n_{ijk}^{ABC}-n_i^An_j^Bn_k^C/N^2}{[(n_i^An_j^Bn_k^C/N^2)(1-n_i^An_j^B/N^2-n_i^An_k^C/N^2-n_j^Bn_k^C/N^2+2n_i^An_j^Bn_k^C/N^3)]^{1/2}}$
5 固定したAB_{ij}ごとにCは均等	$r_{ijk}=\dfrac{n_{ijk}^{ABC}-n_{ij}^{AB}/r}{[(n_{ij}^{AB}/r)(1-1/r)]^{1/2}}$
6 A,B固定,C均等	$r_{ijk}=\dfrac{n_{ijk}^{ABC}-n_i^An_j^B/(Nr)}{[(n_i^An_j^B/(Nr))\{1-1/r+(1/r)(1-n_i^A/N)(1-n_j^B/N)\}]^{1/2}}$
7 A固定,BCで均等	$r_{ijk}=\dfrac{n_{ijk}^{ABC}-n_i^A/(qr)}{[(n_i^A/(qr))\{1-1/(qr)\}]^{1/2}}$
8 ABCで均等	$r_{ijk}=\dfrac{n_{ijk}^{ABC}-N/(pqr)}{[(N/(pqr))\{1-1/(pqr)\}]^{1/2}}$

注　$\hat{m}_{ijk}^{ABC}$は繰り返し法によって推定した期待値
$|r_{ijk}|>1.65$なら$p<.10$，$|r_{ijk}|>1.96$なら$p<.05$，$|r_{ijk}|>2.58$なら$p<.01$(両側検定)

Table 3. 1　モデル１の尤度比検定とその自由度

要因AB, AC, BCを固定するモデル１の期待値$\hat{m}^{ABC}_{ijk}$は、繰り返し法によって推定する

	変動源	各変動源の分割された尤度比(G^2)の計算式	自由度(df)
G[8]	全体	$G^2_{ABC}=2\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q}\sum_{k=1}^{r}\{n^{ABC}_{ijk}\log_e(n^{ABC}_{ijk}/\hat{m}^{ABC}_{ijk})\}$	(p-1)(q-1)(r-1)

Table 3. 2　モデル２の尤度比の分割とその自由度

ＡＢおよびＡＣは固定するモデル２の期待値は、
$\hat{m}^{ABC}_{ijk}=n^{AB}_{ij}n^{AC}_{ik}/n^{A}_{i}$,　　$\hat{m}^{BC}_{jk}=\sum_{i=1}^{p}\hat{m}^{ABC}_{ijk}=\sum_{i=1}^{p}n^{AB}_{ij}n^{BC}_{jk}/n^{A}_{i}$,

	変動源	各変動源の分割された尤度比(G^2)の計算式	自由度(df)
G[6]	BC	$G^2_{BC}=2\sum\sum\{n^{BC}_{jk}\log_e(n^{BC}_{jk}/\hat{m}^{BC}_{jk})\}$	(q-1)(r-1)
G[7]	ABC	$G^2_{ABC}={}_TG^2-G^2_{BC}$	(p-1)(q-1)(r-1)
G[8]	全体	${}_TG^2=2\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q}\sum_{k=1}^{r}\{n^{ABC}_{ijk}\log_e(n^{ABC}_{ijk}/\hat{m}^{ABC}_{ijk})\}$	p(q-1)(r-1)

Table 3. 3　モデル３の尤度比の分割とその自由度

ＡＢ固定、Ｃ固定とするモデル３の期待値は、
$\hat{m}^{ABC}_{ijk}=n^{AB}_{ij}n^{C}_{k}/N$,　$\hat{m}^{AC}_{ik}=n^{A}_{i}n^{C}_{k}/N$,　$\hat{m}^{BC}_{jk}=n^{B}_{j}n^{C}_{k}/N$

	変動源	各変動源の分割された尤度比(G^2)の計算式	自由度(df)
G[5]	AC	$G^2_{BD}=2\sum\sum\{n^{AC}_{ik}\log_e(n^{AC}_{ik}/\hat{m}^{AC}_{ik})\}$	(p-1)(r-1)
G[6]	BC	$G^2_{BC}=2\sum\sum\{n^{BC}_{jk}\log_e(n^{BC}_{jk}/\hat{m}^{BC}_{jk})\}$	(q-1)(r-1)
G[7]	ABC	$G^2_{ABC}={}_TG^2-G^2_{AB}-G^2_{BC}$	(p-1)(q-1)(r-1)
G[8]	全体	${}_TG^2=2\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q}\sum_{k=1}^{r}\{n^{ABC}_{ijk}\log_e(n^{ABC}_{ijk}/\hat{m}^{ABC}_{ijk})\}$	(pq-1)(r-1)

Table 3. 4　モデル４の尤度比の分割とその自由度

要因Ａ、Ｂ、Ｃをそれぞれ固定した３要因独立モデルの期待値は、
$\hat{m}^{ABC}_{ijk}=n^{A}_{i}n^{B}_{j}n^{C}_{k}/N^2$,　$\hat{m}^{AB}_{ij}=n^{A}_{i}n^{B}_{j}/N$,　$\hat{m}^{AC}_{ik}=n^{A}_{i}n^{C}_{k}/N$,　$\hat{m}^{BC}_{jk}=n^{B}_{j}n^{C}_{k}/N$

	変動源	各変動源の分割された尤度比(G^2)の計算式	自由度(df)
G[4]	AB	$G^2_{BC}=2\sum\sum\{n^{AB}_{ij}\log_e(n^{AB}_{ij}/\hat{m}^{AB}_{ij})\}$	(p-1)(q-1)
G[5]	AC	$G^2_{BD}=2\sum\sum\{n^{AC}_{ik}\log_e(n^{AC}_{ik}/\hat{m}^{AC}_{ik})\}$	(p-1)(r-1)
G[6]	BC	$G^2_{BC}=2\sum\sum\{n^{BC}_{jk}\log_e(n^{BC}_{jk}/\hat{m}^{BC}_{jk})\}$	(q-1)(r-1)
G[7]	ABC	$G^2_{ABC}={}_TG^2-G^2_{AB}-G^2_{AC}-G^2_{BC}$	(p-1)(q-1)(r-1)
G[8]	全体	${}_TG^2=2\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q}\sum_{k=1}^{r}\{n^{ABC}_{ijk}\log_e(n^{ABC}_{ijk}/\hat{m}^{ABC}_{ijk})\}$	pqr-p-q-r+2

Table 3. 5　モデル５の尤度比の分割とその自由度

集計表AB_{ij}ごとに要因Ｃは、均等分布を帰無仮説としたモデルの期待値は、
$\hat{m}^{ABC}_{ijk}=n^{AB}_{ij}/r$,　$\hat{m}^{C}_{k}=N/r$, $\hat{m}^{AC}_{ik}=n^{A}_{i}/r$, $\hat{m}^{BC}_{jk}=n^{B}_{j}/r$

	変動源	各変動源の分割された尤度比(G^2)の計算式	自由度(df)
G[3]	C	$G^2_{C}=2\sum\{n^{C}_{k}\log_e(n^{C}_{k}/\hat{m}^{C}_{k})\}$	(r-1)
G[5]	AC	$G^2_{BD}=2\sum\sum\{n^{AC}_{ik}\log_e(n^{AC}_{ik}/\hat{m}^{AC}_{ik})\}-G^2_{C}$	(p-1)(r-1)
G[6]	BC	$G^2_{BC}=2\sum\sum\{n^{BC}_{jk}\log_e(n^{BC}_{jk}/\hat{m}^{BC}_{jk})\}-G^2_{C}$	(q-1)(r-1)
G[7]	ABC	$G^2_{ABC}={}_TG^2-G^2_{AC}-G^2_{BC}-G^2_{C}$	(p-1)(q-1)(r-1)
G[8]	全体	${}_TG^2=2\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q}\sum_{k=1}^{r}\{n^{ABC}_{ijk}\log_e(n^{ABC}_{ijk}/\hat{m}^{ABC}_{ijk})\}$	pq(r-1)

Table 3. 6　モデル6の尤度比の分割とその自由度

AおよびBは固定、C集計の各セルは均等分布を帰無仮説とするモデルの期待値は、
$\hat{m}^{ABC}_{ijk}=n^A_i n^B_j/(Nr)$, $\hat{m}^C_k=N/r$, $\hat{m}^{AB}_{ij}=n^A_i n^B_j/N$, $\hat{m}^{AC}_{ik}=n^A_i/r$, $\hat{m}^{BC}_{jk}=n^B_j/r$

	変動源	各変動源の分割された尤度比(G^2)の計算式	自由度(df)
G[3]	C	$G^2_C=2\sum\{n^C_k\log_e(n^C_k/\hat{m}^C_k)\}$	(r-1)
G[4]	AB	$G^2_{BC}=2\sum\sum\{n^{AB}_{ij}\log_e(n^{AB}_{ij}/\hat{m}^{AB}_{ij})\}$	(p-1)(q-1)
G[5]	AC	$G^2_{BD}=2\sum\sum\{n^{AC}_{ik}\log_e(n^{AC}_{ik}/\hat{m}^{AC}_{ik})\}-G^2_C$	(p-1)(r-1)
G[6]	BC	$G^2_{BC}=2\sum\sum\{n^{BC}_{jk}\log_e(n^{BC}_{jk}/\hat{m}^{BC}_{jk})\}-G^2_C$	(q-1)(r-1)
G[7]	ABC	$G^2_{ABC}={}_TG^2-G^2_{AB}-G^2_{AC}-G^2_{BC}-G^2_C$	(p-1)(q-1)(r-1)
G[8]	全体	${}_TG^2=2\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q}\sum_{k=1}^{r}\{n^{ABC}_{ijk}\log_e(n^{ABC}_{ijk}/\hat{m}^{ABC}_{ijk})\}$	pqr-p-q+1

Table 3. 7　モデル7の尤度比の分割とその自由度

要因A固定、BC集計の全セルで均等分布を帰無仮説とするモデルの期待値は、
$\hat{m}^{ABC}_{ijk}=n^A_i/(qr)$, $\hat{m}^B_j=N/q$, $\hat{m}^C_k=N/r$, $\hat{m}^{AB}_{ij}=n^A_i/q$, $\hat{m}^{AC}_{ik}=n^A_i/r$, $\hat{m}^{BC}_{jk}=N/(qr)$

	変動源	各変動源の分割された尤度比(G^2)の計算式	自由度(df)
G[2]	B	$G^2_B=2\sum\{n^B_j\log_e(n^B_j/\hat{m}^B_j)\}$	(q-1)
G[3]	C	$G^2_C=2\sum\{n^C_k\log_e(n^C_k/\hat{m}^C_k)\}$	(r-1)
G[4]	AB	$G^2_{BC}=2\sum\sum\{n^{AB}_{ij}\log_e(n^{AB}_{ij}/\hat{m}^{AB}_{ij})\}-G^2_B$	(p-1)(q-1)
G[5]	AC	$G^2_{BD}=2\sum\sum\{n^{AC}_{ik}\log_e(n^{AC}_{ik}/\hat{m}^{AC}_{ik})\}-G^2_C$	(p-1)(r-1)
G[6]	BC	$G^2_{BC}=2\sum\sum\{n^{BC}_{jk}\log_e(n^{BC}_{jk}/\hat{m}^{BC}_{jk})\}-G^2_B-G^2_C$	(q-1)(r-1)
G[7]	ABC	$G^2_{ABC}={}_TG^2-G^2_{AB}-G^2_{AC}-G^2_{BC}-G^2_B-G^2_C$	(p-1)(q-1)(r-1)
G[8]	全体	${}_TG^2=2\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q}\sum_{k=1}^{r}\{n^{ABC}_{ijk}\log_e(n^{ABC}_{ijk}/\hat{m}^{ABC}_{ijk})\}$	p(qr-1)

Table 3. 8　モデル8の尤度比の分割とその自由度

ABC集計表の全てのセルでの均等分布を帰無仮説とするモデルの期待値は、
$\hat{m}^{ABC}_{ijk}=N/(pqr)$, $\hat{m}^A_i=N/p$, $\hat{m}^B_j=N/q$, $\hat{m}^C_k=N/r$, $\hat{m}^{AB}_{ij}=N/(pq)$, $\hat{m}^{AC}_{ik}=N/(pr)$, $\hat{m}^{BC}_{jk}=N/(qr)$

	変動源	各変動源の分割された尤度比(G^2)の計算式	自由度(df)
G[1]	A	$G^2_A=2\sum\{n^A_i\log_e(n^A_i/\hat{m}^A_i)\}$	(p-1)
G[2]	B	$G^2_B=2\sum\{n^B_j\log_e(n^B_j/\hat{m}^B_j)\}$	(q-1)
G[3]	C	$G^2_C=2\sum\{n^C_k\log_e(n^C_k/\hat{m}^C_k)\}$	(r-1)
G[4]	AB	$G^2_{BC}=2\sum\sum\{n^{AB}_{ij}\log_e(n^{AB}_{ij}/\hat{m}^{AB}_{ij})\}-G^2_A-G^2_B$	(p-1)(q-1)
G[5]	AC	$G^2_{BD}=2\sum\sum\{n^{AC}_{ik}\log_e(n^{AC}_{ik}/\hat{m}^{AC}_{ik})\}-G^2_A-G^2_C$	(p-1)(r-1)
G[6]	BC	$G^2_{BC}=2\sum\sum\{n^{BC}_{jk}\log_e(n^{BC}_{jk}/\hat{m}^{BC}_{jk})\}-G^2_B-G^2_C$	(q-1)(r-1)
G[7]	ABC	$G^2_{ABC}={}_TG^2-G^2_{AB}-G^2_{AC}-G^2_{BC}-G^2_A-G^2_B-G^2_C$	(p-1)(q-1)(r-1)
G[8]	全体	${}_TG^2=2\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q}\sum_{k=1}^{r}\{n^{ABC}_{ijk}\log_e(n^{ABC}_{ijk}/\hat{m}^{ABC}_{ijk})\}$	pqr-1

Table 4 モデル1～8の諸要因効果の残差成分の計算式

モデル1 G[8] Table 2の1に既出	**モデル2** G[6] $r_{jk}=\dfrac{n^{BC}_{jk}-\hat{m}^{BC}_{jk}}{[\hat{m}^{BC}_{jk}(1-1/n^{B}_{j})(1-1/n^{C}_{k})]^{1/2}}$ G[8] $r_{ijk}=$ Table 2の2に既出
モデル3 G[5] $r_{ik}=\dfrac{n^{AC}_{ik}-\hat{m}^{AC}_{ik}}{[\hat{m}^{AC}_{ik}(1-1/n^{A}_{i})(1-1/n^{C}_{k})]^{1/2}}$ G[6] $r_{jk}=\dfrac{n^{BC}_{jk}-\hat{m}^{BC}_{jk}}{[\hat{m}^{BC}_{jk}(1-1/n^{B}_{j})(1-1/n^{C}_{k})]^{1/2}}$ G[8] $r_{ijk}=$ Table 2の3に既出	**モデル4** G[4] $r_{ij}=\dfrac{n^{AB}_{ij}-\hat{m}^{AB}_{ij}}{[\hat{m}^{AB}_{ij}(1-1/n^{A}_{i})(1-1/n^{B}_{j})]^{1/2}}$ G[5] $r_{ik}=\dfrac{n^{AC}_{ik}-\hat{m}^{AC}_{ik}}{[\hat{m}^{AC}_{ik}(1-1/n^{A}_{i})(1-1/n^{C}_{k})]^{1/2}}$ G[6] $r_{jk}=\dfrac{n^{BC}_{jk}-\hat{m}^{BC}_{jk}}{[\hat{m}^{BC}_{jk}(1-1/n^{B}_{j})(1-1/n^{C}_{k})]^{1/2}}$ G[8] $r_{ijk}=$ Table 2の4に既出
モデル5 G[3] $r_{k}=\dfrac{n^{C}_{k}-\hat{m}^{C}_{k}}{[\hat{m}_{k}(1-1/r)]^{1/2}}$ G[4] なし G[5] $r_{ik}=\dfrac{n^{AC}_{ik}-\hat{m}^{AC}_{ik}}{[\hat{m}^{AC}_{ik}(1-1/r)]^{1/2}}$ G[6] $r_{jk}=\dfrac{n^{BC}_{jk}-\hat{m}^{BC}_{jk}}{[\hat{m}^{BC}_{jk}(1-1/r)]^{1/2}}$ G[8] $r_{ijk}=\dfrac{n^{ABC}_{ijk}-\hat{m}^{ABC}_{ijk}}{[\hat{m}^{ABC}_{ijk}(1-1/r)]^{1/2}}$	**モデル6** G[3] $r_{k}=\dfrac{n^{C}_{k}-\hat{m}^{C}_{k}}{[\hat{m}^{C}_{k}(1-1/r)]^{1/2}}$ G[4] $r_{ij}=\dfrac{n^{AB}_{ij}-\hat{m}^{AB}_{ij}}{[\hat{m}^{AB}_{ij}(1-n^{A}_{i}/N)(1-n^{B}_{j}/N)]^{1/2}}$ G[5] $r_{ik}=\dfrac{n^{AC}_{ik}-\hat{m}^{AC}_{ik}}{[\hat{m}^{AC}_{ik}(1-1/r)]^{1/2}}$ G[6] $r_{jk}=\dfrac{n^{BC}_{jk}-\hat{m}^{BC}_{jk}}{[\hat{m}^{BC}_{jk}(1-1/r)]^{1/2}}$ G[8] $r_{ijk}=\dfrac{n^{ABC}_{ijk}-\hat{m}^{ABC}_{ijk}}{[\hat{m}^{ABC}_{ijk}\{1-1/r+(1-n^{A}_{i}/N)(1-n^{B}_{j}/N)/r\}]^{1/2}}$
モデル7 G[1] なし G[2] $r_{k}=\dfrac{n^{B}_{j}-\hat{m}^{B}_{j}}{[\hat{m}^{B}_{j}(1-1/q)]^{1/2}}$ G[3] $r_{k}=\dfrac{n^{C}_{k}-\hat{m}^{C}_{k}}{[\hat{m}_{k}(1-1/r)]^{1/2}}$ G[4] $r_{ij}=\dfrac{n^{AB}_{ij}-\hat{m}^{AB}_{ij}}{[\hat{m}^{AB}_{ij}(1-1/q)]^{1/2}}$ G[5] $r_{ik}=\dfrac{n^{AC}_{ik}-\hat{m}^{AC}_{ik}}{[\hat{m}^{AC}_{ik}(1-1/r)]^{1/2}}$ G[6] $r_{jk}=\dfrac{n^{BC}_{jk}-\hat{m}^{BC}_{jk}}{[\hat{m}^{BC}_{jk}(1-1/qr)]^{1/2}}$ G[8] $r_{ijk}=\dfrac{n^{ABC}_{ijk}-\hat{m}^{ABC}_{ijk}}{[\hat{m}^{ABC}_{ijk}(1-1/qr)^{1/2}}$	**モデル8** G[1] $r_{i}=\dfrac{n^{A}_{i}-\hat{m}^{A}_{i}}{[\hat{m}^{A}_{i}(1-1/p)]^{1/2}}$ G[2] $r_{j}=\dfrac{n^{B}_{j}-\hat{m}^{B}_{j}}{[\hat{m}^{B}_{j}(1-1/q)]^{1/2}}$ G[3] $r_{k}=\dfrac{n^{C}_{k}-\hat{m}^{C}_{k}}{[\hat{m}^{C}_{k}(1-1/r)]^{1/2}}$ G[4] $r_{ij}=\dfrac{n^{AB}_{ij}-\hat{m}^{AB}_{ij}}{[\hat{m}^{AB}_{ij}(1-1/pq)]^{1/2}}$ G[5] $r_{ik}=\dfrac{n^{AC}_{ik}-\hat{m}^{AC}_{ik}}{[\hat{m}^{AC}_{ik}(1-1/pr)]^{1/2}}$ G[6] $r_{jk}=\dfrac{n^{BC}_{jk}-\hat{m}^{BC}_{jk}}{[\hat{m}^{BC}_{jk}(1-1/qr)]^{1/2}}$ G[8] $r_{ijk}=\dfrac{n^{ABC}_{ijk}-\hat{m}^{ABC}_{ijk}}{[\hat{m}^{ABC}_{ijk}(1-1/pqr)^{1/2}}$

1）AB，AC，BC 固定モデル

AB，AC，BC 固定モデル（モデル1）は，直接，期待値を算出することができないので，繰り返し法を用いて期待値を逐次推定する．具体的な算出手順は，篠原の「行動科学の BASIC」第5巻（1989，pp. 234-247）を参照のこと．繰り返し推定で最終的に求まった値を期待値$\hat{m}_{ijk}$として(7)，(8) 式を用いて尤度比やx^2値を計算し検定する．このモデルの変動源は3要因交互作用項（G^2_{ABC}，x^2_{ABC}）のみのモデルである．

Haberman（1978，p. 230）は，要因 A，B，C のカテゴリー数 p，q，r が大きいなら次式の r_{ijk}

が正規分布することを利用して検定する．

$$r_{ijk}=\frac{n_{ijk}^{ABC}-\hat{m}_{ijk}^{ABC}}{(\hat{m}_{ijk}^{ABC})^{2/1}} \quad \cdots (9)$$

また，カテゴリーp，q，rのいずれかが2のときは，次式を推奨している．

$$r_{ijk}^{*}=\frac{n_{ijk}^{ABC}-\hat{m}_{ijk}^{ABC}}{\{\hat{m}_{ijk}^{ABC}(1-n_{ij}^{AB}/n_{i}^{A})\ (1-n_{ij}^{AB}/n_{i}^{A})\}^{1/2}} \quad \cdots (10)$$

2）AB，ACの固定モデル

このモデルは，要因AのカテゴリーA_iごとに要因BとCとの連関が異なるかどうかの検定法である．言い換えると，全体の尤度比$_TG^2$（x^2についても同様，以下は尤度比でx^2も代表させることにする）を，全体的な要因BとCの連関部分（G^2_{AB}）と，A_iごとのBC間の連関の差（G^2_{ABC}）に分割して検討するモデルである．

$$\hat{m}_{ijk}^{ABC}=\frac{n_{ij}^{AB}}{1}\times(\frac{n_{ik}^{BC}}{n_{i}^{A}}) \quad \cdots (11)$$

$$\begin{aligned} d_{ijk}^{ABC}&=[\hat{m}_{ijk}^{ABC}\{1-\hat{m}_{ijk}^{ABC}(1/n_{ij}^{AB}+1/n_{jk}^{BC})+\hat{m}_{ijk}^{ABC}\times(1/n_{j}^{B})\}]^{1/2}\\ &=[\hat{m}_{ijk}^{ABC}\{1-n_{ij}^{AB}n_{ik}^{AC}/n_{i}^{A}\times(1/n_{ij}^{AB}+1/n_{ik}^{AC})+(n_{ij}^{AB}n_{ik}^{AC}/n_{i}^{A})\ (1/n_{i}^{A})\}]^{1/2}\\ &=[\hat{m}_{ijk}^{ABC}\{1-n_{ik}^{AC}/n_{i}^{A}-(n_{ij}^{AB}/n_{i}^{A})+(n_{ij}^{AB}/n_{i}^{A})^{2}\}]^{1/2}\\ &=[\hat{m}_{ijk}^{ABC}(1-n_{ik}^{AC}/n_{i}^{A})\ (1-n_{ij}^{AB}/n_{i}^{A})]^{1/2} \end{aligned} \quad \cdots (12)$$

標準化された調整後の残差成分の検定は，次式が単位正規分布することを利用する．

$$r_{ijk}=\frac{n_{ijk}^{ABC}-(n_{ij}^{AB}\cdot n_{ik}^{AC})/n_{i}^{A}}{\{(n_{ij}^{AB}\cdot n_{ik}^{AC}/n_{i}^{A})\ (1-n_{ij}^{AB}/n_{i}^{A})\ (1-n_{ik}^{AC}/n_{i}^{A})\}^{1/2}} \quad \cdots (13)$$

Table 5-1 モデル4（A，B，C固定の3要因独立モデル）による性別と両親のP-M類型の尤度比検定とχ^2検定

Source	df	G^2	p	χ^2	p
性(A)×父(B)	3	6.071	ns	6.038	ns
性(A)×母(C)	3	18.631	.001	18.490	.001
父(B)×母(C)	9	264.447	.001	262.016	.001
A × B × C	9	18.524	.05	4.825	ns
Total	24	307.673	.001	291.369	.001

Table 5-2 性別とP-M類型のクロス集計と残差分析

変動源	全体N=500	養育態度 PM型	P型	M型	pm型	調整後の残差 PM型	P型	M型	pm型
Table A*B 性別×父の類型									
男	250	71(28.4)	46(18.4)^{a}	43(17.2)$^{-}$	90(36.0)	0.30	1.73	-2.09*	0.19
女	250	68(27.2)	32(12.8)^{b}	62(24.8)$^{+}$	88(35.2)	-0.30	-1.73	2.09*	-0.19
計	500	139(27.8)	78(15.6)	105(21.0)	178(35.6)	尤度比 G^2=6.071 df=3 ns			
Table A*C 性別×母の類型									
男	250	74(29.6)$^{-}$	60(24.0)$^{+}$	46(18.4)$^{-}$	70(28.0)$^{++}$	-2.53*	2.00*	-2.15*	3.12**
女	250	101(40.4)$^{+}$	42(16.8)$^{-}$	66(26.4)$^{+}$	41(16.4)$^{--}$	2.53*	-2.00*	2.15*	-3.12**
計	500	175(35.0)	102(20.4)	112(22.4)	111(22.2)	尤度比 G^2=18.631 df=3 p<.01			
Table B*C 父×母の類型		母の類型							
父の類型 PM	139	97(69.8)$^{++}$	15(10.8)$^{--}$	22(15.8)$^{-}$	5(3.6)$^{--}$	10.12**	-3.31**	-2.19*	-6.21**
P	78	24(30.8)	35(44.9)$^{++}$	5(6.4)$^{--}$	14(17.9)	-0.85	5.84**	-3.69**	-0.98
M	105	38(36.2)	4(3.8)$^{--}$	54(51.4)$^{++}$	9(8.6)$^{--}$	0.29	-4.75**	8.03**	-3.78**
pm	178	16(9.0)$^{--}$	48(27.0)$^{++}$	31(17.4)$^{-}$	83(46.6)$^{++}$	-9.07**	2.71**	-1.99*	9.77**
計	500	175(35.0)	102(20.4)	112(22.4)	111(22.2)	尤度比 G^2=264.447 df=9 p<.01			
Table A*B*C 性別×父×母の類型									
男児		母の類型							
父の類型 PM	71	43(60.6)$^{++}$	10(14.1)	14(19.7)	4(5.6)$^{--}$	4.57**	-1.27	-0.46	-3.36**
P	46	10(21.7)	19(41.3)$^{++}$	3(6.5)$^{-}$	14(30.4)$^{+}$	-1.14	4.32**	-2.16*	2.02*
M	43	16(37.2)	2(4.7)$^{--}$	19(44.2)$^{+}$	6(14.0)^{b}	-0.65	-2.99**	2.39*	-1.87
pm	90	5(5.6)$^{--}$	29(32.2)$^{++}$	10(11.1)$^{--}$	46(51.1)$^{++}$	-5.82**	3.00**	-2.64**	7.00**
計	250	74(14.8)	60(12.0)	46(9.2)	70(14.0)				
女児									
父の類型 PM	68	54(79.4)$^{++}$	5(7.4)$^{--}$	8(11.8)$^{-}$	1(1.5)$^{--}$	7.26**	-2.80**	-2.22*	-4.24**
P	32	14(43.8)	16(50.0)$^{++}$	2(6.2)$^{-}$	0(0.0)$^{--}$	0.11	3.15**	-2.53*	-3.27**
M	62	22(35.5)	2(3.2)$^{--}$	35(56.5)$^{++}$	3(4.8)$^{--}$	1.00	-2.99**	7.66**	-2.86**
pm	88	11(12.5)$^{--}$	19(21.6)	21(23.9)	37(42.0)$^{++}$	-4.49**	0.23	0.28	4.60**
計	250	101(20.2)	42(8.4)	66(13.2)	41(8.2)	尤度比 G^2=307.673 df=24 p<.01			
計	500(100.0)	175(35.0)	102(20.4)	112(22.4)	111(22.2)				

Table 5-3 各要因組み合わせでの期待度数

父または母の養育類型	PM型	P型	M型	pm型
Table 性別(A)×父の類型(B)				
男児	69.50	39.00	52.50	89.00
女児	69.50	39.00	52.50	89.00
Table 性別(A)×母の類型(C)				
男児	87.50	51.00	56.00	55.50
女児	87.50	51.00	56.00	55.50
Table 父(B)×母(C)の類型				
父類型	母の類型			
PM型	48.65	28.36	31.14	30.86
P 型	27.30	15.91	17.47	17.32
M 型	36.75	21.42	23.52	23.31
pm型	62.30	36.31	39.87	39.52

母の類型	父/母	PM型	P型	M型	pm型
Table 性別(A)×父(B)×母(C)					
男児	PM型	24.33	14.18	15.57	15.43
	P 型	13.65	7.96	8.74	8.66
	M 型	18.38	10.71	11.76	11.65
	pm型	31.15	18.16	19.94	19.76
女児	PM型	24.33	14.18	15.57	15.43
	P 型	13.65	7.96	8.74	8.66
	M 型	18.38	10.71	11.76	11.65
	pm型	31.15	18.16	19.94	19.76

モデル４の尤度比値の算出手順の数値例

$G^2_{AB}=2\sum\sum n^{AB}_{ij}\log_e(n^{AB}_{ij}/\tilde{\hat{m}}^{AB}_{ij})=2\{71\log_e(71/69.5)+46\log_e(46/39.0)+\cdots+88\log_e(88/89.0)=6.071$

$G^2_{AB}=2\sum\sum n^{AC}_{ik}\log_e(n^{AC}_{ik}/\tilde{\hat{m}}^{AC}_{ik})=2\{74\log_e(74/87.5)+60\log_e(60/51.0)+\cdots+41\log_e(41/55.5)=16.631$

$G^2_{BC}=2\sum\sum n^{BC}_{jk}\log_e(n^{BC}_{jk}/\tilde{\hat{m}}^{BC}_{jk})=2\{97\log_e(97/48.65)+15\log_e(15/28.36)+\cdots+41\log_e(41/55.5)=264.447$

${}_TG^2_{ABC}=2\sum\sum\sum n^{ABC}_{ijk}\log_e(n^{ABC}_{ijk}/\tilde{\hat{m}}^{ABC}_{ijk})=2\{43\log_e(43/24.33)+10\log_e(10/14.18)+\cdots+37\log_e(37/19.76)$
$=307.673$

$G^2_{ABC}={}_TG^2_{ABC}-G^2_{AB}-G^2_{AC}-G^2_{BC}=307.673-6.071-16.631-264.447=18.524$

Table 6-1　モデル 3（AB, C の固定モデル）による理科への興味についての 3 要因尤度比検定と χ^2 検定

Source	*df*	*G2*	*p*	χ^2	*p*
学年(A)×興味(C)	2	4.355	ns	4.348	ns
性別(B)×興味(C)	1	41.969	.01	41.506	.01
A × B × C	2	14.330	.01	13.759	.01
Total	5	60.654	.01	59.612	.01

Table 6-2　学年，性別，興味の各種クロス集計と残差分析

	理科への興味 高	理科への興味 低	調整後の残差 高	調整後の残差 低
Table 学年(A)×興味(C)				
2年 186	114(61.3)^{a}	72(38.7)^{b}	1.73^	-1.73^
4年 203	115(56.7)	88(43.3)	0.20	-0.20
6年 212	108(50.9)^{b}	104(49.1)^{a}	-1.87^	1.87^
計	337(56.1)	264(43.9)	G^2=4.355 df=2	ns
Table 性別(B)×興味(C)				
男児 310	213(68.7)$^{++}$	97(31.3)$^{--}$	6.44**	-6.44**
女児 291	124(42.6)$^{--}$	167(57.4)$^{++}$	-6.44**	6.44**
計 601	310(51.6)	291(48.4)	G^2=41.969 df=1	p<.01
Table 学年(A)×性別(B)×興味(C)				
2年 男児 92	60(65.2)^{a}	32(34.8)^{b}	1.92^	-1.92^
2年 女児 94	54(57.4)	40(42.6)	0.29	-0.29
	114	72		
4年 男児 111	75(67.6)$^{++}$	36(32.4)$^{--}$	2.70**	-2.70**
4年 女児 92	40(43.5)$^{--}$	52(56.5)$^{++}$	-2.65**	2.65**
	125	88		
6年 男児 107	78(72.9)$^{++}$	29(27.1)$^{--}$	3.87**	-3.87**
6年 女児 105	30(28.6)$^{--}$	75(71.4)$^{++}$	-6.25**	6.25**
	108	104	G^2=60.654 df=5	p<.01
計	337(56.1)	264(43.9)		

Table 6-3　AC, BC, ABC 集計での期待度数

Table A*C 学年×興味		
2年	104.30	81.70
4年	113.83	89.17
6年	118.88	93.12

Table B*C 性別×興味		
男児	173.83	136.17
女児	163.17	127.83

Table A*B*C 学年×性別×興味			
2年	男児	51.59	40.41
	女児	52.71	41.29
4年	男児	62.24	48.76
	女児	51.59	40.41
6年	男児	60.00	47.00
	女児	58.88	46.12

モデル３の尤度比値の算出手順の数値例

$G^2_{AC} = 2\sum\sum n^{AC}_{ik}\log_e(n^{AC}_{ik}/\tilde{m}^{AC}_{ik}) = 2\{114\log_e(114/104.30)+72\log_e(72/81.70)$
$+115\log_e(115/113.83)+88\log_e(88/89.17)+108\log_e(108/118.88)+104\log_e(104/93.12)\}=4.355$

$G^2_{BC} = 2\sum\sum n^{BC}_{jk}\log_e(n^{BC}_{jk}/\tilde{m}^{BC}_{jk}) = 2\{213\log_e(213/173.83)+97\log_e(97/136.17)$
$+124\log_e(124/163.17)+167\log_e(167/127.83)\}=41.969$

${}_TG^2_{ABC} = 2\sum\sum\sum n^{ABC}_{ijk}\log_e(n^{ABC}_{ijk}/\tilde{m}^{ABC}_{ijk}) = 2\{60\log_e(60/51.59)+32\log_e(32/40.41)$
$+54\log_e(54/52.71)+40\log_e(40/41.29)+75\log_e(75/62.24)+36\log_e(36/48.76)$
$+40\log_e(40/51.59)+52\log_e(52/40.41)+78\log_e(78/60.00)+29\log_e(29/47.00)$
$+30\log_e(30/58.88)+75\log_e(75/46.12)\}=60.654$

$G^2_{ABC} = {}_TG^2_{ABC} - G^2_{AC} - G^2_{BC} = 60.654-4.355-41.969 = 14.330$

Table 7-1 モデル2（AB，AC固定モデル）による性別とP-M養育類型の尤度比検定とχ^2検定

Source	df	G^2	p	χ^2	p
父の類型(B)×母の類型(C)	9	258.409	.001	255.134	.001
性別(A)×父(B)×母(C)	9	24.562	.01	16.934	.05
Total	18	282.971	.001	272.069	.001

Table 7-2 性別とP-M類型のクロス集計と残差分析

変動源 全体N=500		母の類型 PM型	P型	M型	pm型	調整後の残差 PM型	P型	M型	pm型
Table B*C 父×母の類型									
父の類型 PM	139	97(69.8)$^{++}$	15(10.8)$^{--}$	22(15.8)$^{-}$	5(3.6)$^{--}$	10.17**	-3.33**	-2.16*	-6.24**
P	78	24(30.8)	35(44.9)$^{++}$	5(6.4)$^{--}$	14(17.9)	-0.67	5.60**	-3.58**	-1.20
M	105	38(36.2)	4(3.8)$^{--}$	54(51.4)$^{++}$	9(8.6)$^{--}$	0.05	-4.63**	7.70**	-3.58**
pm	178	16(9.0)$^{--}$	48(27.0)$^{++}$	31(17.4)$^{-}$	83(46.6)$^{++}$	-9.05**	2.69**	-1.97*	9.73**
計	500	175(35.0)	102(20.4)	112(22.4)	111(22.2)	尤度比 G^2=258.409 df=9 p<.01			
Table A*B*C 性別×父×母の類型									
男児									
父の類型 PM	71	43(60.6)$^{++}$	10(14.1)$^{-}$	14(19.7)	4(5.6)$^{--}$	6.75**	-2.31*	0.34	-4.96**
P	46	10(21.7)	19(41.3)$^{++}$	3(6.5)$^{-}$	14(30.4)	-1.29	3.04**	-2.30*	0.41
M	43	16(37.2)	2(4.7)$^{--}$	19(44.2)$^{++}$	6(14.0)$^{-}$	1.20	-3.26**	4.80**	-2.25*
pm	90	5(5.6)$^{--}$	29(32.2)$^{+}$	10(11.1)$^{-}$	46(51.1)$^{++}$	-6.25**	2.28*	-2.23*	6.10**
計	250	74(14.8)	60(12.0)	46(9.2)	70(14.0)				
女児									
父の類型 PM	68	54(79.4)$^{++}$	5(7.4)$^{-}$	8(11.8)$^{--}$	1(1.5)$^{--}$	7.68**	-2.44*	-3.21**	-3.90**
P	32	14(43.8)	16(50.0)$^{++}$	2(6.2)$^{--}$	0(0.0)$^{--}$	0.41	5.38**	-2.77**	-2.68**
M	62	22(35.5)	2(3.2)$^{--}$	35(56.5)$^{++}$	3(4.8)$^{--}$	-0.91	-3.30**	6.19**	-2.84**
pm	88	11(12.5)$^{--}$	19(21.6)	21(23.9)	37(42.0)$^{++}$	-6.63**	1.49	-0.67	8.07**
計	250	101(20.2)	42(8.4)	66(13.2)	41(8.2)	尤度比 G^2=282.971 df=18 p<.01			
計	500(100.0)	175(35.0)	102(20.4)	112(22.4)	111(22.2)				

Table 7-3 BC集計，ABC集計での期待度数

	母の類型 PM型	P型	M型	pm型
Table BC 父×母の類型				
父の類型 PM型	48.49	28.46	31.02	31.03
P 型	26.54	16.42	16.91	18.13
M 型	37.78	20.74	24.28	22.21
pm型	62.19	36.38	39.79	39.63

	母の類型 PM型	P型	M型	pm型
Table ABC 性別×父×母の類型				
男児				
父の類型 PM型	21.02	17.04	13.06	19.88
P 型	13.62	11.04	8.46	12.88
M 型	12.73	10.32	7.91	12.04
pm型	26.64	21.60	16.56	25.20
女児				
父の類型 PM型	27.47	11.42	17.95	11.15
P 型	12.93	5.38	8.45	5.25
M 型	25.05	10.42	16.37	10.17
pm型	35.55	14.78	23.23	14.43

モデル２の尤度比値算出手順の数値例

$$
\begin{aligned}
G^2_{BC} = 2\sum\sum n^{BC}_{jk}\log_e(n^{BC}_{jk}/\hat{m}^{BC}_{jk}) &= 2\ \{\ 97\log_e(97/48.49)+15\log_e(15/28.46)+22\log_e(22/31.02) \\
&+5\log_e(5/31.03)+24\log_e(24/26.54)+35\log_e(35/16.42)+5\log_e(5/16.91)+14\log_e(14/18.13) \\
&+16\log_e(16/37.78)+2\log_e(2/20.74)+19\log_e(19/24.28)+6\log_e(6/22.21) \\
&+16\log_e(16/62.19)+48\log_e(48/36.38)+31\log_e(31/39.79)+83\log_e(83/39.63) \\
&= 258.409
\end{aligned}
$$

$$
{}_TG^2_{ABC} = 2\sum\sum\sum n^{ABC}_{ijk}\log_e(n^{ABC}_{ijk}/\hat{m}^{ABC}_{ijk}) = 2\ \{\ 43\log_e(43/21.02)+10\log_e(10/17.04)+\cdots+37\log_e(37/14.43)\}=282.971
$$

$$
G^2_{ABC} = {}_TG^2_{ABC} - G^2_{BC} = 282.971-258.409 = 24.562
$$

3）AB，C 固定モデル

AB，C 固定モデル（モデル 3）は，2 つの独立変数 A × B の条件ごとに従属変量 C の分布を検討するモデルである．すなわち，このモデルは要因 C が従属変数となった独立した 2 要因分散分析法に相当する．全体の尤度比 $_{T}G^2$ は，G^2_{AC}，G^2_{BC}，G^2_{ABC} の 3 つの変動源に分割して検定できる．

$$\hat{m}^{ABC}_{ijk} = \frac{n^{AB}_{ij}}{1} \times \left(\frac{n^{C}_{k}}{N}\right) \quad \cdots (14)$$

$$\begin{aligned} d^{ABC}_{ijk} &= [\hat{m}^{ABC}_{ijk}\{1-\hat{m}^{ABC}_{ijk}(1/n^{AB}_{ij}+1/n^{C}_{k})+\hat{m}^{ABC}_{ijk}\times(1/N)\}]^{1/2} \\ &= [\hat{m}^{ABC}_{ijk}\{1-(n^{AB}_{ij}\cdot n^{C}_{k}/N)(1/n^{AB}_{ij}+1/n^{C}_{k})+(n^{AB}_{ij}\cdot n^{C}_{k}/N)(1/N)\}]^{1/2} \\ &= [\hat{m}^{ABC}_{ijk}(1-n^{AB}_{ij}/N)(1-n^{C}_{k}/N)]^{1/2} \end{aligned} \quad \cdots (15)$$

標準化された調整後の残差成分の検定は，次式が単位正規分布することを利用する．

$$r_{ijk} = \frac{n^{ABC}_{ijk}-(n^{AB}_{ij}\cdot n^{C}_{k})/N}{\{(n^{AB}_{ij}\cdot n^{C}_{k}/N)(1-n^{AB}_{ij}/N)(1-n^{C}_{k}/N)\}^{1/2}} \quad \cdots (16)$$

4）A，B，C 固定モデル

この 3 要因独立モデル（モデル 4）は，例えば，国語，算数，社会というように 3 要因がすべて従属変量で変量相互の連関に関心がある場合である．または，1 要因が独立変数（例えば学年），2 変量が，例えば国語，算数という 2 科目の成績評定というようなケースで 3 つの変量の間の連関を検討する時のモデルである．このモデルでの G^2 の変動源は，2 要因をとりだす組み合わせが 3 通り，3 要因を取り出す組み合わせが 1 通りの計 4 個の変動源をもった尤度比（あるいは x^2 値）に分割できる．すなわち，3 要因のそれぞれの周辺度数を固定するとき，変動源がフルに利用される検定モデルである．期待値は，

$$\hat{m}^{ABC}_{ijk} = n^{A}_{i}\times(n^{B}_{j}/N)(n^{C}_{k}/N) = n^{A}_{i}\times n^{B}_{j}\times n^{C}_{k}/N^2 \quad \cdots (17)$$

となる．

3 要因独立モデルの場合，残差分析法の残差成分（r_{ijk}）の分母（d_{ijk}）は，

$$\begin{aligned} d^{ABC}_{ijk} &= [\hat{m}^{ABC}_{ijk}\{1-\hat{m}^{ABC}_{ijk}(1/n^{A}_{i}+1/n^{B}_{j}+1/n^{C}_{k})+\hat{m}^{ABC}_{ijk}\times(1/N+1/N)\}]^{1/2} \\ &= [\hat{m}^{ABC}_{ijk}\{1-(n^{A}_{i}n^{B}_{j}n^{C}_{k}/N^2)(1/n^{A}_{i}+1/n^{B}_{j}+1/n^{C}_{k})+(n^{A}_{i}n^{B}_{j}n^{C}_{k}/N^2)(2/N)\}]^{1/2} \\ &= [\hat{m}^{ABC}_{ijk}(1-n^{A}_{i}n^{B}_{j}/N^2-n^{A}_{i}n^{C}_{k}/N^2-n^{B}_{j}n^{C}_{k}/N^2+2\times n^{A}_{i}n^{B}_{j}n^{C}_{k}/N^3)]^{1/2} \end{aligned} \quad \cdots (18)$$

となる．

標準化された調整後の残差成分の検定は，次式が単位正規分布することを利用する．

$$r_{ijk} = \frac{n^{ABC}_{ijk}-n^{A}_{i}n^{B}_{j}n^{C}_{k}/N^2}{\{(n^{A}_{i}n^{B}_{j}n^{C}_{k}/N^2)(1-n^{A}_{i}n^{B}_{j}/N^2-n^{A}_{i}n^{C}_{k}/N^2-n^{B}_{j}n^{C}_{k}/N^2+2\times n^{A}_{i}n^{B}_{j}n^{C}_{k}/N^3)\}^{1/2}} \quad \cdots (19)$$

5）固定した AB_{ij} ごとに要因 C は均等分布を仮定したモデル

これは，AB 固定，要因 C は固定した AB_{ij} の人数 n_{ij} が C_i ごとに均等分布を仮定したモデル（モデル 5）である．従って，期待度数 $\hat{m}$ は次式で与えられる．このモデルでは，全体の尤度比 ${}_TG^2$ は，G^2_C，G^2_{AC}，G^2_{BC}，G^2_{ABC} の 4 つの変動源に分割して検定できる．

$$m^{ABC}_{ijk}=\frac{1}{r}\times n^{AB}_{ij}/1 \qquad \cdots (20)$$

$$\begin{aligned} d^{ABC}_{ijk}&=[\hat{m}^{ABC}_{ijk}\{1-\hat{m}^{ABC}_{ijk}(1/n^{AB}_{ij})\}]^{1/2}\\ &=[\hat{m}^{ABC}_{ijk}(1-n^{AB}_{ij}/r)\ (1/n^{AB}_{ij})]^{1/2}\\ &=[\hat{m}^{ABC}_{ijk}(1-1/r)]^{1/2} \end{aligned} \qquad \cdots (21)$$

標準化された調整後の残差成分の検定は，単位正規分布することを利用する．

$$r_{ijk}=\frac{n^{ABC}_{ijk}-n^{AB}_{ij}/r}{\{(n^{AB}_{ij}/r)\ (1-1/r)\}^{1/2}} \qquad \cdots (22)$$

6）A，B 固定，要因 C は均等分布を仮定したモデル

これは，A，B 固定，要因 C は AB_{ij} の期待値 $\hat{m}_{ij}$ が C_k ごとに均等分布を仮定したモデル（モデル 6）である．従って，3 要因での期待度数 $\hat{m}$ は次式で与えられる．このモデルでは，全体の尤度比 ${}_TG^2$ は，G^2_C，G^2_{AB}，G^2_{AC}，G^2_{BC}，G^2_{ABC} の 5 つの変動源に分割できる．

$$\hat{m}^{ABC}_{ijk}=\frac{1}{r}\times(n^A_i)\ (n^B_j/N)/1 \qquad \cdots (23)$$

$$\begin{aligned} d^{ABC}_{ijk}&=[\hat{m}^{ABC}_{ijk}\{1-\hat{m}^{ABC}_{ijk}(1/n^A_i+1/n^B_j)+\hat{m}^{ABC}_{ijk}(1/N)\}]^{1/2}\\ &=[\hat{m}^{ABC}_{ijk}\{1-(n^A_i n^B_j/(Nr))\ (1/n^A_i+1/n^B_j)+(n^A_i n^B_j/(Nr))\ (1/N)\}]^{1/2}\\ &=[\hat{m}^{ABC}_{ijk}(1-n^A_i n^B_j/N^2-n^A_i n^C_k/N^2-n^B_j n^C_k/N^2-2\times n^A_i n^B_j n^C_k/N^3)]^{1/2}\\ &=[\hat{m}^{ABC}_{ijk}\{1-n^A_i/(Nr)-n^B_j/(Nr)+n^A_i n^B_j/(N^2r)\}]^{1/2}\\ &=[\hat{m}^{ABC}_{ijk}\{1-1/r+(1/r)\ (1-n^A_i/N)\ (1-n^B_j/N)\}]^{1/2} \end{aligned} \qquad \cdots (24)$$

となる．

標準化された調整後の残差成分の検定は，次式が単位正規分布することを利用する．

$$r_{ijk}=\frac{n^{ABC}_{ijk}-n^A_i n^B_j(Nr)}{[(n^A_i n^B_j/(Nr)\ \{1-1/r+(1/r)\ (1-n^A_i/N)\ (1-n^B_j/N)\}]^{1/2}} \qquad \cdots (25)$$

Table 8-1　モデル５（固定した AB_{ij} ごとにＣで均等分布を仮定）による
理科への興味についての３要因尤度比検定と χ^2 検定

Source	*df*	G^2	*p*	χ^2	*p*
興　　味(C)	r-1 = 1	8.889	.01	8.867	.01
学年(A)×興味(C)	(p-1)(r-1)= 2	4.354	ns	4.284	ns
性別(B)×興味(C)	(q-1)(r-1)= 1	41.969	.001	40.894	.001
A × B × C	(p-1)(q-1)(r-1)= 2	14.331	.001	13.556	.01
計	pq(r-1) = 6	69.543	.001	67.601	.001

Table 8-2　学年，性別，興味の各種クロス集計と期待度数および残差分析（各水準数 p = 3，q = 2，r = 2）

変動源	理科への興味 高(C_1)	理科への興味 低(C_2)	期待度数 高(C_1)	期待度数 低(C_2)	調整後の残差 高(C_1)	調整後の残差 低(C_2)
Table 学年(A)×興味(C)			$\hat{m}^{AC}_{ik}=n^A_i/r$			
２年 186	114(61.3)$^{++}$	72(38.7)$^{--}$	186/2= 93.0	186/2= 93.0	3.08^{++}	-3.08^{--}
４年 203	115(56.7)	88(43.3)	203/2=101.5	203/2=101.5	1.89	-1.89
６年 212	108(50.9)	104(49.1)	212/2=106.0	212/2=106.0	0.28	-0.28
計 601	337(56.1)	264(43.9)			G^2=4.354 df=1 p<.05	
Table 性別(B)×興味(C)			$\hat{m}^{BC}_{jk}=n^B_j/r$			
男児 310	213(68.7)$^{++}$	97(31.3)$^{--}$	310/2=155.0	310/2=155.0	6.59^{++}	-6.59^{--}
女児 291	124(42.6)$^{-}$	167(57.4)$^{+}$	291/2=145.5	291/2=145.5	-2.52^{-}	2.52^{+}
計 601	310(51.6)	291(48.4)			G^2=41.969 df=1 p<.001	
Table 学年(A)×性別(B)×興味(C)			$\hat{m}^{ABC}_{ijk}=n^{AB}_{ij}/r$			
２年 男児 92	60(65.2)$^{++}$	32(34.8)$^{--}$	92/2=46.0	92/2=46.0	2.92^{++}	-2.92^{--}
２年 女児 94	54(57.4)	40(42.6)	94/2=47.0	94/2=47.2	1.44	1.44
	114	72				
４年 男児 111	75(67.6)$^{++}$	36(32.4)$^{--}$	111/2=55.5	111/2=55.5	3.70^{++}	-3.70^{--}
４年 女児 92	40(43.5)	52(56.5)	92/2=46.0	92/2=46.0	-1.25	1.25
	125	88				
６年 男児 107	78(72.9)$^{++}$	29(27.1)$^{--}$	107/2=53.5	107/2=53.5	4.74^{++}	-4.74^{--}
６年 女児 105	30(28.6)$^{--}$	75(71.4)$^{++}$	105/2=52.5	105/2=52.5	-4.39^{--}	4.39^{++}
	108	104			G^2=69.543 df=4 p<.001	
計	337(56.1)++	264(43.9)--	601/2=300.5	601/2=300.5	2.98^{++}	-2.98^{--}
			$\hat{m}^{C}_{k}=N/r$		G^2=8.889 df=1 p<.001	

モデル５の尤度比算出手順の数値例

$$G^2_C=2\sum n^C_k \log_e(n^C_k/\hat{m}^C_k) = 2\{337\log_e(337/300.5)+264\log_e(264/300.5)\}=8.889$$

$$_TG^2_{AC}=2\sum\sum n^{AC}_{ik}\log_e(n^{AC}_{ik}/\hat{m}^{AC}_{ik}) = 2\{114\log_e(114/93.0)+72\log_e(72/93.0)$$
$$+115\log_e(115/101.5)+88\log_e(88/101.5)+108\log_e(108/106.0)+104\log_e(104/106.0)\}=13.234$$

$$_TG^2_{BC}=2\sum\sum n^{BC}_{jk}\log_e(n^{BC}_{jk}/\hat{m}^{BC}_{jk}) = 2\{213\log_e(213/155.0)+97\log_e(97/155.0)$$
$$+124\log_e(124/145.5)+167\log_e(167/145.5)\}=50.858$$

$$_TG^2_{ABC}=2\sum\sum\sum n^{ABC}_{ijk}\log_e(n^{ABC}_{ijk}/\hat{m}^{ABC}_{ijk}) = 2\{60\log_e(60/46.0)+32\log_e(32/46.0)$$
$$+54\log_e(54/47.0)+40\log_e(40/47.0)+75\log_e(75/55.5)+36\log_e(36/55.5)$$
$$+40\log_e(40/46.0)+52\log_e(52/46.0)+78\log_e(78/53.5)+29\log_e(29/53.5)$$
$$+30\log_e(30/52.5)+75\log_e(75/52.5)\}=69.543$$

$$G^2_{AC} = {}_TG^2_{AC} - G^2_C = 13.243-8.889 = 4.354$$

$$G^2_{BC} = {}_TG^2_{BC} - G^2_C = 50.858-8.889 = 41.969$$

$$G^2_{ABC} = {}_TG^2_{ABC} - G^2_C - G^2_{AC} - G^2_{BC} = 69.543-8.889-4.354-41.969 = 14.331$$

Table 9-1 モデル6（A，B固定，C_kで均等分布を仮定）によるバス運転士の仕事満足度とリスクテイキングが事故に及ぼす関係についての尤度比検検定とχ^2検定

Source	*df*	G^2	*p*	χ^2	*p*
事　　故　(C)	r-1 = 1	0.007	ns	0.007	ns
仕事(A)×リスク(B)	(p-1)(q-1)= 1	9.061	.01	9.035	.01
仕事(A)×事　故(C)	(p-1)(r-1)= 1	0.113	ns	0.114	ns
リスク(B)×事故(C)	(q-1)(r-1)= 1	3.971	.05	3.967	.05
A × B × C	(p-1)(q-1)(r-1)= 1	3.819	.10	3.677	10
計	(pqr-p-q+1) = 5	16.971	.01	16.799	.01

Table 9-2 バス運転士の事故，仕事満足度とリスキーな態度との関係（各水準数p＝2，q＝2，r＝2）

ABC,AB,AC A集計	無事故 C_1	事故 C_2	期待度数 計	$\tilde{m}_{ijk}^{ABC}=n_i^A n_j^B/(Nr)$, $\tilde{m}_{ik}^{AC}=n_i^A/r$, $\tilde{m}_{jk}^{BC}=n_j^B/r$, $\tilde{m}_k^C$		残差成分 C_1	残差成分 C_2
Table ABC集計				$\tilde{m}_{ijk}^{ABC}=n_i^A n_j^B/(Nr)$			
仕事満足高(a_1)							
ｱﾝﾘｽｷｰ(b_1)	80(49.1)	83(50.9)	163	273x311/(Nr)=72.44	273x311/(Nr)=72.44	1.12	1.57
ﾘｽｷｰ　(b_2)	54(49.1)	56(50.9)	110	273x275/(Nr)=64.06	273x275/(Nr)=64.06	-1.57	-1.26
仕事満足低(a_2)							
ｱﾝﾘｽｷｰ(b_1)	87(58.8)	61(41.2)$^{--}$	148	313x311/(Nr)=83.06	313x311/(Nr)=83.06	0.55	-3.10^{--}
ﾘｽｷｰ　(b_2)	71(43.0)	94(57.0)$^{++}$	165	313x275/(Nr)=73.44	313x275/(Nr)=73.44	-0.36	3.04^{++}
	G^2=16.965	df=5 .01					
Table AC集計				$\tilde{m}_{ik}^{AC}=n_i^A/r$			
仕事満足高(a_1)	134(49.1)	139(50.9)	273	273/2= 136.50	273/2= 136.50	-0.30	0.30
仕事満足低(a_2)	158(50.5)	155(49.5)	313	313/2= 156.50	313/2= 156.50	0.17	-0.17
	G^2=0.114	df=1 ns					
Table BC集計				$\tilde{m}_{jk}^{BC}=n_j^B/r$			
ｱﾝﾘｽｷｰ(b_1)	167(53.7)	144(46.3)	311	311/2= 155.50	311/2= 155.50	1.30	-1.30
ﾘｽｷｰ　(b_2)	125(45.5)	150(54.5)	275	275/2= 137.50	275/2= 137.50	-1.51	1.51
	G^2=3.972	df=1 .05					
Table C集計				$\tilde{m}_k^C=N/r$			
合計	292(49.8)	294(50.2)	586=N	586/2= 293.00	586/2= 293.00	-0.08	0.08
	G^2=0.007	df=1 ns					
Table AB集計	ｱﾝﾘｽｷｰ(b_1)	ﾘｽｷｰ(b_1)		$\tilde{m}_{ij}^{AB}=n_i^A n_j^B/N$			
仕事満足高(a_1)	163(59.7)	110(40.3)	n_1^A=273	273x311/N=144.89	273x275/N=128.11	3.01^{++}	-3.01^{--}
仕事満足低(a_2)	148(47.3)	165(52.7)	n_2^A=313	313x311/N=166.11	313x275/N=146.89	3.01^{--}	3.01^{++}
	G^2=9.066	df=1 .01					
合計 n_j^B	n_1^B=311	n_2^B=275	N=586				

モデル6の尤度比値算出手順の数値例

$G^2_C=2\sum n_k^C \log_e(n_k^C/\tilde{m}_k^C) = 2\{292\log_e(292/293.0)+294\log_e(294/293.0)\}=0.007$

$G^2_{AB}=2\sum\sum n_{ij}^{AB}\log_e(n_{ij}^{AB}/\tilde{m}_{ij}^{AB}) = 2\{163\log_e(163/144.89)+110\log_e(110/128.11)$
$+148\log_e(148/166.11)+165\log_e(165/146.89)\}= 9.061$

${}_TG^2_{AC}=2\sum\sum n_{ik}^{AC}\log_e(n_{ik}^{AC}/\tilde{m}_{ik}^{AC}) = 2\{134\log_e(134/136.5)+139\log_e(139/136.5)$
$+158\log_e(158/156.5)+155\log_e(155/156.5)\}= 0.120$

${}_TG^2_{BC}=2\sum\sum n_{jk}^{BC}\log_e(n_{jk}^{BC}/\tilde{m}_{jk}^{BC}) = 2\{167\log_e(167/155.5)+144\log_e(144/155.5)$
$+125\log_e(125/137.5)+150\log_e(150/137.5)\}= 3.978$

${}_TG^2_{ABC}=2\sum\sum\sum n_{ijk}^{ABC}\log_e(n_{ijk}^{ABC}/\tilde{m}_{ijk}^{ABC})$
$= 2\{80\log_e(80/72.44)+83\log_e(83/72.44)+54\log_e(54/64.06)+56\log_e(56/64.06)$
$+87\log_e(87/83.06)+61\log_e(61/83.06)+71\log_e(71/73.44)+94\log_e(94/73.44)\}=16.971$

$G^2_{AC} = {}_TG^2_{AC} - G^2_C = 0.120-0.007 = 0.113$

$G^2_{BC} = {}_TG^2_{BC} - G^2_C = 3.978-0.007 = 3.971$

$G^2_{ABC}= {}_TG^2_{ABC} - G^2_C - G^2_{AB} - G^2_{AC} - G^2_{BC} = 16.971-0.007-9.061-0.113-3.971 = 3.819$

Table 10-1 モデル7（A固定，BC_{jk}で均等分布を仮定）によるバス運転士の仕事満足度とリスクテイキングが事故に及ぼす関係についての尤度比検定とχ^2検定

Source	df	G^2	p	χ^2	p
リ　ス　ク　(B)	q-1 = 1	2.732	.10	2.730	.10
事　　故　(C)	r-1 = 1	2.213	ns	2.212	ns
仕事(A)×リスク(B)	(p-1)(q-1)= 1	0.114	ns	0.113	ns
仕事(A)×事　故(C)	(p-1)(r-1)= 1	3.972	.05	3.952	.05
リスク(B)×事故(C)	(q-1)(r-1)= 1	9.066	.01	8.362	.01
A × B × C	(p-1)(q-1)(r-1)= 1	3.807	10	4.226	.05
計	p(qr-1) = 6	21.904	.01	21.594	.01

Table 10-2 バス運転士の事故，仕事満足度とリスキーな態度との関係（各水準数 p = 2，q = 2，r = 2）

ABC,AB,AC A集計	無事故 a_1	事故 a_2	計	期待度数 $\tilde{m}^{ABC}_{ijk}n^A_i/(qr)$, $\tilde{m}^{AB}_{ij}=n^A_i/q$, $\tilde{m}^{AC}_{ik}=n^A_i/r$		残差成分 C_1	C_2
Table ABC集計				$\tilde{m}^{ABC}_{ijk}=n^A_i/(qr)$			
仕事満足高(b_1)							
ｱﾝﾘｽｷｰ(c_1)	80(49.1)	83(50.9)	163	292/(qr)=73.0	294/(qr)=73.5	0.95	1.28
ﾘｽｷｰ　(c_2)	54(49.1)	56(50.9)$^-$	110	292/(qr)=73.0	294/(qr)=73.5	-2.57$^-$	-2.36$^-$
仕事満足低(b_2)							
ｱﾝﾘｽｷｰ(c_1)	87(58.8)	61(41.2)	148	292/(qr)=73.0	294/(qr)=73.5	1.89	-1.68
ﾘｽｷｰ　(c_2)	71(43.0)	94(57.0)$^{++}$	165	292/(qr)=73.0	294/(qr)=73.5	-0.27	2.76^{++}
	G^2=16.965	df=5 .01					
Table AB集計				$\tilde{m}^{AB}_{ij}=n^A_i/q$			
仕事満足高(b_1)	134(49.1)	139(50.9)	273	292/q= 146.0	294/q= 147.0	-1.40	-0.93
仕事満足低(b_2)	158(50.5)	155(49.5)	313	292/q= 146.0	294/q= 147.0	1.40	0.93
	G^2=0.114	df=1 ns					
Table AC集計				$\tilde{m}^{AC}_{ik}=n^A_i/r$			
ｱﾝﾘｽｷｰ(c_1)	167(53.7)$^+$	144(46.3)	311	292/r= 146.0	294/r= 147.0	2.46$^+$	-0.35
ﾘｽｷｰ　(c_2)	125(45.5)$^-$	150(54.5)	275	292/r= 146.0	294/r= 147.0	-2.46$^-$	0.35
	G^2=3.972	df=1 .05					
Table A集計							
合計	292(49.8)	294(50.2)	N=586				
Table BC集計	ｱﾝﾘｽｷｰ(c_1)	ﾘｽｷｰ(c_1)		$\tilde{m}^{BC}_{jk}=N/(qr)$			
仕事満足高(b_1)	163(59.7)	110(40.3)$^{--}$	n^B_1=273	586/(qr)=146.5	586/(qr)=146.5	1.57	-3.48^{--}
仕事満足低(b_2)	148(47.3)	165(52.7)	n^B_2=313	586/(qr)=146.5	586/(qr)=146.5	0.14	1.77
	G^2=9.066	df=1 .01					
Table C集計				$\tilde{m}^C_k=N/r$			
合計 n^C_k	n^C_1=311	n^C_2=275	N=586	N/2=293.0	N/2=293.0	1.49	-1.49

モデル7の尤度比値算出手順の数値例

$$G^2{}_B = 2\sum n^B_j \log_e(n^B_j/\tilde{m}^B_j) = 2\{273\log_e(273/293.0)+313\log_e(313/293.0)\}=2.732$$

$$G^2{}_C = 2\sum\sum n^C_k \log_e(n^C_k/\tilde{m}^C_k) = 2\{311\log_e(311/293.0)+275\log_e(275/293.0)\}=2.213$$

$$G^2{}_{AB} = 2\sum\sum n^{AB}_{ij} \log_e(n^{AB}_{ij}/\tilde{m}^{AB}_{ij}) = 2\{134\log_e(134/146.0)+139\log_e(139/147.0)$$
$$+158\log_e(158/146.0)+155\log_e(155/147.0)\}= 2.846$$

$$_TG^2{}_{AC} = 2\sum\sum n^{AC}_{ik} \log_e(n^{AC}_{ik}/\tilde{m}^{AC}_{ik}) = 2\{167\log_e(167/146.0)+144\log_e(144/147.0)$$
$$+125\log_e(125/146.0)+150\log_e(150/147.0)\}= 6.185$$

$$_TG^2{}_{BC} = 2\sum\sum n^{BC}_{jk} \log_e(n^{BC}_{jk}/\tilde{m}^{BC}_{jk}) = 2\{163\log_e(163/146.5)+110\log_e(110/146.5)$$
$$+148\log_e(148/146.5)+165\log_e(165/146.5)\}=14.011$$

$$_TG^2{}_{ABC} = 2\sum\sum\sum n^{ABC}_{ijk} \log_e(n^{ABC}_{ijk}/\tilde{m}^{ABC}_{ijk})$$
$$= 2\{80\log_e(80/73.00)+83\log_e(83/73.50)+54\log_e(54/73.00)+56\log_e(56/73.50)$$
$$+87\log_e(87/73.00)+61\log_e(61/73.50)+71\log_e(71/73.00)+94\log_e(94/73.50)\}=21.904$$

$$G^2{}_{AB} = {}_TG^2{}_{AB} - G^2{}_B = 2.846 - 2.732 = 0.114$$

$$G^2{}_{AC} = {}_TG^2{}_{AC} - G^2{}_C = 6.185 - 2.213 = 3.972$$

$$G^2{}_{BC} = {}_TG^2{}_{BC} - G^2{}_B - G^2{}_C = 14.011 - 2.732 - 2.213 = 9.066$$

$$G^2{}_{ABC} = {}_TG^2{}_{ABC} - G^2{}_B - G^2{}_C - G^2{}_{AB} - G^2{}_{AC} - G^2{}_{BC}$$
$$= 21.904 - 2.732 - 2.213 - 0.114 - 3.972 - 9.066 = 3.807$$

Table 11-1 モデル８（ABC$_{ijk}$のすべてのセルに均等分布を仮定）によるバス運転士の仕事満足度とリスクテイキングが事故に及ぼす関係についての尤度比検検定とχ^2検定

Source		*df*	G^2	*p*	χ^2	*p*
事　　故	(A)	q-1 = 1	0.007	ns	0.007	ns
仕事満足度	(B)	q-1 = 1	2.732	.10	2.730	.10
リ　ス　ク	(C)	r-1 = 1	2.213	ns	2.212	ns
事故(A)×仕事	(B)	(p-1)(q-1)= 1	0.114	ns	0.109	ns
事故(A)×リスク(C)		(p-1)(r-1)= 1	3.972	.05	3.932	.05
リスク(B)×リスク(C)		(q-1)(r-1)= 1	9.066	.01	8.362	.01
A × B × C		(p-1)(q-1)(r-1)= 1	3.808	10	4.266	.05
計		pqr-1 = 7	21.911	.01	21.618	.01

Table 11-2 バス運転士の事故，仕事満足度とリスキーな態度との関係（各水準数 p ＝ 2，q ＝ 2，r ＝ 2）

ABC,AB,AC A集計	無事故 a_1	事故 a_2	計	期待度数 $\tilde{m}^{ABC}_{ijk}$=N/(pqr), $\tilde{m}^{AB}_{ij}$=N/(pq), $\tilde{m}^{AC}_{ik}$=N/(pr)		残差成分 C_1	C_2
Table ABC集計				$\tilde{m}^{ABC}_{ijk}$=N/(pqr)			
仕事満足高(b_1)							
ｱﾝﾘｽｷｰ(c_1)	80(49.1)	83(50.9)	163	586/(pqr)=73.25	586/(pqr)=73.25	0.84	1.22
ﾘｽｷｰ (c_2)	54(49.1)$^-$	56(50.9)$^-$	110	586/(pqr)=73.25	586/(pqr)=73.25	-2.40$^-$	-2.16$^-$
仕事満足低(b_2)							
ｱﾝﾘｽｷｰ(c_1)	87(58.8)	61(41.2)	148	586/(pqr)=73.25	586/(pqr)=73.25	1.72	-1.53
ﾘｽｷｰ (c_2)	71(43.0)	94(57.0)$^{++}$	165	586/(pqr)=73.25	586/(pqr)=73.25	-0.28	2.59^{++}
	G^2=16.965	df=5 .01					
Table AB集計				$\tilde{m}^{AB}_{ij}$=N/(pq)			
仕事満足高(b_1)	134(49.1)	139(50.9)	273	586/(pq)=146.5	586/(pq)=146.5	-1.19	-0.72
仕事満足低(b_2)	158(50.5)	155(49.5)	313	586/(pq)=146.5	586/(pq)=146.5	1.10	0.81
	G^2=0.114	df=1 ns					
Table AC集計				$\tilde{m}^{AC}_{ik}$=N/(pr)			
ｱﾝﾘｽｷｰ(c_1)	167(53.7)$^+$	144(46.3)	311	586/(pr)=146.5	586/(pr)=146.5	1.96$^+$	-0.24
ﾘｽｷｰ (c_2)	125(45.5)	150(54.5)	275	586/(pr)=146.5	586/(pr)=146.5	-2.05$^-$	0.33
	G^2=3.972	df=1 .05					
Table A集計				$\tilde{m}^{C}_{k}$=N/r			
合計	292(49.8)	294(50.2)	N=586	586/p=293.0	586/p=293.0	-0.08	-0.08
Table BC集計	ｱﾝﾘｽｷｰ(c_1)	ﾘｽｷｰ(c_1)		$\tilde{m}^{BC}_{jk}$=N/(qr)			
仕事満足高(b_1)	163(59.7)	110(40.3)$^{--}$	n^B_1=273	586/(qr)=146.5	586/(qr)=146.5	1.57	-3.48^{--}
仕事満足低(b_2)	148(47.3)	165(52.7)	n^B_2=313	586/(qr)=146.5	586/(qr)=146.5	0.14	1.77
	G^2=9.066	df=1 .01					
Table C集計				$\tilde{m}^{C}_{k}$=N/r			
合計 n^C_k	n^C_1=311	n^C_2=275	N=586	N/2=293.0	N/2=293.0	1.49	-1.49

モデル８の尤度比値算出手順の数値例

$$G^2_A = 2\sum n^A_i \log_e(n^A_i/\tilde{m}^A_i) = 2\{292\log_e(292/293.0)+294\log_e(294/293.0)\}=0.007$$

$$G^2_B = 2\sum n^B_j \log_e(n^B_j/\tilde{m}^B_j) = 2\{273\log_e(273/293.0)+313\log_e(313/293.0)\}=2.732$$

$$G^2_C = 2\sum n^C_k \log_e(n^C_k/\tilde{m}^C_k) = 2\{311\log_e(311/293.0)+275\log_e(275/293.0)\}=2.213$$

$${}_TG^2_{AB} = 2\sum\sum n^{AB}_{ij} \log_e(n^{AB}_{ij}/\tilde{m}^{AB}_{ij}) = 2\{134\log_e(134/146.5)+139\log_e(139/146.5)$$
$$+158\log_e(158/146.5)+155\log_e(155/146.5)\}= 2.853$$

$${}_TG^2_{AC} = 2\sum\sum n^{AC}_{ik} \log_e(n^{AC}_{ik}/\tilde{m}^{AC}_{ik}) = 2\{167\log_e(167/146.5)+144\log_e(144/146.5)$$
$$+125\log_e(125/146.5)+150\log_e(150/146.5)\}= 6.191$$

$${}_TG^2_{BC} = 2\sum\sum n^{BC}_{jk} \log_e(n^{BC}_{jk}/\tilde{m}^{BC}_{jk}) = 2\{163\log_e(163/146.5)+110\log_e(110/146.5)$$
$$+148\log_e(148/146.5)+165\log_e(165/146.5)\}=14.011$$

$${}_TG^2_{ABC} = 2\sum\sum\sum n^{ABC}_{ijk} \log_e(n^{ABC}_{ijk}/\tilde{m}^{ABC}_{ijk})$$
$$= 2\{80\log_e(80/73.25)+83\log_e(83/73.25)+54\log_e(54/73.25)+56\log_e(56/73.25)$$
$$+87\log_e(87/73.25)+61\log_e(61/73.25)+71\log_e(71/73.25)+94\log_e(94/73.25)\}=21.911$$

$$G^2_{AB} = {}_TG^2_{AB} - G^2_A - G^2_B = 2.853 - 0.007 - 2.732 = 0.114$$

$$G^2_{AC} = {}_TG^2_{AC} - G^2_A - G^2_C = 6.191 - 0.007 - 2.213 = 3.972$$

$$G^2_{BC} = {}_TG^2_{BC} - G^2_B - G^2_C = 14.011 - 2.732 - 2.213 = 9.066$$

$$G^2_{ABC} = {}_TG^2_{ABC} - G^2_A - G^2_B - G^2_C - G^2_{AB} - G^2_{AC} - G^2_{BC}$$
$$= 21.911 - 0.007 - 2.732 - 2.213 - 0.114 - 3.372 - 9.066 = 3.794$$

7） A固定，要因B×Cでの均等分布を仮定したモデル

これは，要因Aの人数 n_i が集計表 BC_{jk} の各セルに均等分布することを仮定したモデル（モデル7）である．このモデルでは，全体の尤度比 ${}_TG^2$ は，G^2_B，G^2_C，G^2_{AB}，G^2_{AC}，G^2_{BC}，G^2_{ABC} の6つの変動源に分割できる．3要因での期待値は，

$$\hat{m}^{ABC}_{ijk}=\frac{1}{qr}\times n^A_i \qquad \cdots (26)$$

である．残差分析法の残差成分（r_{ijk}）の分母（d_{ijk}）は，

$$\begin{aligned} d^{ABC}_{ijk} &= [\hat{m}^{ABC}_{ijk}\{1-\hat{m}^{ABC}_{ijk}(1/n^A_i)+\hat{m}^{ABC}_{ijk}\times 0\}]^{1/2} \\ &= [\hat{m}^{ABC}_{ijk}\{1-n^A_i/(qr)\ (1/n^A_i)\}]^{1/2} \\ &= [\hat{m}^{ABC}_{ijk}\{1-1/(qr)\}]^{1/2} \qquad \cdots (27) \end{aligned}$$

従って，標準化された調整後の残差成分は次式で与えられ，有意性の検定は単位正規分布を利用する．

$$r_{ijk}=\frac{n^{ABC}_{ijk}-n^A_i/(qr)}{[n^A_i/(qr)\ \{1-1/(qr)\}]^{1/2}} \qquad \cdots (28)$$

8）ABC集計の各セルに均等分布を仮定した検定モデル

これは，要因A×B×Cの集計表の各セルに人数が均等に分布することを仮定したモデル（モデル8）である．このモデルでは，全体の尤度比 ${}_TG^2$ は，G^2_A，G^2_B，G^2_C，G^2_{AB}，G^2_{AC}，G^2_{BC}，G^2_{ABC} の7つの変動源に分割できる．つまりすべての変動源が有効なフルモデルとなる．
3要因での期待値は，

$$\hat{m}^{ABC}_{ijk}=\frac{1}{pqr}\times N \qquad \cdots (29)$$

となる．残差分析法の残差成分（r_{ijk}）の分母（d_{ijk}）は，

$$\begin{aligned} d^{ABC}_{ijk} &= [\hat{m}^{ABC}_{ijk}\{1-\hat{m}^{ABC}_{ijk}(1/N)+\hat{m}^{ABC}_{ijk}\times 0\}]^{1/2} \\ &= [\hat{m}^{ABC}_{ijk}(1-\hat{m}^{ABC}_{ijk}/N)]^{1/2} \\ &= [\hat{m}^{ABC}_{ijk}\{1-N/(pqr)\}\ (1/N)]^{1/2} \\ &= [\hat{m}^{ABC}_{ijk}\{1-1/(pqr)\}]^{1/2} \qquad \cdots (30) \end{aligned}$$

従って，標準化された調整後の残差成分は，次式で与えられる．残差成分の有意性の検定は単位正規分布表を利用する．

$$r_{ijk}=\frac{n^{ABC}_{ijk}-N(pqr)}{[N/(pqr)\ \{1-1/\ (pqr)\}]^{1/2}} \qquad \cdots (31)$$

以上に述べた8つのモデルの残差分析法における残差成分の算式を Table 2 に要約した．

人数による重み付けをしない分散分析法の適用に際して，処理群の人数が均等分布しているか

どうかを検討するには，モデル 8 による検定が有意でなければよいことになる．もし，均等分布のモデルが有意ならば，残差成分を検討するか，周辺度数を固定したモデル 3 やモデル 4 で分析し有意な変動源を特定化する．

全体の尤度比（あるいは χ^2値）を Sutcliffe の方法で分割する方法は，モデル 1 ～ 8 までについて，Table 1-3. 1 から Table 1-3. 8 に示した．モデル 1 ～ 4 の全体の尤度比，あるいは χ^2値の分割法は，篠原（1989，pp. 185-255）に示されている．

要　約

3 要因クロス表の尤度比検定（χ^2 検定）には，18 個のモデルがあるが，実質的には 8 個のモデルに包含される．この 8 個のモデルうち 7 個のモデルでは直接期待値を算出できる．残りの 1 種類は，繰り返し法によって期待値を推定する必要がある（篠原　1989）．

これらの 8 個のモデルのうち 3 個は期待値を周辺度数を固定して算出モデルである．本研究では，これらのモデルのほかに，期待度数に均等分布を仮定した 4 つのモデルを，具体的な計算法とともに残差分析法も含めて説明した．

引 用 文 献

Bishop, Fienberg, and Holland 1975 *Discrete Multivariate Analysis*, The MIT Press.

Sutclffe, J., P. 1957 A general method of analysis of frequency data for multiple classification. *Psychological bulletin*, 54, 134- 137.

篠原弘章　1989　行動科学の BASIC －ノンパラメトリック法 , ナカニシヤ出版

Haberman, S. J. 1978 *Analysis of Qualitative Data*, Vol.1, Academic Press.

Fienberg, S, E. 1977 *The Analysis Cross-Classified Categorical Data*, The MIT Press.

弓野憲一　1981　対数－線型モデルによる質的データの解析とそのための BASIC プログラム，静岡大学教育学部研究報告（自然科学篇），第 32 号，189-215.

[付記]

本研究は，1998 年 9 月に開催された日本教育心理学会第 40 回総会研究委員会シンポジウム「教育心理学における質的データの解析法：汎用統計パッケージによる頻度データの解析」（教育心理学年報　1999 年，第 38 集，14-17 頁）の発表資料を加筆したものである．