熊本大学教育学部紀要，人文科学
第51号，207－222，2002

# 関数概念の習得の困難に関する一考察

菅　岡　強　司

# Student Difficulty in Acquiring Function Concepts

Tsuyoshi SUGAOKA

(Received September 2, 2002)

## 1　はじめに

筆者は以前に質問紙調査をおこない，その回答の結果をふまえて，1次関数・2次関数を中心に関数概念の指導に関する視点を提出した（菅岡，2000）．

本稿は，その結果をふまえて，一般的な関数概念を習得しようとするさいの問題点を抽出し，検討を加えることを目的とするものである．そのために，教育系大学生を対象として，新たに質問紙調査を実施した．その結果を分析することによって，関数概念（主として中等数学における関数概念）の理解の様相を明らかにし，その習得がどのように困難なのかに関して，いくつかの側面を明らかにする．

## 2　調査の方法

### 2．1　調査問題

調査に用いた問題は，［1］～［5］の5題であり，［1］は1～7の小問に分かれている．それを次のページ以降に示す．

なお，この調査で用いた質問紙の問題作成にあたっては，下記の文献を参考にした．

［1］1 ～ 3：Vinner, S., & Dreyfus, T.(1989).
　4：Even, R.(1993).
　5：Even, R.(1993).
　6：Vinner, S.(1983), Vinner, S., & Dreyfus, T. (1989).
　7：Even, R.(1993).

［2］：Markovits, Z., Eylon, B., & Bruckheimer, M.(1986), Even, R.(1993), Schwarz, B.B., & Hershkowitz, R.(1999).

［3］：Markovits, Z., Eylon, B., & Bruckheimer, M.(1986), Even, R.(1993), Schwarz, B.B., & Hershkowitz, R.(1999).

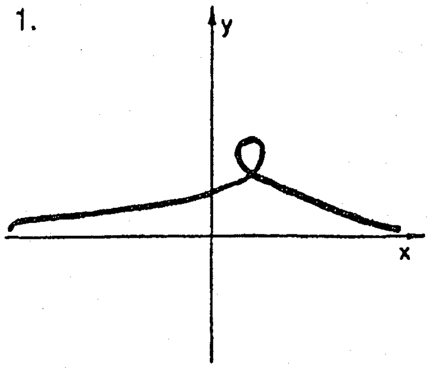
［4］：Vinner, S.(1983), Vinner, S., & Dreyfus, T.(1989), Even, R.(1993).

［5］：Even, R.(1993).

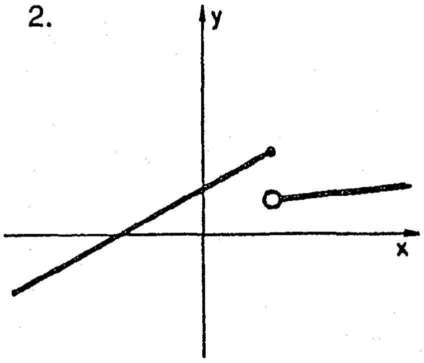
調査問題

［1］グラフが下図のようになる，または，その満たす条件が下記のようになる関数は存在するか．1 ～ 7 のうち，関数が存在すると思うものの番号に○，存在しないと思うものの番号に×をつけよ．

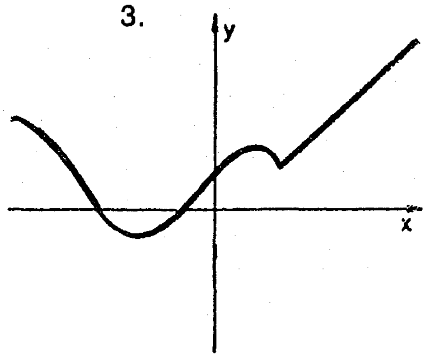
1.




2.




3.



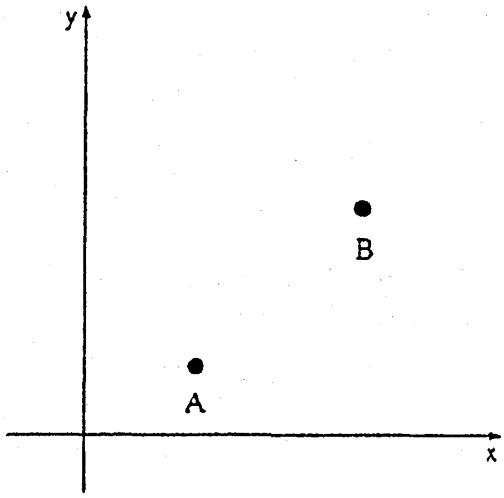

4. すべての実数に対して，0 となるもの．

5. $x$ が有理数のときに $x$，$x$ が無理数のときに 1 を結びつける対応．

6. 整数に対して非整数，非整数にして整数の値をとるもの．

7. $\{(1, 4), (2, 5), (3, 9)\}$

［2］1. 右図の 2 点 A, B を通る関数のグラフを描け．




2. そのような関数はいくつあるか．次のなかから正しいと思うものを選び，○をつけよ．また，その理由を簡単に述べよ．

(a) 0　　(b) 1　　(c) 2

(d) 2 より多く 10 以下である

(e) 10 より多いが無限に多くはない

(f) 無限に多い

理由：

［3］1. 右図の 3 点 A, B, C を通る関数のグラフを描け．

2. そのような関数はいくつあるか．次のなかから正しいと思うものを選び，○をつけよ．また，その理由を簡単に述べよ．

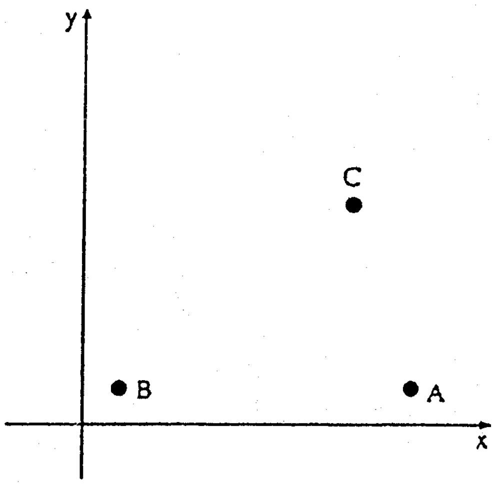
(a) 0　(b) 1　(c) 2

(d) 2 より多く 10 以下である

(e) 10 より多いが無限に多くはない

(f) 無限に多い

理由：




［4］関数の一般的な定義を述べよ．

［5］ 次の関数 $y = g(x)$ のグラフを描け．

$$g(x) = \begin{cases} x, & x \text{が有理数のとき} \\ 1, & x \text{が無理数のとき} \end{cases}$$

上記の調査問題のなかで，［1］5 と［5］は同じ関数を扱った問題である．

また，［1］4,［1］5（または［5］）は，Even（1993）が扱った問題を少し改変したものである．Even は，中等学校の数学教師を志望している大学生を被験者として，質問紙調査と面接（インタビュー）をおこなった．その，［1］4,　［1］5（［5］）の代わりに，Even が取り上げた関数はそれぞれ次のとおりである．

［1］4　$f: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$　$f(x) = 4$

［1］5（［5］）

$$g(x) = \begin{cases} x, & x \text{が有理数のとき} \\ 0, & x \text{が無理数のとき} \end{cases}$$

前者については，記号の知識のない被験者に対してもわかりやすくするために，言葉で表した．また，4 を 0 に変えた．後者については，［5］に対して被験者が描いたグラフを筆者が判別しやすくするために，0 を 1 に変えた．$y = g(x)$ のグラフが $x$ 軸と重なることを避けたわけである．なお，Even 自身は，［1］5 のような言葉ではなく，上記の表現で取り上げている．

### 2. 2 被験者

被験者は，教育系大学2年生計204名である．与えられた調査問題によって，被験者は次のA～Eの5群に分けられる．

A ［1］1～3，［3］：18名
B ［1］1～3，［3］，［4］：21名
C ［1］1～7，［3］，［4］：101名
D ［1］1～3，［3］，［4］，［5］：43名（どちらかといえば理系）
E ［1］1～7，［2］，［3］，［4］：21名

どの被験者群にも，上記の順序で問題を与えた．すべての被験者に共通に与えられた問題は，［1］1～3である．回答の時間は，全員の回答が終わるまでとした．

したがって，問題別の被験者数は次のようになる．

［1］1～3：204，1～7：122　［2］21　［3］204　［4］186　［5］43

また，実施時期は，2000年10月～12月である．

大部分の被験者は，1993年に中学校に入学し，1996年に高等学校に入学している．したがって，これらの被験者は，中学校第1学年から前中学校学習指導要領に準拠した教科書を使ったと考えられる．したがって，前々中学校学習指導要領の第3学年にあった，「関数を，集合の観点に立って見直す」という内容は学んでいない．また，高等学校数学については，高等学校入学当初から現高等学校学習指導要領に準拠した教科書を使った，あるいは少なくとも現高等学校学習指導要領のもとでの授業を受けたと考えられる．

被験者204名のうち，201名は小学校教員養成課程の学生であり，残り3名は大学院修士課程の学生である．D群43名のうち，39名は算数・数学または理科を専攻する学生であるが，39名全員が高等学校生徒のとき理系だった（あるいは数学Ⅲ・数学Cを履修した）とは限らない．しかし5群全体の中では，どちらかといえば理系の学生といってよい．

## 3 全体の調査結果

全体の回答結果は次のとおりである．数値は，○または×，(a)～(f) を選択した回答数（および，その割合）を示している．ただし，［2］1，［3］1，［4］，［5］に対する結果については，後であらためて取り上げるので，ここでは除外した．

［1］（1～3：被験者204，1～7：被験者122）

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1. | ○ 11（5.4%） | × 191（93.6%）正答 | 無回答3 |
| 2. | ○ 165（80.9%）正答 | × 36（17.6%） | 無回答2 |
| 3. | ○ 190（93.1%）正答 | × 13（6.4%） | 無回答1 |
| 4. | ○ 86（70.5%）正答 | × 35（28.7%） | 無回答1 |
| 5. | ○ 32（26.2%）正答 | × 89（73.0%） | 無回答1 |
| 6. | ○ 63（51.6%）正答 | × 58（47.5%） | 無回答1 |
| 7. | ○ 95（77.9%）正答 | × 27（22.1%） | 無回答0 |

［2］2.（被験者21）

(a) 0…0　(b) 1…0　(c) 2…1（4.8%）

(d)　2より多く10以下である…3（14.3%）
(e)　10より多いが無限に多くはない…2（9.5%）
(f)　無限に多い…15（71.4%）正答　無回答…0

[3]　2.（被験者204）
(a)　0…0　(b)　1…16（7.8%）　(c)　2…12（5.9%）
(d)　2より多く10以下である…42（20.6%）
(e)　10より多いが無限に多くはない…23（11.3%）
(f)　無限に多い…107（52.5%）正答　無回答…4

では，調査問題に対する回答を個別にみていこう．まず［4］の回答結果から，関数の定義をどのようにとらえているかを分析する．次に，Freudenthal（1983）が現代数学における関数の特徴的な性質として指摘し，Even（1993）が重要視している，一意性と任意性について，それぞれ，［1］や［2］［3］の回答結果，［1］［5］や［3］の回答結果から，被験者の理解の様相をみることにする．

## 4　関数の定義について

筆者は以前に（菅岡，2000），本調査とは別の被験者に対して質問紙調査をおこない，1次関数および2次関数について「関数の意味を説明せよ」という課題を与えた．その回答の結果について，マックレーン（1992）およびVinner & Dreyfus（1989）を参考にして，式，グラフ，規則・依存性（規則性または関数的依存性），および，それらの2個以上のものが組み合わされたもの，その他，というカテゴリーをつくり，分類した．

本調査の［4］に対する被験者の回答については，そのカテゴリー分けを改善して，式，グラフ，規則，従属する変化，単なる対応，一意的な対応，値の一覧表，という7個のカテゴリーに分類した．

ところでマックレーンは，関数の定義を記述するための方法をいくつか取り上げ，それぞれの特質について，次のように述べている．そのうえで彼自身は，順序対の集合として関数を定義するのが適切であると主張しているのである．

式：　関数とは文字$x$についての式である．$x$に数を代入すれば式から数が得られる．それが変数$x$の与えられた値に対する関数の値である．

グラフ：　関数とは　$(x,\ y)$-平面上の曲線であって，各縦線　$x=a$とはたかだか1点で交わるようなもののことである．交点の座標を$(a,\ b)$とすれば，変数の値が$a$の場合に関数のとる値は$b$となる．$x=a$と曲線が交わらないときは，そこで関数は定義されない．

規則：　変数$y$が変数$x$の関数であるとは，$x$の各値に対して，対応する$y$の値を与える規則が定まっていることをいう．

依存性：　量$x$の値が決まれば$y$の値も確定し，したがって$y$が$x$に依存して決まるとき，そして，そのときに限って変量$y$は量$x$の関数であるという．

値の一覧表：　関数とは第1の量$x$の各値に対して，それに対応する第2の量$y$の数値を書き入れた値の一覧表によって決定されるものである．

統辞規則：　集合 $X$ から集合 $Y$ への関数 $f$ とは，1つの記号 $f$ であって，項 $x$ が $X$ の元を表わすとき，記号列 $fx$ が $Y$ の元，すなわち変数 $x$ における $f$ の値，を表わすものである．

順序対の集合：　集合 $X$ から集合 $Y$ への関数 $f$ とは，順序対のつくるある集合 $S \subset X \times Y$ であって，各 $x \in X$ に対し，第1成分が $x$ であるような対 $< x, y >$ が $S$ の中にちょうど1つ存在するようなもののことをいう．この対 $< x, y >$ の第2成分を関数 $f$ の $x$ での値と呼び，$f(x)$ と書く．$X$ を $f$ の定義域，$Y$ を値域と呼ぶ．

本調査で用いたカテゴリーのうち，式，グラフ，規則，値の一覧表については，マックレーンの叙述に準じているが，被験者の回答の大部分が厳密性を欠いているために，よりゆるやかなものとした．つまり，式，グラフ，値の一覧表については，主として式，グラフ，表に着目した回答をそれぞれのカテゴリーとして分類した．規則のカテゴリーについては，規則・法則や関係に焦点がある回答，一定の割合や比例に着目した回答を入れた．さらに，マックレーンが挙げた統辞規則も，このカテゴリーに含めたが，実際の回答はなかった．

また，従属する変化というカテゴリーには，マックレーンの依存性に準じたものであるが，従属性，変化に焦点がある回答を入れた．

一意的な対応のカテゴリーとして分類したのは，対応の一意性，従属変数の一意的な存在に着目した回答である．マックレーンのいう順序対の集合のような関数の現代的な定義も，このカテゴリーに含めた．

なお，2個以上のカテゴリーにかかわる回答の場合は，主として述べられている内容，最初のほうで述べられている内容にしたがって分類した．

### 4. 1　関数に定義についての回答結果

［4］の被験者は186名で，無回答が32（17.2%）あった．その回答があったものの内容を分類した結果は，下記のとおりである．カテゴリー名の後の数字は，回答数を示している．一つ一つの回答は，改行または／によって区別している．ただし，改行後に字下げのあるものは，同じ被験者の回答である．

**式　35**（19.4%）

$y = ax + b$　（他の同じ回答：1）

$y$ に対する $x$ の変化で，$y = ax$（$a$：変化率）

$y = ax$　$y = ax^2 + bx + c$　$y = ax + b$　$y = a/b\ x$

$f = ax$ などの式で表せる．／ $f(x)$ の式で表せる．

$f(x) = ax^{p} + bx^{pCp-1} + cx + \cdots\cdots + \cdots\cdots$

$y = f(x) + \alpha$ で表すことができるもの．

$y = ax$ や $y = ax + b$ といった，$x$ が一次式である一次関数，$y = ax^2$ のように $x$ が二次式となる二次関数がある．$y$ と $x$ を用いて，表す．

$x$ と $y$ によって式に表され，$x$ によって $y$ が変化していくもの．

$x$ という，どんな数でもあてはめられる文字が式の中に入っているもの．$x$ に入れる数字によって，その式の表すものが違ってくる．その $x$ に，2乗，3乗と相乗がつくことで，その式の値が，大幅な変化をする場合もある．グラフにすれば，直線，曲線の両方が示される．

式がつくれる．グラフがかける．

$x$ を $y$ で表わした式で，グラフに表せるもの．ex）$y = ax$，$y = ax + b$，$y = ax^2$，$y = ax^2 + bx + c$ など．
ある式　$y = ax$，$y = bx + c$　といった式の文字に数字をあてはめたとき，その式がイコールで結ばれ，その式が成り立つとき，その式は関数であるといえる．
定数でない文字の入った式．
点の集まりを数式化したもの．／　方程式で表せる，点の集まり．
ある区間から区間において，一定の計算式が成り立っているもの．
代入する数値によって変わる式．
ある数式があるとき，そこにある $x$ をあてはめると得られる $y$ の値．
ある値 $x$ について，ただ1つの値 $y$ をとる数式のこと．
ある数 $x$ が変わることで，式の表す値も変化するもの．
一方の値が変化すると，もう一方の値もそれに伴って変化する形をとる数式．
$x$ と $y$ から成り立つ式で，一方に代入すれば，それに伴って，もう一方も値が変わる．
ある方程式 $y = ax^2 + b$ のような場合，$x$ の値を変えれば，$y$ も変わるような場合．
ある一定の範囲（領域）において，ある1つの式で変化が統一されるもの．
ある法則に基づいて，どんな数を入れても表現したい数が出る式をつくることができるもの．
等式の中に $x$，$y$ など変化する値があって，一方が変わると，もう一方が決定されるもの．
$x$ と $y$ の関係式が立てられる．$x$ が変化すると，$y$ も変化する．その逆もいえる．
$x$，$y$ が有理数のとき，$x$ 軸，$y$ 軸をとると，$y$ は $x$ を使った式で表すことができる．
ある値を求めるために，変化する数を $x$ と置き，その値をyとした式．
$x$ と $y$ について，それにどんな値を入れても成立するような $x$ と $y$ の関係式．
2つ以上の数と数の関係を同じ式を用いて表し，共通な点を見い出すこと．
2つの文字と1つの式が与えられていて，1つの文字にある値を入れると，もう一つの値が決定するもの．1つの文字の値が変化すると，もう一つの文字の値も変化するもの．
ある式について，一定の範囲内で変化する数値の（後なし）　／　複数の解を持つ（後なし）

グラフ　**8**（4.3%）

傾きが一定である．1次関数は2点が決まれば1つのもの．2次関数は3点が決まれば1つのもの．
グラフで表せるものであること．
それぞれの点を1本の線で結んだグラフ．限界がないグラフ．
無限の線（1本の）．
平面上での縦軸と横軸にくる数との関係を，1本の線で表したもの．
$x$ 座標，$y$ 座標上に座標をとる点が集まり，直線および曲線で描くことができる．
・$x$ の値を無限としたとき，$x$ 軸と2点で交わる．　・頂点を持つ．
異なる2点を通る（後なし）

**規則**　**42**（22.6%）

$x$ の値が変化するとき，ある決まった割合で $y$ の値も変化する．
$x$ が2倍，3倍になるとき，$y$ も2倍，3倍になる．
$x$ が一定の割合で増えると，$y$ も一定の割合で増える．$x$ が一定の割合で減ると，$y$ も一定の割

合で減る.
一般的に2つの数があり，一方が変化すれば，それに伴って，もう一方も同じ割合で変動し，相関があるもの.
1つの値が変化するにつれて，同じ割合で変化する2つの数.
ある決まった割合で一定に変化する数.
比例したり反比例したりすること.
$x$ の値に比例もしくは反比例して，$y$ の値が増減していくもの.
片方の値が，もう片方の値に影響するもの．相互に影響し合っている.
$y$ と $x$ との規則がある関係.
ある数とある数の間に何らかの関わりがあり，どれかが変化したときに他方もまた何らかの影響を受けるもの.
比例や反比例のように，一方の数が変化すると，それに対応して，一定の規則通りに，他の数が増えたり減ったりすること.
ある1つの数がもう一つの数によって一定の方向性を持って変化していく.
ある数字に何かを足したり，引いたり，掛けたり，割ったりすることによって，規則的に値が変化するもの．また，その関係を意味する.
$y = ax + b$ や $y = ax^2 + bx + c$ など，規則的に変化するもの.
変数 $x$ に対する変数 $y$ の散らばり方の関係.
ある一定の割合で変化する変数 $x$ に対して，別の割合で変化する変数 $y$ の $x$ と $y$ の関係.
2つの値があり，一方の変化に伴い，規則性をもち，もう一方の値も変化すること.
一定の規則性をもって，1つの値に対し，一方の数値が決定するもの.
比例や反比例など，何らかの規則がある.
2つのものにおける関係を調べ，規則性を見つけ，式に表せ，グラフにも表せる.
一方が増えると，もう一方がある一定の規則で増えたり減ったりする.
ある文字と数字によってできている値が，その法則に従い，一定の変化をするもの.
1つの値を決めたときに，他の値が一定の法則に沿った値で出てくるもの.
ある法則にのっとって関わり合う数.
ある変数 $x$ が変化すると，その解である $y$ も変化する．つまり，互いに関わっている数.
2つの量が互いに伴って変化していく関係をもっている.
2つの変数の，ある一方が決まると，それに対応してもう一方の変数が決定するという，2つの変数の関係を表すもの.
ある数 $x$ を定めると，その $x$ が変化することによって $y$ の値も変化するが，その $x$ と $y$ の変化の関係のこと.
1つの値 $x$ の値の変化に対して，もう1つの値 $y$ が規則的に変化するという $x$，$y$ の関係のこと.
$x$ がとる値によって変化する $y$ との間の関係.
$x$ と，$x$ が変化するときの $y$ の値の関係.
さまざまな条件下での2つの数の関係を示すもの.
$y$ と $x$ によって成り立つもの． ／ $x$ と $y$ の関係が成り立つもの.
$x$ と $y$ の関係を表したもの.
1つの数に対して，他にどう関わってくるか.
ある法則の上で取られる任意の点の集合.

$y$ を $x$ で表せたりして，規則的な点の集まり．
ある規則をもった点の集まり．／ 規則性をもった点の集合体．
関連する数の集合．

**従属する変化　22**（11.8％）
伴って変わるいくつかの数．／ 何かに伴って，その他も動くもの．
$x$ が変化したときの $y$ の変化を表したもの．
1つの値が変化すると，もう一方にも変化する．
あるものの値が変化すると，別のものがそれに伴って変化する．
ある変数の値が変化すると，それに伴って，他の値も変化する．
複数の値があり，1つの値の変化に伴って，他の値も一定に変化する．
1つの変数が値を変えることで，もう1つの値が変わること．
一方に値をあてはめると，それに関するもう一方の値も変化するもの．
2つの変数が関係していて，一方が変化すれば，もう一方も一定の変化をしていく．
ある数が変化することによって，その数とある一定の関係をもつもう1つの数が変化すること．
ある値が変化することによって，それに対応する値も変化していくことを示すもの．
ある一方の値が変化すれば，もう一方の値も変化する．ただし，変化しないものもある．
一定の変域内において，変域内の数に対して求められる数の変化．
定数 $a$ が変化すると，それに伴って値も変化する．
$x$ の値によって $y$ は変化する．／ $x$ の値が変わると，$y$ の値も変わるもの．
$x$ と $y$ の関係において $x$ の値が増減すると，$y$ の値も増減する．
$x$ が変化すると，それとともに $y$ が変化する．
1つの値が増えていくとき，それに伴って変わる数．
ある数 $x$ が変化すると，それに伴い，他の数 $y$ も $x$ に関連して変化するような数．
関数とは，ある数が，増減に伴って，その数値も変わることで，（後なし）

**単なる対応　22**（11.8％）
1つが増えると，それに伴って増える数が存在すること．
数を変えていくと，それに対応する数がある．
関数とは，ある数に対応する数を求めたもの．
ある1つの数字に対して，対応する数字が存在するもの．
ある数を定めたとき，同時に別の値が存在するもの．
$x$ に対する $y$ の値がある．／ 1つの数 $x$ に対して，$f(x)$
変化する $x$ の値に対して存在する $y$ の値．
ある数 $x$ がある値をとるとき，それに対応して $y$ も決まった値をとる．
$x$ がある決まった値をとるとき，それに対応して，$y$ もある決まった値をとるとき，$y$ は $x$ の関数である．
$x$ が1つ決まると，それに対応する $y$ が1つまたはいくつか決まるもの．
変数 $x$ の値が決まれば，伴って，もう一つの変数 $y$ が1つ以上定まる．
いくつかの変数が，1つの数が定まることによって，他の数も定まるもののこと．
ある1つの値が決まることにより，もう1つの値が決定する．

ある1つの値が決まると，もう一方の値も決まる．

一方の値が定まれば，必ずもう一方の値が定まるもの（$x$の値が決まれば$y$の値が決まる）．値が変化するもの．

任意の$x$に対して，$y$が決定する．

$x$の値が定まることによって，$y$の値が定まること．

$x$の値によって$y$の値が決まる．その反対も言える．

1つの数字（$x$）が定まると，おのずと（$y$）も定まり，式で表せるもの．

ある値を入れると，もう1つの値が出てくるもの．

ある定数を決めたとき，それに関連して答えが決まるもの．式に表すことができる．

**一意的な対応　24**（12.9%）

1つの変数に対して，他の変数が必ず1つだけ値をとる．

$x$にある値をあてはめたとき，1つの定義により，$y$が与えられたときの（x，y）の集合．

どんな変数$x$に対しても，変数$y$の値がただ1つに決まる．

ある値に関して，ただ1つのものが対応するもの．

1つの$x$の値に対して，1つの$y$の値がある．

$x$が1つの値をとったときに，$y$も1つの値をとる．

1つの値$x$に対して，対応する1つの値$y$が存在すること．

1つの$x$の座標に対して，1つの$y$の値が存在するもの．

$x$の値が変化するにつれ，$y$の値も変化し，1つの$x$の値に対しての$y$の値も1つである．

ある数値（$x$）のときには，必ず1つの数値（$y$）を示すような数．

ある1つの値を設定したとき，対応する値が1つ決められる．

1つの数が決まれば，もう1つの対応する数が決まる．

ある$x$の値が決まると，それに対応する$y$の値が1つ決まる．

1つの変数がいろいろ動いて，1つに決まると，他の数も1つに決まる．

$x$を決めると，ただ1つ$y$が決まる．

変数$x$，$y$があり，$x$を決めると，$y$がただ1つに決定できるもの．

$x$の値が決まったとき，$y$の値が1つに決まるとき，$x$は$y$の関数であるという．

1つの$x$に対して，$y$が1つに定まるもの．

$x$の値が1つ決まると，$y$の値も1つだけ決まる．

$x$の値を1つ決めることによって，$y$の値が1つ決まること．

任意の数$x$に対し，$y$の値が1つに決まり，変化していくもの．$y=f(x)$

$x$の値が1つに決まるとき，$y$の値も1つに決まる．そのような数の関係のこと．
　（例）$y=ax+b$，$y=ax^2$，etc.

変数$x$を定めたときに，値yがただ1つ決まる．　$y=f(x)$

・$x$が変化したら，それにつれて変化する数$y$がある．　・$x$に対応するただ1つの解がある．

**値の一覧表　0**

**無回答　32**（17.2%）

### 4. 2　教科書における関数の定義

では，日本の数学の教科書においては，関数はどのように定義されているのだろうか．

被験者が使っていたと考えられる，前学習指導要領に準拠した6社の中学校数学の教科書を見てみよう．関数という用語が出てきて，関数が定義されるのは，第2学年の教科書であり，それぞれ下記のように定義が述べられている．

A.『新しい数学2』東京書籍

ある量とそれにともなって変わる他の量があり，それぞれを変数 $x$，$y$ で表す．$x$ の値を決めるとそれにつれて $y$ の値もただ1つ決まるとき，$y$ は $x$ の関数であるという．

B.『数学2年』啓林館

一般に，ともなって変わる2つの変数 $x$，$y$ があって，$x$ の値を決めると，それに対応して $y$ の値が1つに決まるとき，$y$ は $x$ の関数である　という．

C.『中学校数学2』学校図書

このように，ともなって変わる2つの変数 $x$，$y$ があって，$x$ の値を決めるとそれに対応する $y$ の値がただ1つ決まるとき，$y$ は $x$ の関数であるといいます．

D.『中学数学2』教育出版

2つの変数 $x$，$y$ があって，$x$ の値を決めると，それに対応する $y$ の値がただ1つ決まるとき，$y$ は $x$ の関数であるという．

E.『中学校数学2』大日本図書

このように，ともなって変わる2つの数量 $x$，$y$ があって，$x$ の値を決めると，それに対応して $y$ の値がただ1つ決まるとき，$y$ は $x$ の関数であるという．

F.『中学数学2』大阪書籍

このように，ともなって変わる2つの数量 $x$，$y$ があって，$x$ の値を決めると，それにともなって $y$ の値がただ1つ決まるとき，$y$ は $x$ の関数であるという．

現行の高等学校の学習指導要領においては，数学Ⅰで関数が登場する．そこでは，下記に示すように，あらためて関数が定義されている．

G.『四訂版　高等学校　数学Ⅰ』数研出版

一般に，2つの集合 $A$，$B$ において，ある対応によって，$A$ のどの要素にも，$B$ の要素が1つずつ対応しているとき，この対応を $A$ から $B$ への関数といい，記号 $f$ などを使って

$$f: A \to B$$

と書き表す．

H.『四訂版　高等学校　新編　数学Ⅰ』数研出版

この $x$，$y$ のように，ある範囲でいろいろな値をとって変化する数を変数という．……このように，2つの変数 $x$，$y$ の間にある関係があって，$x$ の値が定まるとそれに対応して $y$ の値がちょうど1つ定まるとき，$y$ は $x$ の関数であるという．

$y$ が $x$ の関数であることを，次のような記号で表す．

$$y = f(x),\quad y = g(x)$$

I.『高等学校の数学Ⅰ　改訂版』三省堂

$x$ の値をいろいろ変えると，それに応じて $y$ の値がきまる．したがって，$y$ は $x$ の関数であ

る．……一般に，$y$ が $x$ の関数であることを

$$y=f(x)$$

などと表す．

以上のＡ～Ｆの教科書の叙述から判断すれば，中学校の数学では，本調査のカテゴリーのうち，対応の一意性に属する定義が生徒に与えられているといってよい．高校の教科書においても，対応の一意性に属する定義が与えられていることは同様である．ＨやＩのように，定義そのものは中学校数学の教科書とほとんど同じで，新たに $y=f(x)$ などの記号による表現が出てくるにすぎないものもある．しかし他方で，Ｇのように，集合の要素の対応として関数を定義しているもの，したがって現代的な定義をとっているものもある．

### 4．3　関数の定義についての回答結果の考察

[4] に対する被験者の回答の結果から，被験者の大学生が関数の定義をどうとらえているかが明らかになった．

日本の数学の教科書においては，対応の一意性に関する定義が中心であるが，被験者 186 名の回答の中で，一意的な対応のカテゴリーに入ったのは，24 で 12.9%，無回答を除いても 15.6% にすぎなかった．

関数の定義として，式，グラフ，規則，従属する変化，単なる対応のカテゴリーに属する回答が多かったのは，被験者の学習の歴史によるものであろう．さまざまな関数を個別に，単純なものから複雑なものへと教えられてきたことによって，関数の一般的な定義よりも，個別の関数について学んだ変化の性質や問題解決の技法のほうが，被験者の頭に残っていたのではないだろうか．

さて，筆者はかつて，「1 次関数の意味を説明せよ」という質問紙の問に対し，関数の一般的な定義を回答する者がいたことから，「1 次関数はプロトタイプになる傾向があるのではないか」と主張した（菅岡, 2000）．そこで，[4] の結果で，すなわち，関数の一般的な定義として 1 次関数の定義や固有の性質を答えているかどうかをみてみよう．

カテゴリー別にみると，そのような回答の数は，

式：3,　　グラフ：1,　　規則：8

で，計 12（6.5%）であった．ただし，規則に属する回答のうち，「一定の割合」「同じ割合」などと答えているもの，関数の定義として「比例または反比例」と述べているものも含めた．

したがって，1 次関数だけにとらわれている被験者は少なかった．しかし，これらの少数の被験者にとっては，1 次関数（あるいは比例）が実際にプロトタイプになっているということである．なお，この結果は，他の多くの被験者にとって 1 次関数がプロトタイプになっていない，ということまで示しているわけではない．

## 5　関数の一意性と任意性について

### 5．1　関数の一意性

関数の一意性とは，マックレーンの順序対の集合による定義でいえば，対＜ $x, y$ ＞がＳの中にちょうど 1 つ存在することをさしている．

問題［1］1で○をつける者は，関数の一意性を理解していないといえる．そのような被験者は，11名（5.4%）であった．その11名中3名はA群の被験者なので，［4］に回答していない．また，2名は［4］に対して無回答である．残り6名の，［4］に対する回答をカテゴリー別に示す．

式………………点の集まりを数式化したもの．
　　　　　　　ある区間から区間において，一定の計算式が成り立っているもの．
規則……………片方の値が，もう片方の値に影響するもの．相互に影響し合っている．
従属する変化…ある変数の値が変化すると，それに伴って，他の値も変化する．
単なる対応……1つが増えると，それに伴って増える数が存在すること．
一意的な対応…1つの変数に対して，他の変数が必ず1つだけ値をとる．

最後の回答の定義に従えば，［1］1は×になるはずである．○をつけたということは，この被験者のもっている関数の定義は，関数のイメージとは別だということを意味している．

他の回答の定義については，［1］1に○をつけたことと論理的に両立しうる．それらの定義を適用したとしても，［1］1に×をつけるとは限らないのである．

ところで，関数の一意性の理解についての綻びは，さらに［3］1でも現れた．3点A，B，Cを通る関数のグラフとして，円，もしくは，円に類似した閉曲線を3名の被験者が描いたのである．3名とも［1］1に対しては×をつけていた．［4］に対する回答をカテゴリー別に示す．

規則……………ある法則にのっとって関わり合う数．
単なる対応……$x$が1つ決まると，それに対応する$y$が1つまたはいくつか決まるもの．
　　　　　　　変数$x$の値が決まれば，伴って，もう一つの変数$y$が1つ以上定まる．

この3つの回答のうち，最初のものは，関数のグラフとして円を描くことと矛盾しない．後の2つの回答は円を関数のグラフと認めることを正当化するような定義になっている．

そして，規則のカテゴリーに属する「定義」を書いた1番目の被験者は，放物線，3次関数の曲線2本，円を描き，グラフの個数は（d）を選び，「これだけしか思いつかなかったから」とその理由を述べた．4個しかないと考えたのだろう．2番目の被験者は，円だけを描き，グラフは無限に多いと判断して（f）を選び，その理由を「円の他に，sin，cosもあるし，上に凸の2次関数とか3次関数など，たくさんできる．楕円を考えたら，いくらでもできる」と述べた．3番目の被験者は，折れ線2本，3次関数の曲線2本，円を描き，（f）を選んだが，その理由は書かなかった．円などの図形の方程式と，関数の式との混同があるのかもしれない．そうだとすれば，関数の定義としては式のカテゴリーに属するものを書かなかったが，式に対する意識が強かったとも考えられる．

なお，［2］1については，円や［1］1のような図形を描いた被験者はいなかったので，上記のような綻びは出現しなかった．

### 5. 2　関数の任意性について

関数の任意性とは，マックレーンの順序対の集合による定義でいえば，対$< x, y >$が$S$の中にちょうど1つ存在するようなものでさえあれば，$< x, y >$はどのようなものであっても関数になることをさしている．

問題［3］2で（f）を選ばなかった者は，関数の任意性を理解していないとみなせる．本調査では，約半数（47.5%）の被験者が（b）～（e）を選択，あるいは無回答であった．高等学校数学の授業で，3点を通る放物線の方程式を求めた経験によって学習したからだと推測されるが，（a）

を選んだ被験者はいなかった．

では，(b) ～ (e) を選択した被験者は，どのようなグラフを描き，(b) ～ (e) を選んだ理由をどのように説明したのだろうか．そして (f) を選択した被験者についてはどうだろうか．

以下に，(b) ～ (f) を選んだだけでなく，グラフを描いたうえで，理由を述べた被験者の回答について，そのグラフの形を言葉で述べ，選んだ理由を示すことにする．なお，関数名や曲線名の後の数字，たとえば「3次関数2」における「2」は，3次関数のグラフを描いた本数を示している．

(b) 放物線，1つしか思いつかないから．(他の同様の回答：5)
　放物線，3点A，B，Cを通る関数において，頂点は1つに決まり，傾きも固定されてしまうから．
　放物線，AとBの$y$座標が同じなので，頂点の$y$座標はABの中点であり，かつ，点Cを通らなければならないので，1．で描いたものだけ．
　放物線，$y=ax^2+bx+c$で，$x$，$y$が3点わかっていたら，$a$，$b$，$c$が1つに決まるから．
　3次関数，傾きの関係もあるから，3点を通るものは1つに限られる．傾きが一定である．
(c) 放物線，これの他に思いついたものは，あと1つしかないから．(他の同様の回答：2)
　放物線・3次関数，2次と3次関数は存在すると思う．
　円・放物線，他に思いつかないから．
(d) 放物線，私には1つしか思い浮かばないが，もっとありそうだから．(他の同様の回答：2)
　放物線・3次関数，3点を通ると決まっているから，そんなに多くはないと思うから．(他の同様の回答：3)
　放物線，いろんな関数を習ってきたが，実際学んだ関数も3～4つだ．あと自分が知らない関数もあるかなと思って (d) を選んだ．(他の同様の回答：1)
　折れ線・放物線・3次関数，思いつくのが3つだが，もっとあるかもしれない．けれど10個以上はないと思う．(他の同様の回答：5)
　3次関数，右上のようなもの．2次関数．2次関数の組み合わせ．
　Cで折れ曲がる直線と放物線，直線と曲線で組み合わせられるから．(他の同様の回答：1)
　Cで曲がる折れ線，以下の6つほど考えられるから．①Cで曲がる折れ線，②放物線，③直線＋放物線（下に凸），④直線＋放物線（上に凸），⑤放物線（下に凸）＋直線，⑥放物線（上に凸）＋直線．
　放物線，連続性のない関数も考えると，いくつかあると思う．(他の同様の回答：1)
　放物線・3次関数2・円，これだけしか思いつかなかったから．
(e) 放物線，3点を通るということで，どこかで制限が加わり，無限にはなりえない．(他の同様の回答：4)
　放物線・3次関数，多くは考えられ，直線のもの，曲線のものもあるが，どこかで重なってしまう部分があり，限界があると思われるから．(他の同様の回答：1)
　放物線・3次関数，3点のうち1つでも数字が固定されたり，頂点になるように…などと条件が増えると，関数は限定されるが，何も指定されていないので，たくさんあると思う．
　3次関数，2点であれば直線に限られるが，3点を通る関数であれば，空間であれば無限にあるかもしれないが，平面であれば無限とまでいかなくとも多くの関数があるのではないかと思った．

3 次関数，最大・最小値の値の変化や，そのときの軸の場所によって変わると思ったから．
放物線，高次関数にすれば，取り方がいろいろあるから．(他の同様の回答：1)
折れ線・放物線・3 次関数 2，[1] 2 のようなグラフにすると，たくさんありそうだから．
C で曲がる折れ線，いろんな数で応用できると思うから．

(f) 放物線・3 次関数，同じ形のようなグラフでも，あてはめる値や式によってたくさんあるから．(他の同様の回答：13)

折れ線，A，B，C の 3 つの点のそれぞれの間において，いろいろなパターンの関数を描くことができると考えられるから．(他の同様の回答：5)

放物線・3 次関数・4 次関数・5 次関数・6 次関数，点を通ればいいのだから，その間の線は様々に変化できると思うから．(他の同様の回答：6)

放物線・3 次関数・4 次関数・5 次関数，数字が無限にあるので，関数も無限にあると思う．(他の同様の回答：4)

放物線・3 次関数・sin カーブ，∞次関数のグラフが描けるから．(他の同様の回答：4)

放物線，2 次，3 次，4 次……と関数の次数によって答えが存在しているから．(他の同様の回答：5)

放物線・3 次関数 2，2 次関数に 1 つ，3 次関数に 2 つ存在すると思う．4，5，6，……次関数についても，A，B，C を通るものがあると思う．数が続く限り存在すると思う．

C で折れ曲がる直線と放物線，B ～ C までで 1 つの式があり，C ～ A では違う式になる．関数だと，いくらでも式の組み合わせがあるから．

放物線，各次数につき，1 つはこの 3 点を通る関数が存在するから．(他の同様の回答：1)

C で曲がる折れ線・3 次関数・sin カーブ，考え方により，たくさんできると思う．(他の同様の回答：5)

放物線，関数というのは無限にあるから．

放物線，$x$ の値 1 つに $y$ の値 1 つを定めるようにすることさえ守れば，あとは値を変えるだけで何通りもできるから．(他の同様の回答：1)

3 次関数，2 次関数，3 次関数，4 次関数，…，円，双曲線，…などと，3 点を通る関数はいくらでもあると思う．

3 次関数，A，B，C を通る関数ならば，円や積分関数でいろいろあるから．

円，円の他に，sin, cos もあるし，上に凸の 2 次関数とか 3 次関数など，たくさんできる．楕円を考えたら，いくらでもできる．

以上の回答から，被験者にとっては，必ずしも関数の任意性は自明ではないということが明らかになった．(b) ～ (e) を選んだ被験者は，被験者が実際に学んだことのある既知の関数を想起した結果に基づいて，関数の個数を判断したと考えられる．しかも，(f) を選んだ被験者についても，3 次関数などの既知の関数がいくらでも考えられることを選択の理由として挙げている回答が半数以上である．まさしく Even (1993) が指摘したように，特定の名称や特定の形があって，既知のものだけが関数だという信念を持っている被験者が少なくない，ということである．

ところで，[1]2 ～ 7 に正答できなかった被験者も，関数の任意性について把握していないことになる．[5] については，43 名の被験者のうち，18 名 (41.9%) はグラフを描こうとした．その大部分は，$g(x)=x$ のグラフと $g(x)=1$ のグラフを，同一座標平面上に，または別の座標平面上に描こうとした．そのうち 6 名は破線で描き，1 名は白抜きの○などを使った．それぞれのグ

ラフについて説明を加えた被験者はいなかった．関数であることを前提にした問題であるが，[1] 5の正答率の低さからすれば，訊かれれば関数ではないと答える被験者が多かったものと推測できる．[5] でグラフを描こうとしたからといって，関数の任意性を獲得しているとは限らないのである．

## 6 おわりに

本調査の結果を見ると，中学校，高等学校で関数を学んだからといって，関数の一般概念が習得されているわけではなく，さまざまな困難があることは明らかである．とくに関数概念の習得において問題だと考えられるのは，関数の単元における学習の重点が，個別の関数にかかわる性質や技法にあることだろう．そのために，関数の現代的な定義，とりわけ，その顕著な特徴である任意性が習得されないことになっているのではなかろうか．関数の一意性についても，回答結果に現れていたように，一見習得されているようにみえても，具体的な問題になると，十分に習得されていないことによる綻びが出てくることもある．日本の中学校・高等学校の授業ではほとんど扱われることはないが，"vertical test"（関数であるか否かをチェックするためのテストで，関数のグラフは，$y$ 軸に平行な直線 $x = a$ と高々1点でしか交わらないという一意性の性質に基づいている）を授業に導入することも検討に値すると考えられる．

Even は，関数の任意性に関する信念として，①関数はいつでも式で表すことができる，②関数のグラフはきれいな形でなければならない，③関数は既知である，と3つ挙げた．本調査における被験者の反応にも，そのような信念がしばしば現れていた．学ぼうとする者が関数概念について，その任意性や一意性について，どのような信念を持っているか，そして学んだ結果として，どのような信念を持つようになったかをチェックすることも，関数概念の習得を確実にするためには重要なことであろう．

## 文 献

Dubinsky, E., & Harel, G.(Eds.) 1992 *Concept of function : Aspects of epistemology and pedagogy* (MAA Notes, No.25), Washington, DC: Mathematical Association of America.

Even, R. 1993 Subject-matter knowledge and pedagogical content knowledge : Prospective secondary teachers and the function concept. *Journal for Research in Mathematics Education*, **24**, 94-116.

Freudenthal, H. 1983 *Didactical phenomenology of mathematical structures*, Dordrecht: D. Reidel.

マックレーン，S. 彌永昌吉（監訳）1992 数学－その形式と機能．森北出版，pp.163-168.

Schwarz, B.B., & Hershkowitz, R. 1999 Prototypes : Brakes or levers in learning the function concept? The role of computer tools. *Journal for Research in Mathematics Education*, **30**, 362-389.

菅岡強司 2000 中等数学における関数概念の指導－1次関数・2次関数を中心に－．上越教育大学研究紀要，**20**(**1**)，87-100.

Vinner, S. 1983 Concept definition, concept image and the notion of function. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, **14**, 295-305.

Vinner, S., & Dreyfus, T. 1989 Images and definitions for the concept of function. *Journal for Research in Mathematics Education*, **20**, 356-366.