2　単振動

2.1 運動の法則

1 つの座標軸として例えば x 軸を選んだとき，軸上にある 1 つの定点からの距離 x に比例して質点に $-fx$ $(f > 0)$ の引力が作用するとき，この引力を**弾性復元力**という．弾性復元力を受けた質点は振動運動を行う．この振動を**単振動**という． 古典物理学ではゴムやバネなどの**フックの法則**(Hooke's law)に従う弾性体に結ばれた図 2.1.1 のような質点や，振り子などの振動が単振動であり，これらを**単振動子**と呼ぶ.

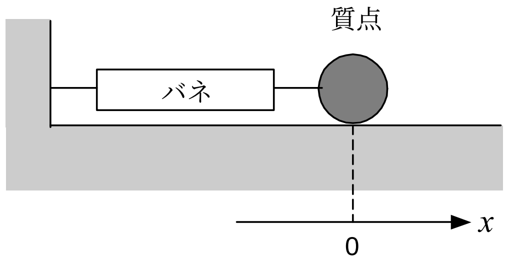

図 2.1.1．バネの単振動子.

単振動は第 5 章に述べる波動現象を理解するための基礎概念として重要であるが，そればかりでなく，量子物理学にも通じる極めて重要な基礎概念の 1 つである．量子物理学では物質を構成している原子や電子の性格をエネルギーで捉え，1 つの状態(これを**固有状態**という)は**プランク定数**(Planck constant) h = 6.62607×10^{-34} J· sec とその状態固有の振動数 ν の積，$h\nu$，に等しいエネルギー(これを**エネルギー固有値**という)によって特定される．この点で原子や電子の性格は単振動子の固有振動の性格と共通しており，そのために動力学的な性質の多くが単振動によってモデル化するとよく理解できることが知られている.

質点の力学的性質は運動の法則によって規定される．**運動の第 1 法則**によれば物体は外から力が作用しなければ，静止あるいは一直線の等速運動を続ける．速度が変化するのは物体に外力が作用したときである．**運動の第 2 法則**によれば，速度を $\boldsymbol{v}$, 時間を t として，物体の加速度 $\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}$ はその物体に働く力に比例し，質量に反比例する．いま外力を $\boldsymbol{F}$，質点の質量を m とすれば運動の第 1，第 2 法則は

$$\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \frac{\boldsymbol{F}}{m} \tag{2.1.1}$$

と表される．(2.1.1)式の両辺に m をかけて運動を力の単位で表すと

$$m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}=\boldsymbol{F} \tag{2.1.2}$$

となる．これを**ニュートンの運動方程式**(Newton's equation of motion)という．与えられた初期条件または境界条件の下で運動方程式を解くことにより，$\boldsymbol{v}(t)$ や，さらに $\boldsymbol{r}(t)$ が明らかになる．

2.2 単振動の基本的性質

図 2.1.1 でバネの安定位置を $x=0$ としたとき，質点の運動方程式は

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-fx \tag{2.2.1}$$

である．f を**力定数**という．またバネとの対応から**バネ定数**と呼ばれることも多い．(2.2.1)式の実数解は

$$x=a_0\sin(\omega_0 t+\delta), \tag{2.2.2}$$

$$\omega_0=\sqrt{\frac{f}{m}} \tag{2.2.3}$$

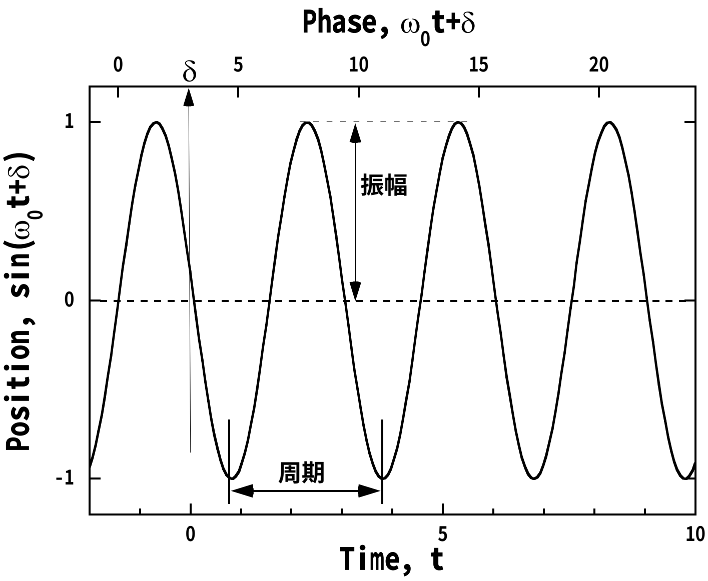

図 2.2.1．正弦振動.

と表わすことができる．ω_0は振動子に固有の角速度であり，振動数をν_0とすると $2\pi\nu_0$ に等しい．これを**固有角振動数**という．ここで，a_0を**振幅**，$\omega_0 t+\delta$を**位相**，δを**初期位相**と呼ぶ. 正弦振動の一例を図 2.2.1 に示す．a_0，δの値は初期条件によって定まる．運動は

$$t_0=\frac{2\pi}{\omega_0} \tag{2.2.4}$$

の時間が経つごとに同じ状態に戻る．この時間 t_0 を**周期**と呼ぶ.

2.3 減衰振動

環境や雰囲気との摩擦など，何らかの粘性抵抗的な障害があると単振動は減衰する．粘性抵抗による減速の度合いは速度が大きくなる程強くなるので，第 1 近似では**時定数**をτとして減速の加速度を $-v/\tau$ と近似できる．τを**緩和時間**ともいう．このときの運動方程式は

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-\omega_0^2\,x-\frac{v}{\tau} \tag{2.3.1}$$

である．計算の便宜上 $1/\tau=2\gamma$ とおくと，これは

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-\omega_0^2 x-2\gamma\frac{dx}{dt} \tag{2.3.2}$$

と書き換えられる．γは粘性抵抗の強さを表すので**ダンピング定数**と呼ばれる．(2.3.2)式はxについて 2 階の同次線形微分方程式である．(2.3.2)式を簡単な形にするために，$x=y\,\mathrm{e}^{-\gamma t}$ とおくと

$$\frac{dx}{dt}=(\frac{dy}{dt}-\gamma y)\mathrm{e}^{-\gamma t} \tag{2.3.3}$$

である．そうすると(2.3.2)式の左辺は

$$\frac{d^2x}{dt^2}=(\frac{d^2y}{dt^2}-2\gamma\frac{dy}{dt}+\gamma^2 y)\mathrm{e}^{-\gamma t} \tag{2.3.4}$$

であり，また(2.3.2)式の右辺は

$$(-\omega_0^2 y - 2\gamma \frac{dy}{dt} + 2\gamma^2 y)\mathrm{e}^{-\gamma t} \tag{2.3.5}$$

となる．したがって左辺=右辺より

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = -(\omega_0^2 - \gamma^2) y \tag{2.3.6}$$

を得る．ダンピング定数 γ の大きさに応じて 1) $\gamma < \omega_0$，2) $\gamma = \omega_0$，3) $\gamma > \omega_0$ の 3 つのケースがある．それぞれのケースについて以下のように y が求まる．

1) $\gamma < \omega_0$ のとき

$$y = A\sin(t\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} + \varphi)\text{，} \quad A,\ \varphi \text{ は定数,} \tag{2.3.7}$$

2) $\gamma = \omega_0$ のとき

$$y = Bt + C \quad \text{，} B\text{，} C \text{ は定数} \tag{2.3.8}$$

3) $\gamma > \omega_0$ のとき，$0 < q < \gamma$ として

$$\gamma^2 - \omega_0^2 = q^2 \tag{2.3.9}$$

とし，

$$y = \mathrm{e}^{\lambda t} \tag{2.3.10}$$

とおくと，(2.3.6)式より

$$\lambda^2 = q^2 \tag{2.3.11}$$

であるから

$$\lambda = \pm q \tag{2.3.12}$$

である．ゆえに D，E を定数として

$$y = D\mathrm{e}^{-qt} + E\mathrm{e}^{qt} \tag{2.3.13}$$

となる．

以上の結果をまとめると，

1) $\gamma < \omega_0$，　$x = A\sin(t\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} + \varphi)\mathrm{e}^{-\gamma t}$　(2.3.14.a)

2) $\gamma = \omega_0$，　$x = (Bt + C)\mathrm{e}^{-\gamma t}$　(2.3.14.b)

3) $\gamma > \omega_0$，　$x = D\mathrm{e}^{-(\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2})t} + E\mathrm{e}^{-(\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2})t}$　(2.3.14.c)

となる．2)，3) のケースはそれぞれ**臨界減衰振動**，**過減衰振動**と呼ばれる．

A，B，C，D，E およびφ は初期条件によって決まる．初期条件を，$x=x_0$ の位置に静止させていた質点を$t=0$で解放するものとすると，初速度が 0 であるから

$$x_{t=0}=x_0, \tag{2.3.15.a}$$

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_{t=0}=0 \tag{2.3.15.b}$$

である．(2.3.3)式より(2.3.15.b)式は

$$\left(\frac{dy}{dt}-\gamma y\right)_{t=0}=0 \tag{2.3.16}$$

と同等である．この初期条件を各場合に適用して A，B，C，D，E およびφ を決めると

1) $\gamma<\omega_0$のとき

$$x=\frac{x_0\sin(t\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}+\varphi)}{\sin\varphi}\mathrm{e}^{-\gamma t} \quad , \quad \varphi=\tan^{-1}\sqrt{\left(\frac{\omega_0}{\gamma}\right)^2-1} \tag{2.3.17}$$

2) $\gamma=\omega_0$のとき

$$x=x_0(\gamma t+1)\mathrm{e}^{-\gamma t} \tag{2.3.18}$$

3) $\gamma>\omega_0$のとき

$$x=x_0\left[-\frac{\gamma-q}{2q}\mathrm{e}^{-(\gamma+q)t}+\frac{\gamma+q}{2q}\mathrm{e}^{-(\gamma-q)t}\right] \quad , \quad q=\sqrt{\gamma^2-\omega_0^2} \tag{2.3.19}$$

となる．

図 2.3.1 に $\gamma=0.2\omega_0$，ω_0 および $2\omega_0$ のときの x/x_0 の時間変化を示す．$\gamma<\omega_0$ のときは粘性抵抗が不十分なので振動しながら減衰していくが，γ が大きくなるにつれて減衰が早くなる．$\gamma=\omega_0$ で振動がなくなり，1 周期に相当する時間で変位がほとんどゼロになる．$\gamma>\omega_0$ になると周期以上の時間をかけて，ゆっくりと変位がゼロに近づいていく．いずれにしても，摩擦などの粘性抵抗があると，外から力を加えない限り振動子は必ず静止してしまう．

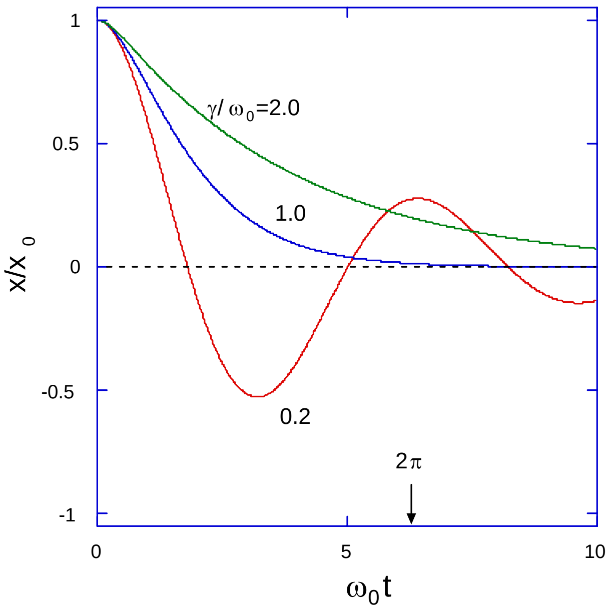

図 2.3.1．3 つのケースの減衰振動.

2.4 強制振動

単振動子に周期的な**外力**を加えると，粘性抵抗があっても振動が発生する．これを**強制振動**という．外力が角速度ωで $F' e^{-i\omega t}$ のように振動しているとき運動方程式は

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega_0^2 x - 2\gamma\frac{dx}{dt} + \frac{F'}{m}e^{-i\omega t} \qquad (2.4.1)$$

である．この解は外力が働かないとき($F'=0$)の一般解(2.3.14.a，b，c)と，この微分方程式の特解の和で表される．ξ を定数として，特解を

$$x = \xi e^{-i\omega t} \qquad (2.4.2)$$

とおき，(2.4.1)式に代入すると

$$\xi = \left(\frac{F'}{m}\right)\frac{e^{i\varphi}}{\sqrt{(\omega^2-\omega_0^2)^2+4\gamma^2\omega^2}} \quad , \quad \tan\varphi = \frac{2\gamma\omega}{-\omega^2+\omega_0^2} \qquad (2.4.3)$$

が得られる．ゆえに特解は

$$x = \left(\frac{F'}{m}\right)\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega t - \varphi)}}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}} \tag{2.4.4}$$

であり，$\omega = \omega_0$で

$$x = \frac{F'\tau}{m\omega_0}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega_0 t \pm \pi/2)} \tag{2.4.5}$$

となる．

一般解(2.3.14.a,b,c)式は減衰振動なので十分長い時間が経過すると振幅はほとんどゼロになる．従って，時間が十分に経った後の定常解は (2.4.4)式の特解で与えられる．振幅 $|x|$ は図 2.4.1 のように$\omega \approx \omega_0$で極大値をとる．この現象を**共鳴**という．(2.4.5)式に示されるように，共鳴振幅は外力の強さF'と緩和時間τ の積に比例する．τ が大きくなり，ダンピング定数が小さくなるにつれて共鳴ピークが鋭くなり，尖頭位置がω_0に近づいていく．

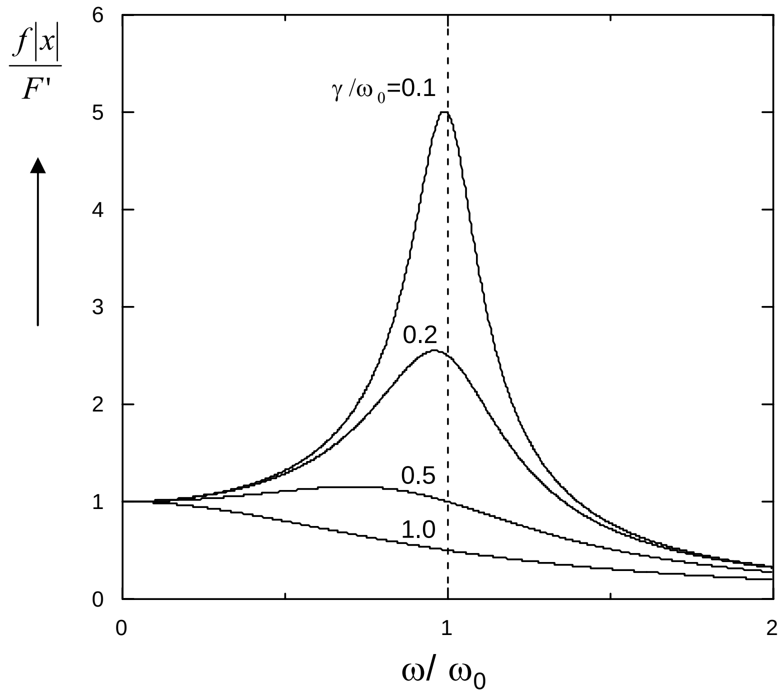

図 2.4.1．強制振動の振幅のωとγによる変化．

　このような共鳴現象には第 4 章 6 節で述べるサイクロトロン共鳴や，核磁気共鳴(NMR)，電子スピン共鳴(ESR)などがある．その他，分子の原子振動や結晶の格子振動による赤外吸収, あるいは電子のエネルギー準位間の光学遷移も本質的に共鳴現象である．これらの共鳴現象を足がかりにして行う科学研究の手法を**スペクトロスコピー**という．