3　エネルギー

3.1．エネルギーとは何か

何かの物体がどこかで動いていても，視覚以外にわれわれは具体的な知覚をほとんど受けない．動いていた物体が当って初めてその存在を実感する．物体から衝撃力を受けるからである．この衝撃力のような，「力」を生み出す源泉または“ パワー ”を物理学ではエネルギーという．衝撃力を生み出すのは物体が持つ**運動エネルギー**である．また，われわれは太陽から降り注がれる光を浴びて計り知れないパワーを受けているが，それは光が波動であり，波動がエネルギーの流れであるためである．物体すなわち原子や電子は**波動のエネルギー**を浴びるとそれを吸収して自分のエネルギーを上げようとする．一方で常に波動のエネルギーを放射して自分のエネルギーを下げようとする．

実際に動いていなくても力を生み出す源泉がある．それらは潜在的なエネルギー，すなわち**ポテンシャルエネルギー**と呼ばれる．例えば２つの物体が離れて存在しているとき，静止していてもそれらの間には**重力場エネルギー**が存在し，そのエネルギーが重力を生み出している．また２つの電荷の間や磁極の間には必ず**静電エネルギー**というポテンシャルエネルギーが存在し，そのために電気力や磁気力が生まれる．ポテンシャルエネルギーが位置だけで決まるときは**位置エネルギー**と呼ばれることもある．

物体や物質の状態が変化するのは**熱流**や**仕事**という形でエネルギーが移動するためである．第６章で述べる**自由エネルギー**が最も低くなったとき，置かれた環境の中で物体の状態は安定し，定常的になって持続する．化学反応や生体内部の生命活動も元を質せばいくつかのエネルギーの移動現象の組み合わせ，あるいは逐次的なエネルギーの移動現象とみなすことができる．言い換えれば，自然界の変動または活動はエネルギーによって支配されている．このように，自然界の中で最も重要な量はエネルギーであるといっても過言ではない．

3.2 ポテンシャルエネルギー

個々の原子や電子あるいはそれらの集合体である物質はポテンシャルエネルギー

が最低となる位置にいるときの他は常に，その置かれている場から，ポテンシャルエネルギーを下げようとする力を受ける．ポテンシャルエネルギーを$\Phi(\boldsymbol{r})$とすれば，その力は

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = -\nabla\Phi(\boldsymbol{r}) \quad \text{または} \quad -\ \mathrm{grad}\ \Phi(\boldsymbol{r}) \tag{3.2.1}$$

で与えられる．ここで∇ はギリシァの竪琴になぞらえてナブラ(nabla)と読み，grad は勾配を意味する gradient の省略体である．∇ または grad は次式で定義される．

$$\nabla = \boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z} \tag{3.2.2}$$

これは偏微分演算子の１つである．例えば$\frac{\partial}{\partial x}$は，他の変数$y$, zを定数とみなして，xについて微分することを表す．$\Phi(\boldsymbol{r})$ の１つの値をΦ_1とすれば

$$\Phi(\boldsymbol{r}) - \Phi_1 = 0 \tag{3.2.3}$$

は$\boldsymbol{r}$の空間で１つの閉曲面を作る．Φが連続的に滑らかに変るなら閉曲面も滑らかに変化する. このとき(3.2.1)式で与えられる$\boldsymbol{F}$は$\boldsymbol{r}$の位置における曲面の法線の上にあり，Φが減少していく方向を向いている．$\boldsymbol{F}$ の大きさは法線方向の単位距離当たりのΦの減少率に等しい．

$\Phi(\boldsymbol{r})$ が$\boldsymbol{r}$の原点の周りで中心対称であるとすると

$$\Phi(\boldsymbol{r}) = \Phi(r) \tag{3.2.4}$$

である．そうすると

$$(\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z})\Phi(r) = (\boldsymbol{i}\frac{\partial r}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial r}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial r}{\partial z})(\frac{d\Phi}{dr}), \tag{3.2.5}$$

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}}{\partial x} = \frac{x}{r} \tag{3.2.6}$$

であるから，一般に

$$\nabla\Phi(\boldsymbol{r}) = (\frac{d\Phi}{dr})(\frac{\boldsymbol{r}}{r}) \tag{3.2.7}$$

が成り立つ．$\Phi(\boldsymbol{r})$ を中心対称としているので $\nabla\Phi(\boldsymbol{r})$ は$\boldsymbol{r}$の上にあり，$d\Phi/dr$の大きさを持っている．ベクトル$\nabla\Phi(\boldsymbol{r})$ が内向きか外向きかは$d\Phi/dr$の符号で決まる．

等方的な媒質中において電荷 e_1 から $\boldsymbol{r}$ 離れた位置にある電荷 e_2 が電荷 e_1 から受けるポテンシャルエネルギーは

$$\Phi(\boldsymbol{r}) = \frac{e_1 e_2}{4\pi\varepsilon r} \tag{3.2.8}$$

である．これは**クーロンの法則**(Coulomb's law)としてよく知られたクーロン相互作用エネルギーに他ならない．ここでεは媒質の誘電率である．真空では $\varepsilon = \varepsilon_0 = 8.854\times10^{-12}$ F(ファラッド)/m である．(3.2.8)式を(3.2.7)式に代入し，(3.2.1)式を適用すれば電荷 e_2 は電荷 e_1 から

$$\boldsymbol{F} = \frac{e_1 e_2}{4\pi\varepsilon r^3}\boldsymbol{r} \tag{3.2.9}$$

の力を受けることがわかる．これを**クーロン力**(Coulomb force)という．e_1 と e_2 が同符号のとき $\boldsymbol{F}$ は $\boldsymbol{r}$ と同じ向きであるから斥力が働き，e_1 と e_2 が異符号のとき $\boldsymbol{F}$ は $\boldsymbol{r}$ と逆向きであるから引力となる．(3.2.8)式の $\Phi(\boldsymbol{r})$ の等エネルギー面は球面であり，(3.2.9)式の力は球面の動径方向を向いている．斥力か引力かを問わず，ポテンシャルエネルギーから生じる力が等エネルギー面の法線方向を向いていることがこの例からも分かる．

3.3 エネルギー保存則

運動方程式

$$m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \boldsymbol{F} \tag{3.3.1}$$

の左辺に $\boldsymbol{v}dt$ ，右辺に $d\boldsymbol{r}$ をかけて，時刻t_1（位置 $\boldsymbol{r}_1$，速度 $\boldsymbol{v}_1$）から時刻t_2（位置 $\boldsymbol{r}_2$，速度 $\boldsymbol{v}_2$）まで積分すると(3.3.1)式の左辺は

$$m\int_{t_1}^{t_2}\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}\boldsymbol{v}dt = m\int_{\boldsymbol{v}_1}^{\boldsymbol{v}_2}\boldsymbol{v}d\boldsymbol{v} = \frac{1}{2}m(v_2^2 - v_1^2) \tag{3.3.2}$$

となる．ここで $\frac{1}{2}mv^2$ は運動エネルギーである．また(3.2.1)，(3.2.7)式より(3.3.1)式の右辺は

$$\int_{\boldsymbol{r}_1}^{\boldsymbol{r}_2}\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} = -\int_{\boldsymbol{r}_1}^{\boldsymbol{r}_2}\nabla\Phi(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r} = -\int_{\Phi(\boldsymbol{r}_1)}^{\Phi(\boldsymbol{r}_2)}d\Phi = \Phi(\boldsymbol{r}_1) - \Phi(\boldsymbol{r}_2) \tag{3.3.3}$$

となる．ここで$\int \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}$は力 $\boldsymbol{F}$ のなす仕事である．これらの結果より直ちに

$$\frac{1}{2}mv_2^2 + \Phi(\boldsymbol{r}_2) = \frac{1}{2}mv_1^2 + \Phi(\boldsymbol{r}_1) \tag{3.3.4}$$

という関係式が導かれる．すなわち，運動エネルギーとポテンシャルエネルギーの総和は仕事の前後で変わらない．外力が作用する場合でも，その外力の発生源を含めた全系のエネルギーについて成り立つ．これを**エネルギー保存の法則**という．

上の考察から明らかなように，ポテンシャルエネルギーの変化という，外場からの仕事を通して運動エネルギーが変化している．ここで仕事はポテンシャルエネルギーと運動エネルギーの間の変換の仲立ちをしている．同様な役割を持つものに，第 6 章で述べる熱量がある．物体は加熱すると温度が上がる．これは外部からエネルギーをもらって物体自身または内部の原子や電子の運動エネルギーが上がるためである．また導電体に電流を流すとジュール熱が発生する．第 4 章で述べるように，これは電場からもらった電子の運動エネルギーが摩擦という電子と原子の相互作用を媒介にして，物質を作っている原子の運動エネルギーに変るためである．これも第 6 章で述べるが，物質からは常に熱が放出されている．この輻射熱の実体は光つまり電磁波である．太陽光や火を暖かいと感じるのは皮膚で受けた輻射のエネルギーが細胞の中で水や生体分子の運動エネルギーとポテンシャルエネルギーに変わるためである．このように，エネルギーとして独立な形態で存在するのは運動エネルギーとポテンシャルエネルギー，および輻射のエネルギーである．エネルギー保存則はこれら 3 つのエネルギーの総和について成り立っており，仕事や熱はそれらが互いに変換する際のエネルギーの流れの形態である．

エネルギー保存則はエネルギーの変化または交換を伴うあらゆるプロセスにおいて成り立ち，そのプロセスの態様を支配する．自然界には多くの法則があるが，エネルギー保存則はそれらの中で最も重要な法則の 1 つである．

3.4 単振動におけるエネルギー保存則

弾性復元力のポテンシャルエネルギーは,

$$\Phi = -\int_0^x \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{x} = -\int_0^x (-fx)dx = \frac{1}{2}fx^2 \tag{3.4.1}$$

に等しく，x についてパラボリックである．見方を変えれば，単振動はパラボリックなポテンシャルの場の中での１つの質点の自由運動である．(2.2.2)式の x を(3.4.1)式に代入すれば

$$\Phi = \frac{1}{2} f a_0^2 \sin^2(\omega_0 t + \delta) \tag{3.4.2}$$

が得られる．Φ は振動子の位置によって変わるので当然このように時間とともに振動的に変化する．一方，運動エネルギーを Ξ と書くと，

$$\Xi = \frac{1}{2} m (\frac{dx}{dt})^2 \tag{3.4.3}$$

であるから，同じく(2.2.2)式より

$$\Xi = \frac{1}{2} a_0^2 f \cos^2(\omega_0 t + \delta) \tag{3.4.4}$$

と求まる．運動エネルギーも時間とともに振動することが分かる．しかし全エネルギーは(3.4.2)式および(3.4.4)式より，

$$U = \Xi + \Phi = \frac{1}{2} f a_0^2 \tag{3.4.5}$$

で与えられる一定値を持つ．ここで，$\omega_0 = \sqrt{\frac{f}{m}}$ であるから，全エネルギーは

$$U = \frac{1}{2} m \omega_0^2 a_0^2 \tag{3.4.6}$$

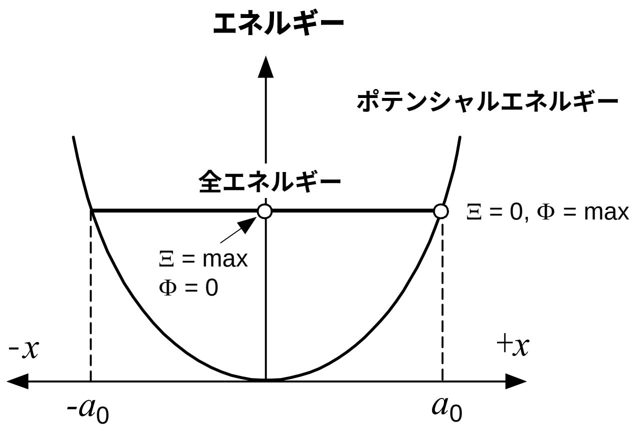

図 3.4.1．単振動の全エネルギー

と書き換えることができる．すなわち，単振動の全エネルギーは振幅の 2 乗に比例し，x にも t にも依存せず一定である． 単振動の１つの状態を図で示すとき，図 3.4.1 のように，ポテンシャルエネルギー曲線に合わせて１本の水平線で表すのはこのような理由のためである．

量子力学によれば， 単振動のエネルギーは連続的ではなく，図 3.4.2 のように

$$U_n = (n + \frac{1}{2})\hbar\omega_0, \quad n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ \infty \qquad (3.4.7)$$

という, 等間隔のとびとびの値を取る．これを**調和振動**という．ここで, $\hbar = h/2\pi$であり, h は 2.1 節で述べたプランク定数である． $U_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega_0$ の状態を**ゼロ点振動**という.

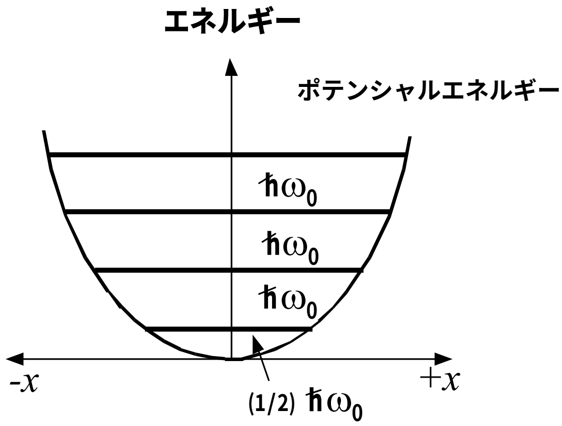

図 3.4.2．量子化した単振動状態.

物質中の原子は電子を介して周囲の原子からのポテンシャルエネルギーを受けて，ちょうど互いにバネでつながれているように，平衡位置を中心にして調和振動をしている．ゼロ点振動の性質のために，原子や電子は決して静止することは無い．ただし粘性抵抗や衝突による強いダンピングや，あるいは熱的な揺らぎがあると量子性が不明瞭になり，またゼロ点振動状態でも事実上粒子は止まって見える.