

# 4 電磁場中の電子の運動

## 4.1 クーロン力とローレンツ力

空間に定めた原点から  $\mathbf{R}$  の位置に 1 つの電荷  $e_1$  があるとき

$$\phi(\mathbf{r}, \mathbf{R}) = \frac{e_1}{4\pi\epsilon|\mathbf{r} - \mathbf{R}|} \quad (4.1.1)$$

を電荷  $e_1$  による  $\mathbf{r}$  での電位(ポテンシャル)という。単位は J(ジュール)/C(クーロン)であるが、実用上これを V(ボルト)と呼ぶ。  $\mathbf{r}$  の位置にもう 1 つの電荷  $e_2$  があると 3.1 節で述べたように、2 つの電荷は

$$\Phi(\mathbf{r}, \mathbf{R}) = e_2\phi(\mathbf{r}, \mathbf{R}) \quad (4.1.2)$$

のクーロンエネルギーを持つ。一般に、 $\mathbf{r}_1$  と  $\mathbf{r}_2$  の 2 つの位置の間の電位の差

$$V = \phi(\mathbf{r}_1, \mathbf{R}) - \phi(\mathbf{r}_2, \mathbf{R}) \quad (4.1.3)$$

を、 $\mathbf{r}_2$  から測った  $\mathbf{r}_1$  における電位差または電圧という。また、電荷  $e_2$  に働くクーロン力を  $e_2\mathbf{E}$  と表すと

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla\phi(\mathbf{r}, \mathbf{R}) \quad (4.1.4)$$

である。ここで  $\nabla$  は(3.2.2)式で定義した、 $\mathbf{r}$  についての偏微分演算子である。 $\mathbf{E}$  は  $\mathbf{r}$  の位置での電位の勾配を表している。これを電場という。単位は V/m である。空間中に電荷が分布しているとき、 $\mathbf{r}$  の位置での電位は分布したすべての電荷からの寄与の総和

$$\phi(\mathbf{r}) = \sum_i \phi(\mathbf{r}, \mathbf{R}_i) \quad (4.1.5)$$

で与えられる。図 4.1.1 のように十分に面積の大きなコンデンサーが充電されているとき、 $\phi$  はコンデンサーの電極に平行な面内で一様となり、正電極の電位から負電極の電位まで、電極からの距離とともに直線的に変化する。

電子は  $m = 9.109 \times 10^{-31}$  kg の質量と  $e = -1.602 \times 10^{-19}$  C の負の電荷を持つ粒子である。静止していた電子に電場  $\mathbf{E}$  が加えられると電場の方向に

$$\mathbf{F} = e\mathbf{E} \quad (4.1.6)$$

のクーロン力を受けて運動をし始める .

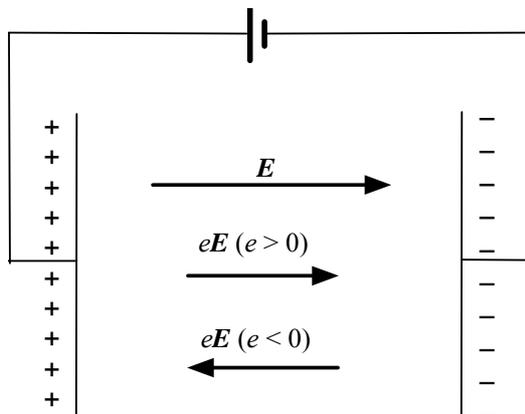


図 4.1.1. 電荷  $e$  が電場から受ける力

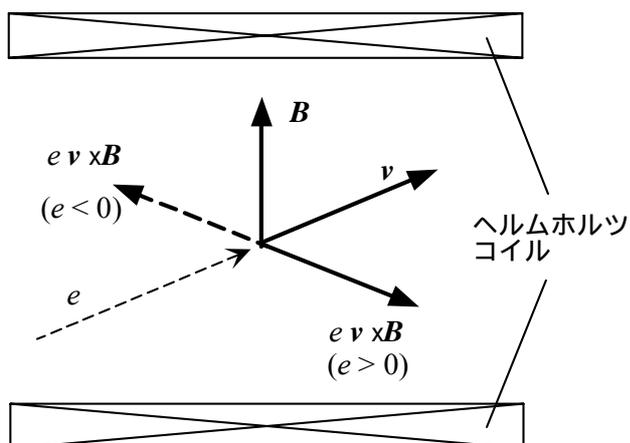


図 4.1.2. 動いている電荷  $e$  が磁場から受ける力 .

また図 4.1.2 のように  $B$  T (テスラ =  $\text{Wb}/\text{m}^2$ ) の磁場(磁束密度)があると

$$F = ev \times B \quad (4.1.7)$$

というローレンツの力(Lorentz force)を受ける . この力は速度と磁場が作る平面に垂直な方向に荷電粒子を回転させようとする .

完全な自由空間でない限り，運動をしている電子は空間に浮遊している分子などの障害物と衝突を繰り返して減速を受ける．固体物質の中を動く電子の場合も同様に，原子の熱振動や不純物などのさまざまな不完全性によって散乱され，速度を失う．このような衝突や散乱による減速は広い意味で摩擦抵抗による緩和現象である．衝突や散乱を起こす頻度は速度が大きくなる程大きくなるので，第1近似では時定数を $\tau$ として

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{v}{\tau} \quad (4.1.8)$$

と表すことができる．

以上の3つの作用をまとめると，運動の第1法則と第2法則より，電場と磁場のあ  
る空間における電子について

$$m \frac{dv}{dt} = e \mathbf{E} + e \mathbf{v} \times \mathbf{B} - \frac{m \mathbf{v}}{\tau} \quad (4.1.9)$$

という運動方程式を得る．(4.1.9)式は一見簡明でも， $E$ ， $B$ があるかないか，時間的に変動するかしらないか，あるいはその変動の時間スケールに比べて $\tau$ が長いか短いかで電子の運動の形態は多彩に変化する．電場が電子を電場の向きに加速しようとするのに対して磁場がそれに垂直な方向にトルクを加えて回転させようとし，その上，衝突や散乱が電場と磁場の作用と競合するからである．この章ではそのようにして生じる重要な現象のいくつかについて述べる．

## 4.2 直流電場中の電子の運動

磁場がなく( $B = 0$ )，電場のみがあり( $E \neq 0$ )，この電場が空間的に一様で時間的にも変化しないとする．

(a)  $\tau = \infty$  の場合

観測している時間が緩和時間 $\tau$ よりも十分短く，実質的に空間を真空とみなしてよいときは摩擦抵抗を無視することができる．このとき運動方程式は(4.1.9)式より

$$m \frac{dv}{dt} = e \mathbf{E} \quad (4.2.1)$$

である．電場が時間的にも変化しないときを考えるので，両辺を $t$ について積分するこ

とにより

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \frac{e\mathbf{E}}{m}t \quad (4.2.2)$$

となる．ここで  $\mathbf{v}_0$  は初速度である．電場の強さに比例して時間とともに電子の速度が増していく．電子の位置ベクトルを  $\mathbf{r}$  とすると

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v} \quad (4.2.3)$$

であるから，右辺に(4.2.2)式を代入して  $t$  について積分すれば

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0 t + \frac{1}{2} \frac{e\mathbf{E}}{m} t^2 \quad (4.2.4)$$

を得る． $\mathbf{r}_0$  は  $t = 0$  での電子の位置である．このように，電子の位置ベクトルの時間変化は初速度と時間の積で初速度の方向に伸びる成分と，電場の強さに比例して時間の2乗で電場の方向に伸びる，2つの成分の合成となる．

(b)  $\tau \neq \infty$  の場合

空間中のガスや分子などの障害物と衝突して減速する効果が無視できないとき，運動方程式は

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = e\mathbf{E} - \frac{m}{\tau} \mathbf{v} \quad (4.2.5)$$

である．これは微分方程式としては(1.2.5)式と同じ形である．初速度を  $\mathbf{v}_0$  として  $\mathbf{v}_0 = y_0$ ， $\frac{e}{m}\mathbf{E} = a$ ， $\frac{1}{\tau} = k$  を(1.2.10)式に代入して整理すると

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 e^{-t/\tau} + \frac{e\tau}{m} \mathbf{E} (1 - e^{-t/\tau}) \quad (4.2.6)$$

が得られる．初速度  $\mathbf{v}_0$  として初めに持っていた速度は時間の経過とともに指数関数で減衰していく．その一方で電場によって加速される成分がある．電場が加わった直後から  $t \ll \tau$  の間では電場による成分は

$$\mathbf{v} = \frac{e\mathbf{E}}{m} t \quad (4.2.7)$$

で立ち上がる． $t \ll \tau$  の間は散乱を受けないという点で  $\tau = \infty$  のときと同じなので(4.2.2)式と一致する．しかし時間とともに速度が増すにつれて散乱による制動が増す

ので速度の増加が鈍り，一定値に近づいていく．この加速のされ方は初速度の減衰のしかたと互いに余数の関係になっている．

$t \rightarrow \infty$ での  $v$  を  $v_\infty$  と書くと

$$v_\infty = \frac{e\tau}{m} E \quad (4.2.8)$$

である． $v_\infty$  を  $v$  の平衡値または定常値という．この値は(4.2.5)式の特解である．一般に速度による制動を受ける運動ではこのように特解が定常値を与える．図 4.2.1 に一例として  $v_0 // E$  ,  $v_\infty = 0.6v_0$  としたときの  $v$  の時間変化を描く．

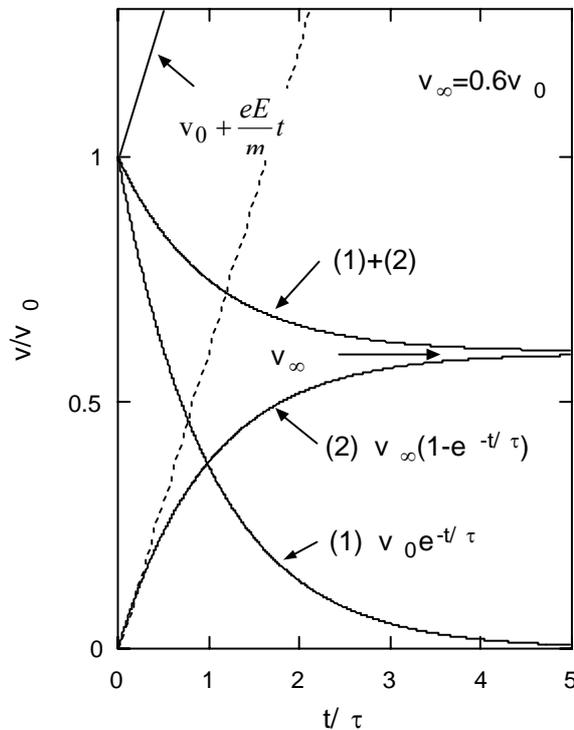


図 4.2.1. 摩擦のある空間で電場が加わったときの電子の速度の時間変化．

### 4.3 オームの法則とジュール熱

電場  $E$  の時間変化が  $\tau$  に比べて十分遅く，常に定常状態を保ちながら変動している

と見なすことができるなら(4.2.8)式より，

$$v = v_{\infty} = \mu E, \quad \mu = \frac{e\tau}{m} \quad (4.3.1)$$

が成り立つ．この $\mu$ を易動度(モビリティ)という．電子の密度を $N$ とすると，単位断面積当りの電流すなわち電流密度は

$$J = Nev = Ne\mu E \quad (4.3.2)$$

に等しい．これを

$$J = \sigma E \quad (4.3.3)$$

と表すと

$$\sigma = Ne\mu \quad [\Omega^{-1}m^{-1} = Sm^{-1}] \quad (4.3.4)$$

は直流電気伝導度であり，その逆数

$$\rho = \frac{1}{\sigma} = \frac{1}{Ne\mu} \quad [\Omega m] \quad (4.3.5)$$

が比抵抗である． $\mu$ ， $\sigma$ または $\rho$ はそれぞれ物質固有の値を持ち，電気特性を評価するための重要な量である．

図 4.3.1 のような一様な棒状の導電体の長さを $L$ ，断面積を $S$ とすると，これは単位長ささと単位断面積を持つ導電体を長さ方向に直列に $L$ 個つないだものを $S$ 本並列に接続したものと同等である．したがって電気抵抗は

$$R = \frac{L}{S} \rho \quad [\Omega] \quad (4.3.6)$$

に等しい．またこの導電体に電圧 $V$ の電源を接続すると

$$V = LE \quad (4.3.7)$$

で関係づけられる電場 $E$ が導電体の中に生じ，このとき

$$I = SJ \quad (4.3.8)$$

の電流が流れる．これらの関係式から直ちに

$$V = IR \quad (4.3.9)$$

が導かれる．これがオームの法則(Ohm's law)に他ならない．

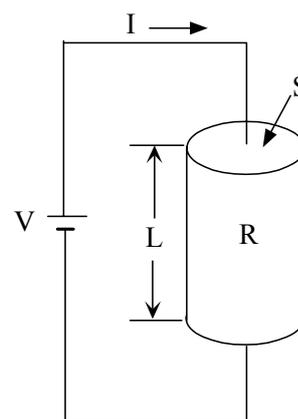


図 4.3.1. 棒状導電体の電気抵抗．

導電体に通電するとジュール熱(Joule's heat)が発生する．これは運動方程式(4.2.5)式の中の  $m \frac{dv}{dt} = -\frac{mv}{\tau}$  という摩擦によって運動エネルギーが失われるためである．単位体積・単位時間当り電子が失う運動エネルギーは

$$N \frac{d\varepsilon}{dt} = N \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} mv^2 \right) = -N \frac{mv^2}{\tau} \quad (4.3.10)$$

である．(4.3.1)および(4.3.2)式の関係を用いて整理すると(4.3.10)式の右辺は  $-JE$  に等しいことが容易に示される．したがって

$$N \frac{d\varepsilon}{dt} = -JE \quad (4.3.11)$$

である．結局，導電体全体での運動エネルギーの損失率は

$$SLN \frac{d\varepsilon}{dt} = -SLJE = -IV \quad [\text{W(ワット)}] \quad (4.3.12)$$

である．(4.3.12)式は電源のマイナス極側から導電体に流れ込む電子が単位時間に  $IV$  の電気エネルギーを失うことを表している．このエネルギーがジュール熱として導電体の中に放出されるわけである．すなわち導電体の中で，電気エネルギー → 電子の運動エネルギー → 導電体原子の運動エネルギーというエネルギー転換が起こっている．1 W の電力を熱の発生率(cal/s)に換算すると  $1 \text{ W} = 0.238889 \text{ cal/s}$  である． $4.18605 (=1/0.238889) \text{ J/cal}$  を熱の仕事当量という．

#### 4.4 交流電気伝導

交流の場合でも電子の運動方程式自体は

$$m \frac{dv}{dt} = eE - \frac{mv}{\tau} \quad (4.4.1)$$

である．電場が

$$E = E_1 e^{-i\omega t} \quad (4.4.2)$$

のように角速度  $\omega$  で周期的に振動しているとする．2.4 節での強制振動の外力と同様に電場の振動を  $e^{-i\omega t}$  と表すが，通常の交流の場合  $e^{i\omega t}$  としても結果に変わりはない．しか

し第 5 章で述べるように電磁波では指数の符号が意味を持つ。  $e^{-i\omega t}$  と  $e^{i\omega t}$  はそれぞれ、3 次元の右ネジ直交座標系の空間の 1 点で見たとき、正方向と負方向に進む電磁波の電磁場の振動を表す。本書では記述の統一性を保つために電場を(4.4.2)式で表すことにする。

$c$  を時間に依存しない速度ベクトルとして

$$\mathbf{v} = c e^{-i\omega t} \quad (4.4.3)$$

とおけば(4.4.1)式より

$$\mathbf{v} = \frac{e\tau}{m} \frac{\mathbf{E}_1 e^{-i\omega t}}{(1-i\omega\tau)} \quad (4.4.4)$$

という特解が得られる。同次方程式の一般解は、時間に依存しないもう 1 つの速度ベクトルを  $a$  として、  $\mathbf{v} = a e^{-t/\tau}$  であるから、完全解はこの  $\mathbf{v}$  と(4.4.4)式の  $\mathbf{v}$  との和である。しかし  $t \rightarrow \infty$  で  $a e^{-t/\tau} \rightarrow 0$  であるから、定常的には速度は(4.4.4)式の  $\mathbf{v}$  で与えられる。そこで電気伝導度を考えると、前節の(4.3.1)式から(4.3.4)式までの考察より

$$\sigma(\omega) = \frac{\sigma(0)}{1-i\omega\tau} = \frac{\sigma(0) e^{i\theta}}{\sqrt{1+(\omega\tau)^2}} \quad (4.4.5)$$

となる。  $\theta$  は

$$\theta = \tan^{-1} \omega\tau \quad (4.4.6)$$

で与えられる。  $\sigma(0)$  は(4.3.4)式で定義した直流伝導度である。このように、交流では電子が直流値にまで加速されないうちに電場が変動するので位相が  $\theta = \tan^{-1} \omega\tau$  だけ遅れ、  $|\sigma(\omega)|$  は図 4.4.1. に示すように直流伝導度よりも低くなる。しかし、商用電力に使われている 50~60 Hz の交流ではその周期 17~20 ms に比べると、ほとんどの導電体で  $\tau$  は無視できるほど短いので、実際上  $\sigma(\omega) = \sigma(0)$  とみなすことができる。

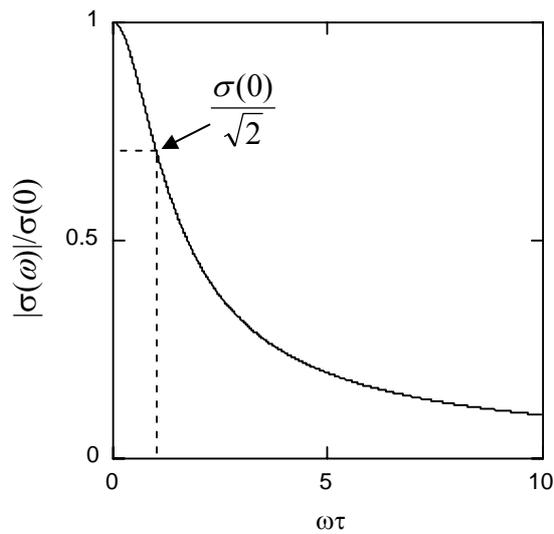


図 4.4.1. 電気伝導度の周波数依存性

交流の場合，単位時間・単位体積当り消費される電気エネルギー(電力)は

$$P(t) = \text{Re}[\mathbf{J}(t)] \cdot \text{Re}[\mathbf{E}(t)] = \frac{1}{2} E_0^2 |\sigma(\omega)| \{ \cos \theta + \cos(2\omega t - \theta) \} \quad (4.4.7)$$

のように時間的に変動している．交流では通常 1 周期の時間平均を単に電力といっている．これを  $P$  とすると，(4.4.7)式よりただちに

$$P = \frac{1}{2} E_1^2 |\sigma(\omega)| \cos \theta \quad (4.4.8)$$

となる．一方，積  $\mathbf{J}^* \cdot \mathbf{E}$  は時間変化せず，

$$\mathbf{J}^* \cdot \mathbf{E} = E_1^2 |\sigma(\omega)| e^{-i\theta} \quad (4.4.9)$$

であるから，(4.4.8)式は

$$P = \frac{1}{2} \text{Re}[\mathbf{J}^* \cdot \mathbf{E}] \quad (4.4.10)$$

と書き換えることができる．交流の消費電力を表すには一般に(4.4.10)式を用いる．電力をこのように表すと電流と電場の虚数部も実際の意味を持つことになる．

#### 4.5 磁場中の電子の運動 -サイクロトロン運動-

$B \neq 0$ ,  $\tau = \infty$  で電場がない ( $E = 0$ ) とき,  $B // z$  として運動方程式

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = e \mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (4.5.1)$$

を  $x, y, z$  成分に分解すると

$$\frac{dv_x}{dt} = \omega_c v_y \quad (4.5.2.a)$$

$$\frac{dv_y}{dt} = -\omega_c v_x \quad (4.5.2.b)$$

$$\frac{dv_z}{dt} = 0 \quad (4.5.2.c)$$

が得られる. ここで  $\omega_c$  は

$$\omega_c = \frac{eB}{m} \quad (4.5.3)$$

であり, これをサイクロトロン振動数という.  $a, \alpha$  を定数として(4.5.2)式の解は

$$v_x = a \sin(\omega_c t + \alpha) \quad (4.5.4.a)$$

$$v_y = a \cos(\omega_c t + \alpha) \quad (4.5.4.b)$$

$$v_z = v_{z0} = \text{一定} \quad (4.5.4.c)$$

である. 簡単のために電子は  $(x, y)$  面内で運動しているとし, さらに時刻  $t = 0$  で  $v_x = v, v_y = 0$  としよう. このときは  $a = v, \alpha = \frac{\pi}{2}$  であるから, (4.5.4a) および (4.5.4b)

式を積分すると,  $x_0, y_0$  を定数として

$$x = \frac{v}{\omega_c} \sin(\omega_c t) + x_0 \quad (4.5.5.a)$$

$$y = \frac{v}{\omega_c} \cos(\omega_c t) + y_0 \quad (4.5.5.b)$$

が得られる. これより, 電子は  $(x_0, y_0)$  を中心として

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r_c^2 \quad (4.5.6)$$

のように, 角周波数  $\omega_c$ , 半径

$$r_c = \frac{v}{|\omega_c|} \quad (4.5.7)$$

の円軌道を描くことが分かる。この運動をサイクロトロン運動という。\$r\_c\$ をサイクロトロン半径という。

電子の電荷は負なので \$\omega\_c < 0\$ である。したがって電子は図4.5.1.のように左回りにサイクロトロン運動をする。陰イオンも同じである。磁場を反転させると \$\omega\_c > 0\$ となるので、右回りになる。反対に陽電子、正孔、および陽イオンなどの正の電荷を持った粒子は正の磁場中で右回り、負の磁場中で左回りのサイクロトロン運動をする。

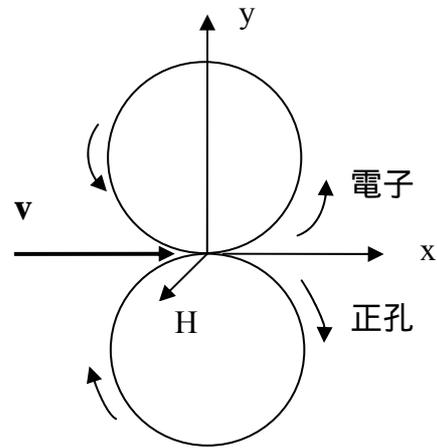


図 4.5.1 電子と正孔のサイクロトロン運動。

\*\*\*\*\*

陽電子と正孔 真空は電子で満たされた状態である。そのような充満した状態から電子が1個抜け出すと、その抜け殻は1個の正電荷の電子として振舞うのでこれを陽電子という。また、固体または凝集体の電子は s, p, d, f などの量子状態を取るが、それぞれの量子状態に収容できる電子の数は無制限ではなく、1原子当たり決まった数の電子が収容される。これらの状態から電子が1個抜け出すと物質中で陽電子のように振舞う。これを正孔と呼ぶ。

\*\*\*\*\*

## 4.6 電場と磁場が同時に印加されているとき

### 4.6.1 サイクロイド運動

前節で考察したサイクロトロン運動のときと同様に \$\tau = \infty\$ で \$B // z\$ としよう。電場

が同時に印加されていると運動方程式は

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = e\mathbf{E} + e\mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (4.6.1)$$

である。いま  $E$  が定常すなわち直流で  $x$  軸に平行に加えられているとする。このときサイクロトロン運動の取り扱いと同様にして  $v_x, v_y$  について

$$v_x(t) = a \sin(\omega_c t + \alpha) \quad (4.6.2.a)$$

$$v_y(t) = a \cos(\omega_c t + \alpha) - \frac{eE}{m\omega_c} \quad (4.6.2.b)$$

という解が求まる。  $y$  方向に一定の速度  $-eE/(m\omega_c)$  が生じている点だけが電場のないときと異なっている。ここでは簡単のために、初めに原点  $x=y=z=0$  で静止していたとして電子の運動を考える。このとき

$$v_x(0) = a \sin \alpha = 0 \quad (4.6.3.a)$$

$$v_y(0) = a \cos \alpha - \frac{eE}{m\omega_c} = 0 \quad (4.6.3.b)$$

であるから  $\alpha = 0, a = \frac{eE}{m\omega_c}$  である。これらをもう一度積分すると分かるように、時間とともに電子は

$$x = \frac{eE}{m\omega_c^2} (1 - \cos \omega_c t) \quad (4.6.4.a)$$

$$y = \frac{eE}{m\omega_c^2} (\sin \omega_c t - \omega_c t) \quad (4.6.4.b)$$

$$z = 0 \quad (4.6.4.c)$$

という運動をし始める。いま  $E < 0$  とし、 $eE/(m\omega_c^2)$  で規格した  $x, y$  を時間  $t$  の関数として描くと図 4.6.1 のようになる。電場が  $-x$  方向を向いているにもかかわらずローレンツ力によって強い制動を受け、電子は  $x$  方向には振幅  $eE/(m\omega_c^2)$  で振動するだけである。逆に、 $+y$  方向に振動しながら進んでいく。

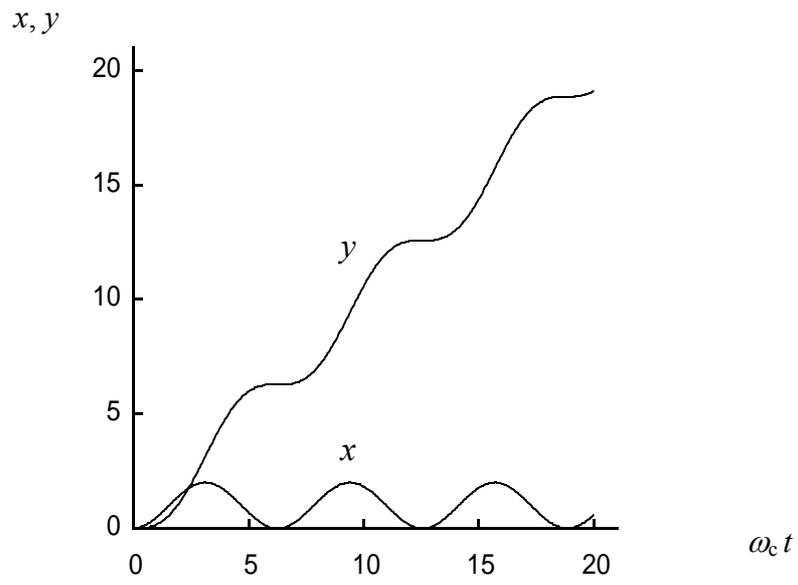


図 4.6.1. サイクロイド運動の  $x, y$  成分 .

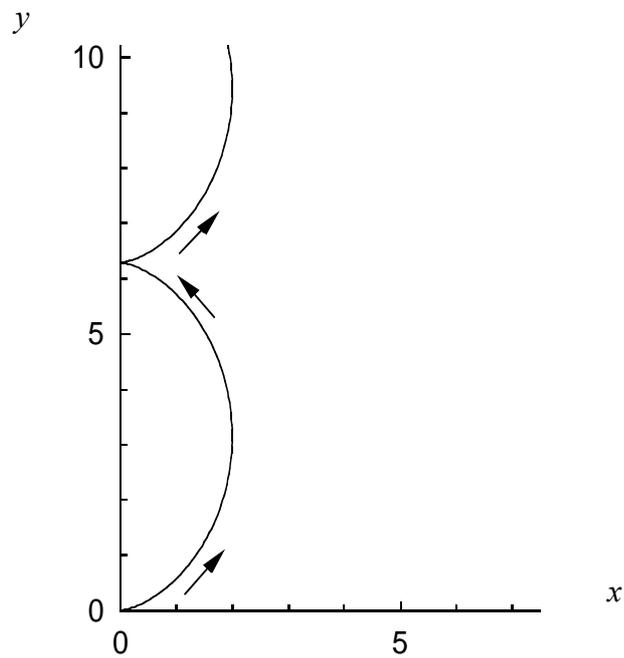


図 4.6.2. サイクロイド軌道 . 軌道につけた矢印は移動の方向を示す .

図 4.6.2 はこの運動を  $(x, y)$  座標で描いた軌跡である．原点から  $+x$  方向に向けて動きだした電子は  $y$  方向に進路を曲げながらついには反転して原点まで戻り，その後再び動き出すという特異な運動をサイクロトロン周波数の周期でくりかえす．

このように，磁場の上にさらに電場が重畳しているとサイクロトロン運動のときと様相が一変する．この運動をサイクロイド運動といい，マイクロ波発生器であるマグネトロンに応用されている．

\*\*\*\*\*

マグネトロンと電子レンジ 銅の円筒を陽極とし，図 4.6.2 の  $y$  軸に相当する陰極を円筒の中心軸に置いて，軸方向に一樣な磁場を加えたマイクロ波発生装置をマグネトロンという．陽極は多分割されて空洞共振器と連結している．この陰極から電子を放出させながら円筒の陽極に高電圧をかけると陽極に向かって電子が流れるが，磁場がある値を超えると，開いたコスモスの花卉の外周のような放射状のサイクロイド運動が起こり，電子は陽極に流れ込まないで陽極を周回して陰極に引き返すようになる．同時に，電子が陽極の近くを通るとき，磁場のローレンツ力から受ける制動によって運動エネルギーの一部をマイクロ波に変えて空洞共振器に供給する．マグネトロンは 2.45 GHz 帯のマイクロ波発生器として今では産業技術の多方面で使われている．また電子レンジのマイクロ波源としてわれわれの生活にも欠かせない．

\*\*\*\*\*

\*\*\*\*\*

サイクロイド軌道 サイクロイド軌道は元々円輪が平面上を転がって1直線に進むとき，その円輪上の1点が描く軌跡である．この軌跡は図 4.6.2 の  $y$  軸を円輪の進行方向としたものと同じである．電磁場中の電子と円輪上の点とは何の関係も無いように思えるにもかかわらず同一の軌跡を描くのは，大変興味深い自然界の偶然と云えよう．

\*\*\*\*\*

#### 4.6.2 ホール効果

何らかの制動のために  $\tau \neq \infty$  となったとき，運動方程式は

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = e\mathbf{E} + e\mathbf{v} \times \mathbf{B} - \frac{m\mathbf{v}}{\tau} \quad (4.6.5)$$

となる．電場がなければ図 4.6.3 のようにサイクロトロン運動は  $\tau$  の程度の時間で減衰し，十分時間が経てば静止する．

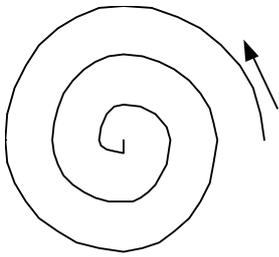


図 4.6.3. サイクロトロン運動の減衰．

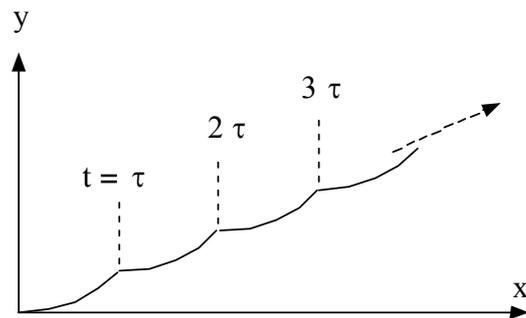


図 4.6.4. 断続的サイクロイド運動．

直流電場があれば電子は強制的に動き出すが，衝突や散乱による制動があると時間が経てば定常状態に達する．このプロセスを直感的に理解するために，電子は  $\tau$  時間毎に障害物に衝突してそれまでに持っていた速度を失うものとしよう．このとき図 4.6.4 のように電子は断続的なサイクロイド運動をくりかえしながら電場の向きとは違う方向に進んで行くだろう． $\tau$  よりも十分に長い時間スケールで見れば電子は等速運動をしているとみなすことができる．ここではこのような直流電場の下での定常運動を考え， $\mathbf{B} = (0, 0, B)$  として

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = 0 \quad (4.6.6)$$

を満たす  $\mathbf{v}$  を求めよう．(4.6.5) 式を  $x, y, z$  方向の成分に分解すれば

$$eE_x + ev_y B - \frac{m}{\tau} v_x = 0 \quad (4.6.7.a)$$

$$eE_y - ev_x B - \frac{m}{\tau} v_y = 0 \quad (4.6.7.b)$$

$$eE_z - \frac{m}{\tau} v_z = 0 \quad (4.6.7.c)$$

が得られる．この連立方程式を解いて  $v_x$ ,  $v_y$ ,  $v_z$  を求めると

$$v_x = \frac{\mu}{1 + (\omega_c \tau)^2} (E_x + \omega_c \tau E_y) \quad (4.6.8.a)$$

$$v_y = \frac{\mu}{1 + (\omega_c \tau)^2} (-\omega_c \tau E_x + E_y) \quad (4.6.8.b)$$

$$v_z = \mu E_z \quad (4.6.8.c)$$

となる．この結果は

$$\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{xx} & a_{xy} & 0 \\ a_{yx} & a_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & a_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} \quad (4.6.9)$$

と書ける．ここで

$$a_{xx} = \frac{\mu}{1 + (\omega_c \tau)^2} \quad (4.6.10.a)$$

$$a_{xy} = \frac{\omega_c \tau \mu}{1 + (\omega_c \tau)^2} \quad (4.6.10.b)$$

$$a_{yx} = -\frac{\omega_c \tau \mu}{1 + (\omega_c \tau)^2} = -a_{xy} \quad (4.6.10.c)$$

$$a_{yy} = \frac{\mu}{1 + (\omega_c \tau)^2} = a_{xx} \quad (4.6.10.d)$$

$$a_{zz} = \mu \quad (4.6.10.e)$$

である．ここでも  $\mu$  は(4.3.1)式で定義される電子の易動度であり， $\omega_c$  はサイクロトロン周波数を表す．サイクロイド運動を考えて初めに図 4.6.4 で予想したように，電流は電場と平行に流れない．例えば電場を  $-x$  方向に加えると，電子は  $y$  方向への角度を持って一定速度で進んで行く． $|\omega_c| \tau < 1$  のとき  $x$  軸からの角度は  $45^\circ$  以下であるが  $|\omega_c| \tau > 1$

では  $45^\circ$  以上になる .

なお , (4.6.9) 式のように複数の座標方位できまる成分の行列で表される量をテンソル (tensor) という . このとき座標方位の数を「階 (rank)」と呼ぶ . (4.6.9) 式の場合  $(a_{ij})$  は 2 階 (second rank) のテンソルである .

電子の密度を  $N$  として , 電流密度  $J$  は

$$J = Nev \quad (4.6.11)$$

であるから (4.6.9) 式を代入して

$$J = Ne(a_{ij})E \quad (4.6.12)$$

と書ける . 電気伝導度  $\sigma$  を用いると

$$J = \sigma E \quad (4.6.13)$$

であるから  $\sigma$  もテンソル量であり ,

$$(\sigma_{ij}) = Ne(a_{ij}) \quad (4.6.14)$$

で与えられる .

ここまでの考察では電子が動く空間に何の制限も与えていない . しかし実際には無限に大きい物質はない . いま図 4.6.5 のように , 直方体の形に切り出した試料の  $x$  方向に電流を流しながら  $z$  方向に磁場を加えるとする . これは導電体に電流を流すときのもっとも基本的な方法であるが , ここで重要な事実は ,  $y$  方向には電流を流さないので

$$J_y = 0, \quad v_y = 0 \quad (4.6.15)$$

という境界条件が成り立っていることである . この境界条件の下では (4.6.7.a) 式より

$$J_x = Ne\mu E_x \quad (4.6.16)$$

のように ,  $x$  方向には磁場のないときと同じ電流が流れるが , (4.6.8.b) 式より  $y$  方向に

$$E_y = \omega_c \tau E_x \quad (4.6.17)$$

という電場が生じることが分かる . (4.6.16) 式の  $E_x$  を (4.6.17) 式に代入すると

$$E_y = \frac{B}{Ne} J_x \quad (4.6.18)$$

が得られる . 試料の  $y$  方向の幅を  $L_y$  とすると , これは磁場と電流に比例して  $y$  方向に

$$V_y = E_y L_y \quad (4.6.19)$$

という起電力が発生することを意味している．つまり両側の  $y$  面に電荷が蓄積し，磁場によるローレンツ力を打ち消してサイクロイド運動を完全に抑制する電場をつくり出している．この現象はホール効果(Hall effect)と呼ばれる．

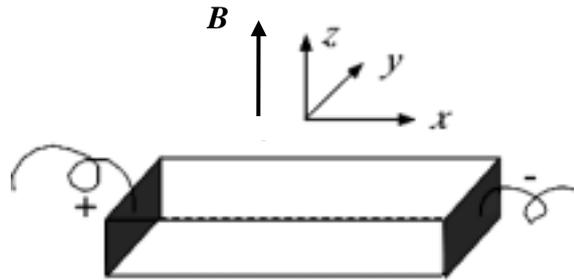


図 4.6.5. 磁場中に置かれた直方形の導電体．

(4.6.19)式のホール起電力  $V_y$  を

$$V_y = RB J_x L_y \quad (4.6.20)$$

と書き換えれば

$$R = \frac{1}{Ne} \quad (4.6.21)$$

である．これをホール係数という．半導体工学では電流の担体をキャリアというが，キャリアが電子ならば  $e < 0$  ，正孔ならば  $e > 0$  であるから  $R$  の符号が電子と正孔で逆転する．このようにホール起電力を測定すれば半導体や金属のキャリアのタイプと密度を正確に測定することができる．また，直流電気伝導度が  $\sigma = Ne\mu$  で与えられることを(4.3.4)式で示した．したがって(4.6.21)式よりただちに

$$R\sigma = \mu \quad (4.6.22)$$

であることが導かれる．この関係式より求めた  $\mu$  をホール易動度という．

\*\*\*\*\*

ホール効果とホールモーター　ホール効果はアメリカの物理学者 E. Hall が発見し、彼の 24 歳の年(1879 年)に発表された。ホール効果から得られるキャリアのタイプと密度および易動度についての正確な知見は半導体工学において特に重要であり、彼の発見がなければ半導体工学の現在の発展はなかったであろう。その上、ホール効果の起電力は磁気センサーとしてうってつけである。応答速度が極めて速い上に小型で高感度であること、耐ノイズ性が高いこと、そして広い温度範囲で電気特性が安定していることなど、多くの利点があるために、小型精密モーターの駆動制御用として応用されている。半導体ホール素子を使ったモーターはホールモーターと呼ばれる。ホールモーターの主な用途は VTR のモーター、ハードディスク・フロッピーディスクおよび CD、DVD などのドライブモーターである。また、CD、DVD の光ピックアップの位置制御や電流センサーなどにも不可欠である。このように、半導体のホール効果は高速大容量情報技術をハードウェアの面で支える最も重要な要素の 1 つである。

\*\*\*\*\*

### 4.6.3 サイクロトロン共鳴

4.6.1 節と 4.6.2 節では直流電場を取り扱ったが次に非真空中の交流電場の下での定常運動を考えよう。磁場中では電子はサイクロトロン運動をしようとするが、粘性抵抗があると外力が働かない限り電子は静止している。この電子に交流電場が加わると再び運動をし始める。(4.4)節で述べたのと同じ理由で交流電場と特解をそれぞれ

$$E = E_1 e^{-i\omega t}, \quad v = c e^{-i\omega t}$$

とおく。 $B$  が  $z$  方向を向いているとし、(4.6.5)式の運動方程式を 4.6.2 節での取り扱いと同様に  $x, y, z$  成分に分解して  $v_x, v_y, v_z$  を求めると

$$v_x = \frac{\mu}{(1-i\omega\tau)^2 + (\omega_c\tau)^2} \{(1-i\omega\tau)E_x + \omega_c\tau E_y\} \tag{4.6.23.a}$$

$$v_y = \frac{\mu}{(1-i\omega\tau)^2 + (\omega_c\tau)^2} \{-\omega_c\tau E_x + (1-i\omega\tau)E_y\} \tag{4.6.23.b}$$

$$v_z = \frac{\mu E_z}{1 - i\omega\tau} \quad (4.6.23.c)$$

となる。(4.6.8)式で導いた各成分に $-i\omega\tau$ の項が加わっている。また磁場と平行な $z$ 成分はローレンツ力の影響を受けないので、4.4節で求めた(4.4.5)式の交流伝導度に対応する。

サイクロトロン運動は円運動である。したがって電子に強く作用するのは円回転電場であると予想される。そこで、一定の強さの $E$ が回転している場合を考えよう。まず左回りに回転しているとき、 $E$ の実数部が $t=0$ で図4.6.6(a)のように $x$ 方向を向いていたとして $x, y$ 成分の関係をみると、 $y$ 成分の振動は $x$ 成分の振動に比べて位相が常に $90^\circ$ 遅れている。 $e^{-i(\omega t - \pi/2)} = ie^{-i\omega t}$ であることを思いおこすと、時間と無関係に

$$E_y = iE_x \quad (4.6.24)$$

となっていることが分かる。ここでは $|E| = E_1$ としているので、虚数部も含めた左回りの円回転電場は、 $x, y$ 方向の単位ベクトルをそれぞれ $i, j$ として

$$\mathbf{E}_{\text{lcp}} = \frac{E_1}{\sqrt{2}}(\mathbf{i} + j)e^{-i\omega t} \quad (4.6.25)$$

と表される。図4.6.6(b)に示すように、虚数部は実数部と直交してやはり左回りに回転している。同様にして右回り円回転電場は

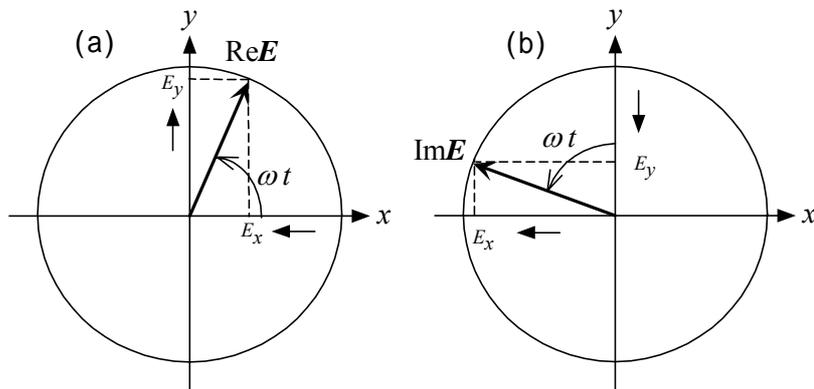


図4.6.6. 左回りの回転電場の (a)実数部と(b)虚数部。

$$\mathbf{E}_{\text{rcp}} = \frac{E_1}{\sqrt{2}}(\mathbf{i} - \mathbf{j})e^{-i\omega t} \quad (4.6.26)$$

である。

図 4.6.6 を右ネジ直交座標の  $(x, y)$  面とすると,  $z$  軸の方向は紙面に垂直で上向きである。特殊な場合を除いて, 光は進む方向に垂直な方向に振動する電磁場を伴った電磁波である。この方向に進んでくる光を観測する際に電場の回転が右回りか左回りかを区別するとき, 光学ではそれぞれ右円偏光, 左円偏光と呼ぶ。地球に注がれている太陽光を含めて, 自然光のほとんどはこのような右回りと左回りが 50% ずつの割合で混じり合った円偏光である。

以下では左回り円回転の交流電場に対する電子の応答を考えよう。左回り円回転電場の各成分は(4.6.25)式より

$$E_x = \frac{E_1}{\sqrt{2}}e^{-i\omega t}, \quad E_y = \frac{iE_1}{\sqrt{2}}e^{-i\omega t}, \quad E_z = 0 \quad (4.6.27)$$

である。したがって(4.6.24)式より

$$v_x = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\mu E_1 e^{-i\omega t}}{1 - i(\omega + \omega_c)\tau} \quad (4.6.28.a)$$

$$v_y = \frac{i}{\sqrt{2}} \frac{\mu E_1 e^{-i\omega t}}{1 - i(\omega + \omega_c)\tau} \quad (4.6.28.b)$$

$$v_z = 0 \quad (4.6.28.c)$$

が得られる。これより電子は

$$v = \sqrt{\mathbf{v}^* \cdot \mathbf{v}} = \frac{\mu E_1}{\sqrt{1 + (\omega + \omega_c)^2 \tau^2}} \quad (4.6.29)$$

という等速円運動をすることが分かる。

この円運動の速度の  $x, y$  成分を見ると時間に無関係に

$$\frac{v_y}{v_x} = i \quad (4.6.30)$$

であることから, この円運動は電場と同じ左回りである。はじめに予想したように, 左回りの交流電場を加えると静止していた電子が再び半径

$$r = \frac{\mu E_1}{\omega} F(\omega), \quad F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega + \omega_c)^2 \tau^2}} \quad (4.6.31)$$

の円運動をし始めることが分かる。電子では  $\omega_c = eB/m < 0$  なので、図 4.6.7 に示すように  $F(\omega)$  は  $\omega = -\omega_c$  で極大値を持つ。つまり  $\omega = -\omega_c$  でサイクロトロン運動が発生し、その半径は交流電場の強さに比例する。この現象をサイクロトロン共鳴といい、第 2 章 4 節で述べた強制振動の 1 つの例である。

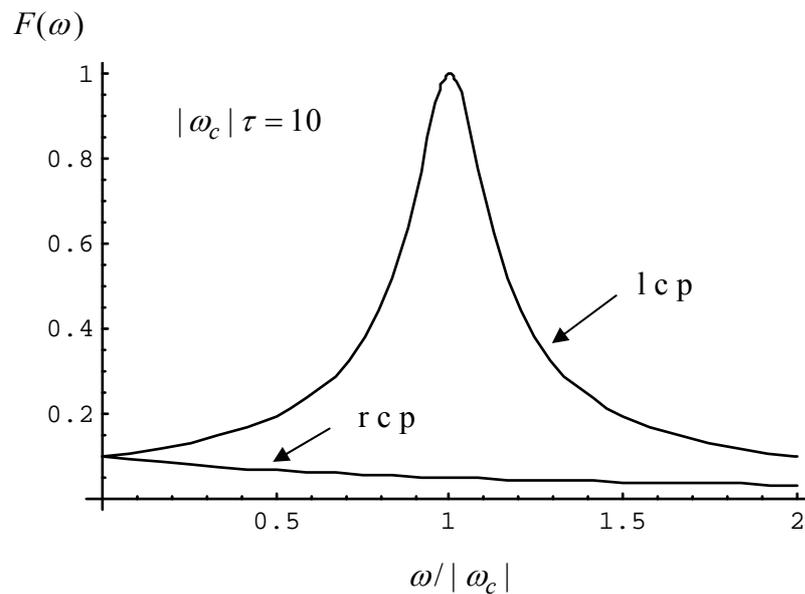


図 4.6.7.  $|\omega_c\tau|=10$  のときの lcp と rcp の交流電場に対する  $F(\omega)$ .

#### 4.6.4 サイクロトロン共鳴の観測と磁気共鳴

サイクロトロン共鳴では交流電場が、摩擦抵抗に逆らって電子にサイクロトロン運動をさせる。このとき、直流の場合と同様に電子は電気エネルギーを吸収してジュール熱を発生する。電子の電流は  $J = Nev$  で与えられ、この電流によって電子が消費する単位時間・単位体積当りの電力は(4.4.12)式より

$$P = \frac{1}{2} \text{Re}[\mathbf{J}^* \cdot \mathbf{E}_{\text{lcp}}] \quad (4.6.32)$$

に等しいので，(4.6.25)および(4.6.28)式より

$$P = \frac{1}{2} \sigma E_1^2 F^2(\omega) \quad , \quad F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega + \omega_c)^2 \tau^2}} \quad (4.6.33)$$

となる．これは  $\omega_c = 0$  のとき，すなわち磁場が加わっていないときの交流の電力消費関数(4.4.10)式を  $\omega$  軸の方向に  $-\omega_c$  だけ平行移動させたものに他ならない．図 4.6.8 に一例として  $|\omega_c \tau| = 10$  としたときの  $F^2(\omega)$  の曲線を示す．

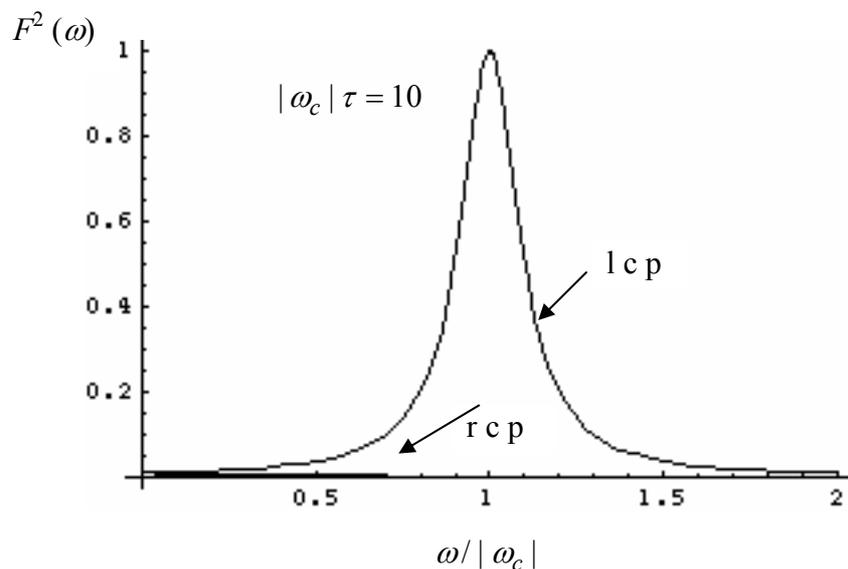


図 4.6.8.  $|\omega_c \tau| = 10$  のときの lcp, rcp 円偏光に対するサイクロトロン共鳴のエネルギー消費関数．

一方，右回り円偏波の交流電場に対しては

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega - \omega_c)^2 \tau^2}} \quad (4.6.34)$$

である．電子のサイクロトロン運動とは逆回りなので共鳴は起こらない．エネルギー消費はゼロではないが，図 4.6.8 に示したように， $|\omega_c \tau|$  が 1 よりも十分に大きいときはほとんど何の効果も起こらない．ただし陽イオンや半導体の正孔では  $\omega_c > 0$  なので右回り円偏波で共鳴が起こる．

このように  $\omega \approx |\omega_c|$  のときに生じるサイクロトロン共鳴の観測では外部から加えた交流電場によるエネルギー消費を電氣的または光学的に測定する．1~10 T の通常の磁場で多くの半導体や金属の  $|\omega_c|$  はマイクロ波から遠赤外光の周波数帯域になる．マイクロ波のときエネルギー消費は空洞共振器の Q 値の減少として観測され，遠赤外光に対しては第 1 章 2 節で述べた吸収係数として観測される．

サイクロトロン共鳴と原理的に同じ共鳴現象に電子スピン共鳴と核磁気共鳴がある．電子スピン共鳴は電子常磁性共鳴ともいう．これらを総称して磁気共鳴という．前者が電子，後者が原子核によって起こる点異なるだけである．

一般に，対を形成していない電子や，原子番号と質量数のどちらかまたは両方が奇数の原子核は磁気モーメントを持っている．巻末の付録 A.2 で詳しく述べるが，磁場があると磁気モーメントは回転するコマの首振り運動と同じように，磁場方向を回転軸として首振り運動を行う．これを才差運動といい，その周波数は磁場に比例する．磁場強度に対する才差周波数の比例係数を原子核では磁気回転比といい，それぞれの原子核は固有の値を持つ．電子ではボーア磁子(Bohr magneton)  $e\hbar/(2m)$  を  $\mu_B$  と置いて，磁気回転比は  $g\mu_B/\hbar$  である．この  $g$  を  $g$  値といい，真空中の自由電子の  $g$  値は 2.0023 である．

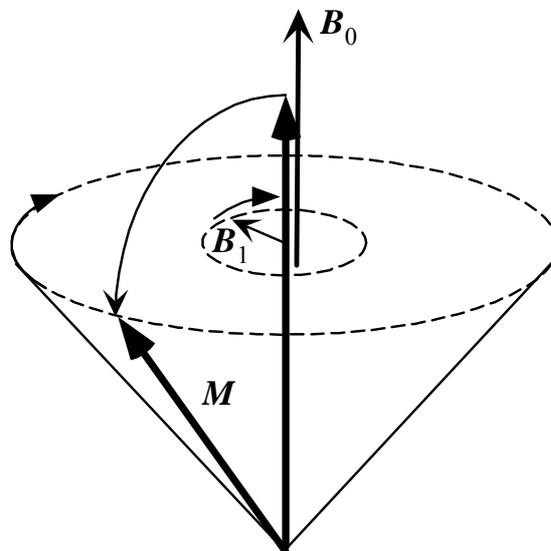


図 4.6.9 交流横磁場による磁気モーメントの才差運動の発生.  $M$  は磁気モーメントを表し， $B_0$  と  $B_1$  はそれぞれ定常磁場と交流横磁場を表す．

才差運動はちょうどサイクロトロン運動と同様に，物質内のいろいろな原子核や電子との磁氣的相互作用によりダンピングを受けて抑制される．したがって定常磁場中では正味の磁気モーメントは平衡状態ではその磁場の方向を向く．しかし才差周波数に等しい周波数で回転する磁場がさらにこの定常磁場に垂直な面内に加えられると，磁気モーメントは回転磁場のエネルギーを吸収し，強制的に励振されて図 4.6.9 に示すように才差振幅が共鳴増大する．これが磁気共鳴である．励振磁場は直線的な交流磁場でもよい．才差振幅は励振磁場によるトルクがダンピングと釣り合ったときに定常値になる．サイクロトロン共鳴では電子の円運動を加速するので交流電場を用いるが，磁気共鳴では磁気モーメントの回転運動を加速するので交流磁場を用いる．

\*\*\*\*\*

MRI 磁気能率を持つ原子核のうち磁気回転比が最も大きいのは水素原子核の陽子(プロトン) ${}^1_1\text{H}$ であり，共鳴周波数は 1 T の磁場で 42.577 MHz という，ラジオ波の周波数帯にある．物質中では他の原子や電子から磁氣的な影響を受けて実際の才差周波数はこの値からわずかにずれる．医療に应用されている MRI (Magnetic Resonance Imaging) では，超伝導マグネットで磁場を掃引しながら生体の中の  ${}^1_1\text{H}$  の断面内分布を核磁気共鳴によって実測し，プロトン密度の空間変化をコンピュータで画像化している．原子相対頻度 (natural abundance) がほぼ 100% の  ${}^{14}_7\text{N}$  核や  ${}^{31}_{15}\text{P}$  核も磁気能率を持つので，これらの原子核による MRI の試みも行われている．

\*\*\*\*\*

\*\*\*\*\*

サイクロトロン加速器と PET 図 4.6.10 にサイクロトロン加速器の原型を示す．直流電磁石の磁極の間に真空槽をつくり，その中に 2 つの半円形の中空電極(その形になぞらえて D 電極とよぶ)が互いに向かい合わせに置かれている．2 つの電極の間には高周波電圧を印加する．中心に置かれた粒子源から出た荷電粒子は電極間の電界によって 1 つの電極に向けて加速される．D 電極の内部では電界がないので加速されないが，全体が強い磁場の中に置かれているので粒子はサイクロ

トロロン周波数で円運動をする．半周して電極の間隙に出てくると再び電界によって加速されてもう1つのD電極の中に入る．このとき高周波電界の交番とサイクロトロン運動がちょうど同期していると図のようにサイクロトロン軌道半径が共鳴的に増大し，その結果，粒子の速度が増大する．巻末のA.3で述べる陽電子放射断層撮影検査(PET)では，このようなサイクロトロン加速器を用いて加速した陽子 ${}^1_1\text{H}$ を ${}^{17}_8\text{O}$ に衝突させて放射性同位元素の ${}^{18}_9\text{F}$ をつくり，これから放射される陽電子を利用する．

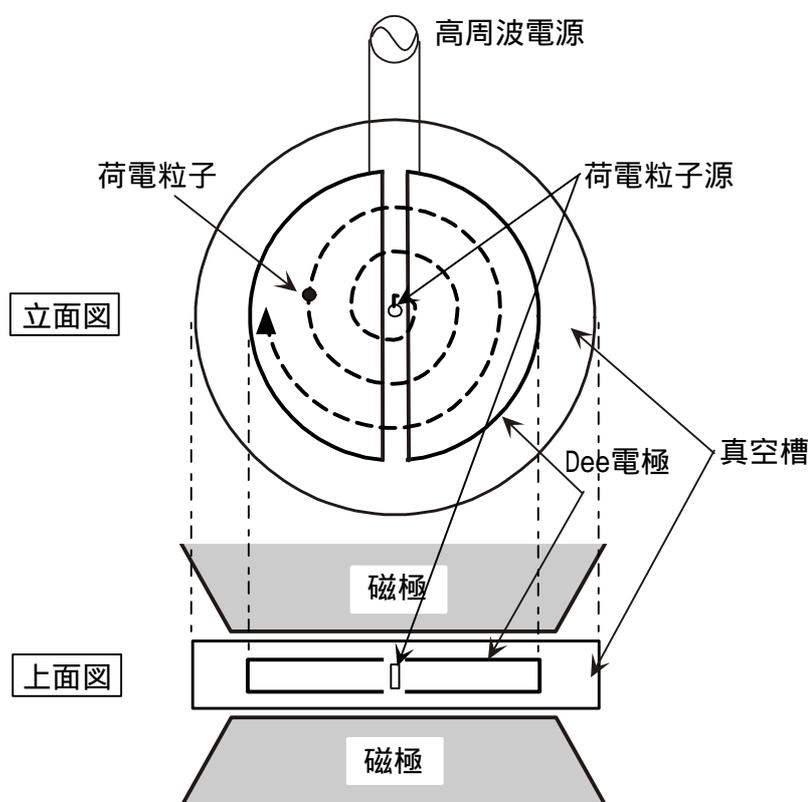


図 4.6.10 サイクロトロン加速器の原理．

\*\*\*\*\*