函数論分科会講演アブストラクト，日本数学会 2006 年度秋季総合分科会，大阪市立大学，2006 年 9 月 19–22 日，pp. 25–26.

１３

多項式凸性と強い円板的性質

阿部 誠*

複素空間 X はつねに被約かつ第 2 可算とする．複素空間 X の開集合 D が（**正則**）$\mathscr{O}(X)$**-凸**とは，D 内の任意のコンパクト集合 K に対し，集合 $\hat{K}_X \cap D$ がコンパクトなことである．ただし，$\hat{K}_X$ は K の X における**正則凸被**を表す．複素空間 X の開集合 D が X において**強い円板的性質**をもつとは，条件「$\varphi : \bar{\Delta} \to X$ が連続，$\varphi|_\Delta$ が正則，$\varphi(\partial\Delta) \subset D \Rightarrow \varphi(\bar{\Delta}) \subset D$」をみたすことである．ただし，$\Delta \subset \mathbb{C}$ は単位円板を表す．次の命題は容易に確かめられる．

命題 1 ([1, Proposition 1])**.** Stein 空間 X の任意の $\mathscr{O}(X)$-凸開集合 D は X において強い円板的性質をもつ．

系 2 ([1, Corollary 2])**.** $\mathbb{C}^n$ の任意の多項式凸開集合 D は $\mathbb{C}^n$ において強い円板的性質をもつ．

命題 3 ([1, Corollary 4])**.** $\mathbb{C}^n$ の開集合 D が $\mathbb{C}^n$ において強い円板的性質をもてば，$\mathbb{C}^n$ 内の任意の複素直線 L に対し，共通部分 $D \cap L$ は単連結である．

なお，複素空間 X，族 $\mathscr{F} \subset \mathscr{O}(X)$ に対し，$\mathscr{F}|_U$ が一様有界であるような X の開集合 U 全体の合併を $B(\mathscr{F})$，$\mathscr{F}$ が点 x で同程度連続であるような $x \in X$ 全体の集合を $E(\mathscr{F})$ と書くとき，命題 1 に関連し，次のふたつの事実がある．

定理 4 (Fuks [7, pp. 15–19], Tsuji [12], Abe-Tabata [4])**.** Stein 多様体 X の開集合 D について，次の 3 条件は同値である．
 (1) D は $\mathscr{O}(X)$-凸である．
 (2) 族 $\mathscr{F} \subset \mathscr{O}(X)$ が存在して，$D = B(\mathscr{F})$．
 (3) 族 $\mathscr{F} \subset \mathscr{O}(X)$ が存在して，$D = E(\mathscr{F})$．

定理 5 (Abe-Furushima-Tsuji [3])**.** X を複素多様体とする．任意の $\mathscr{F} \subset \mathscr{O}(X)$ に対し，$B(\mathscr{F})$ と $E(\mathscr{F})$ は X において強い円板的性質をもつ．

複素空間 X の開集合 D が**有理型** $\mathscr{O}(X)$**-凸**とは，D 内の任意のコンパクト集合 K に対し，集合 $\tilde{K}_X \cap D$ がコンパクトなことである．ただし，$\tilde{K}_X$ は，任意の $f \in \mathscr{O}(X)$ に対し $f(x) \in f(K)$ をみたす点 $x \in X$ 全体の集合であり，これは K の X における**有理型凸被**とよばれる．

定理 6 ([1, Theorem 5])**.** Stein 多様体 X の開集合 D が単連結かつ有理型 $\mathscr{O}(X)$-凸ならば，D は X において強い円板的性質をもつ．

系 7 ([1, Corollary 6])**.** $\mathbb{C}^n$ の開集合 D が単連結かつ有理凸ならば，D は $\mathbb{C}^n$ において強い円板的性質をもつ．

次の**西野領域** D_M は $\mathbb{C}^2$ において有理凸である．

$$D_M := \left\{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid 1 < |z| < M, |w| < 1\right\} \setminus S,$$

$$\text{ただし，} M > 1,\ S := \bigcup_{t \in [0,1]} \left\{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid (1-t)\, z^2 - 2tz + w = 0\right\}.$$

* 〒 862-0976 熊本市九品寺 4-24-1 熊本大学医学部保健学科

命題 8 ([1, Proposition 8])**.** 任意の $M>1$ に対し，西野領域 D_M は $\mathbb{C}^2$ において強い円板的性質をもつ．

Nishino [9, 10] は，十分大きい M に対し D_M は単連結であり，D_M が単連結ならば D_M は多項式凸でないことを証明した．Duval [6] も単連結かつ有理凸であり，かつ多項式凸でない $\mathbb{C}^2$ の開集合の例を与えた．ゆえに，次の定理を得る．

定理 9 ([1, Theorem 7])**.** $n \geqq 2$ のとき，系 2 の逆は成り立たない．すなわち，$\mathbb{C}^n$ において強い円板的性質をもち，かつ多項式凸でない開集合が存在する．

D と D^* を $D \subset D^*$ なる $\mathbb{C}^n$ の Stein 開集合とするとき，Bremermann [5] は，D が $\mathscr{O}(D^*)$-凸ならば，$\mathbb{C}^n$ 内の任意の複素直線 L に対し，$D \cap L$ は $D^* \cap L$ に関してホモロジー的に単連結であることを指摘し，この事実の逆は正しいかという問題を提出した．定理 9 と系 3 より，Bremermann [5] の問題（Ohsawa [11, p. 81]）は，$D^* = \mathbb{C}^n$（$n \geqq 2$）の場合にすでに否定的である．なお，Joiţa [8] もこの問題に対する反例を与えた．

参考文献

[1] M. Abe, *Polynomial convexity and strong disk property*, J. Math. Anal. Appl. **321** (2006), 32–36.

[2] 阿部誠，**有理型近似性質をもつ領域について**，第 44 回多変数関数論サマーセミナー予稿集，湯沢，2005 年 7 月 30 日〜 8 月 2 日，pp. 15–19.

[3] M. Abe, M. Furushima and M. Tsuji, *Equicontinuity domain and disk property*, Complex Variables Theory Appl. **39** (1999), 19–25.

[4] M. Abe and S. Tabata, *Montel domains and equicontinuity domains*, Math. J. Toyama Univ **26** (2003), 25–34.

[5] H. J. Bremermann, *Die Charakterisierung Rungescher Gebiete durch plurisubharmonische Funktionen*, Math. Ann. **136** (1958), 173–186.

[6] J. Duval, *Convexité rationelle des surfaces lagrangiennes*, Invent. Math. **104** (1991), 581–599.

[7] B. A. Fuks, *Special chapters in the theory of analytic functions of several complex variables*, Translations of Mathematical Monographs vol. 14, Amer. Math. Soc., Providence, 1965, Translated by A. Jeffrey and N. Mugibayashi.

[8] C. Joiţa, *On a problem of Bremermann concerning Runge domains*, preprint, arXiv:math.CV/0504243, 2005.

[9] T. Nishino, *Un exemple concernant la convexité par rapport aux polynômes*, J. Math. Kyoto Univ. **6** (1966), 85–90.

[10] 西野利雄，**単連結で有理凸状であるが多項式凸状ではない例**，日本数学会 2003 年度年会函数論分科会講演アブストラクト，東京大学大学院数理科学研究科，2003 年 3 月 23 〜 26 日，pp. 67–68.

[11] T. Ohsawa, *Analysis of several complex variables*, Translations of Mathematical Monographs, vol. 211, Amer. Math. Soc., Providence, 2002, Translated by S. G. Nakamura.

[12] M. Tsuji, *Equicontinuity domains and Runge domains*, Proceedings of the Ninth International Colloquium on Differential Equations, Plovdiv, Bulgaria, August 18–23, 1998 (D. Bainov, ed.), VSP, Utrecht, 1999, pp. 439–442.