函数論分科会講演アブストラクト，日本数学会 2007 年度年会，埼玉大学，2007 年 3 月 27–30 日，pp. 53–54.

２１

Stein 多様体の領域上の正則直線束と因子

阿部 誠*

被約複素空間 D 上の Cousin-II 分布 $\{(U_i, m_i)\}_{i\in I}$ の定める Cartier 因子 $\mathfrak{d}$ に対し，コサイクル $\{m_i/m_j\} \in Z^1(\{U_i\}_{i\in I}, \mathscr{O}^*)$ の定める D 上の正則直線束を $[\mathfrak{d}]$ と書く．

定理 1. $(X, \mathscr{O}_X)$ を（必ずしも被約でない）純 n 次元 Cohen-Macaulay Stein 空間，D を X の開集合とし，次の 2 条件を仮定する．

i）$H^k(D, \mathscr{O}_X|_D) = 0$ （$2 \leqq k \leqq n-1$）．

ii）D 上の正則直線束 L が，標準的な準同型の合成

$$H^1(D, \mathscr{O}_X|_D) \to H^1(D, \mathscr{O}) \to H^1(D, \mathscr{O}^*)$$

の像に属するならば，D 上の Cartier 因子 $\mathfrak{d}$ が存在して，$L = [\mathfrak{d}]$（ただし，$\mathscr{O} := (\mathscr{O}_X/\mathscr{N}_X)|_D$ は D の被約複素構造層）．

このとき，D は任意の $x \in \partial D \setminus \mathrm{Sing}(X, \mathscr{O}_X)$ において局所 Stein である．

定理 1 と Docquier-Grauert [4] の定理より，次の定理を得る．

定理 2. X を n 次元 Stein 多様体とする．このとき，条件

$$H^k(D, \mathscr{O}) = 0 \quad (2 \leqq k \leqq n-1)$$

をみたす X の開集合 D について，次の 4 条件は同値である．

（1）D は Stein である．

（2）D 上の任意の正則直線束 L に対し，D 上の正因子 $\mathfrak{d}$ が存在して，$L = [\mathfrak{d}]$.

（3）D 上の任意の正則直線束 L に対し，D 上の因子 $\mathfrak{d}$ が存在して，$L = [\mathfrak{d}]$.

（4）D 上の位相的に自明な任意の正則直線束 L に対し，D 上の因子 $\mathfrak{d}$ が存在して，$L = [\mathfrak{d}]$.

系 3 (Abe [1, Theorem 3])**.** X を 2 次元 Stein 多様体とする．このとき，X の開集合 D について，定理 2 の 4 条件は同値である．

系 4 (Ballico [3, Theorem 1])**.** X を Stein 多様体，$\varphi : X \to \mathbb{R}$ を $\mathscr{C}^2$ 級弱 2-凸関数（Andreotti-Grauert の意味）とする．このとき，開集合 $D := \{\varphi < c\}$（c は定数）について，定理 2 の 4 条件は同値である．

* 〒 862-0976 熊本市九品寺 4-24-1 熊本大学医学部保健学科

命題 5 (Abe [1, p. 272])．X を $\dim X \geqq 3$ なる Stein 多様体，A を $\operatorname{codim} A \geqq 3$ なる S の解析的集合，$D := S \setminus A$ とする．このとき，D 上の任意の正則直線束 L に対し，D 上の正因子 $\mathfrak{d}$ が存在して，$L = [\mathfrak{d}]$.

Δ を単位円板として，$M := \Delta^2 \setminus \{(0,0)\}$，$U_\nu := \Delta^2 \setminus \{z_\nu = 0\}$（$\nu = 1,2$）とおく．

補題 6. 関数 $h \in \mathscr{O}(U_1 \cap U_2)$ の $(0,0)$ における Laurent 展開が $cz_1^{r_1} z_2^{r_2}$（$r_1 < 0$, $r_2 < 0$, $c \neq 0$）の形の項をもてば，$e^h \in \mathscr{O}^*(U_1 \cap U_2) = Z^1(\{U_1, U_2\}, \mathscr{O}^*)$ の定める M 上の正則直線束は自明でない．

補題 7 (Ballico [2, Remark 1.4])．M 上の正則直線束 L に対し，次の 2 条件は同値である．

（1）L は自明（holomorphically trivial）．
（2）M 上の因子 $\mathfrak{d}$ が存在して，$L = [\mathfrak{d}]$.

定理 1 の証明は，$n = 2$ の場合，補題 6, 7 に基き，Kajiwara-Kazama [6] の方法，Grauert-Remmert [5] の定理，Levi の拡張定理（Kajiwara-Sakai [7]）を用いる．なお，$X = \mathbb{C}^n$ の場合に限定すれば，Lelong [8] の定理により，証明は相当に簡略化できる．

参考文献

[1] M. Abe, *Holomorphic line bundles on a domain of a two-dimensional Stein manifold*, Ann. Polon. Math. **83** (2004), 269–272.

[2] E. Ballico, *Holomorphic vector bundles on* $\mathbf{C}^2 \setminus \{0\}$, Israel J. Math. **128** (2002), 197–204.

[3] E. Ballico, *Cousin I condition and Stein spaces*, Complex Var. Theory Appl. **50** (2005), 23–25.

[4] F. Docquier and H. Grauert, *Levisches Problem und Rungescher Satz für Teilgebiete Steinscher Mannigfaltigkeiten*, Math. Ann. **140** (1960), 94–123.

[5] H. Grauert and R. Remmert, *Konvexität in der komplexen Analysis. Nicht-holomorph-konvexe Holomorphiegebiete und Anwendungen auf die Abbildungstheorie*, Comment. Math. Helv. **31** (1956), 152–183.

[6] J. Kajiwara and H. Kazama, *Two dimensional complex manifold with vanishing cohomology set*, Math. Ann. **204** (1973), 1–12.

[7] J. Kajiwara and E. Sakai, *Generalization of Levi-Oka's theorem concerning meromorphic functions*, Nagoya Math. J. **29** (1967), 75–84.

[8] P. Lelong, *Domaines convexes par rapport aux fonctions plurisousharmoniques*, J. Analyse Math. **2** (1952), 178–208.