函数論分科会講演アブストラクト，日本数学会 2007 年度秋季総合分科会，東北大学，2007 年 9 月 21–24 日，pp. 53–54.

２２

Stein 空間における有理型近似定理

阿部 誠*

複素空間はつねに被約かつ第 2 可算と仮定する．複素空間 X のコンパクト集合 K に対し，集合

$$ {}_HK_X = \tilde{K}_X := \left\{ x \in X \mid 任意の\ f \in \mathscr{O}(X)\ に対し\ f(x) \in f(K) \right\} $$

を K の X における**有理型凸被**とよぶ（Hirschowitz [6, p. 49]，Lupacciolu [7]，Abe-Furushima [3]，Abe [1, 2]）．

一般に, G を Picard 群 $\mathrm{Pic}(X)$ の部分半群とする．X のコンパクト集合 K に対し, $L \in G,\ s \in \Gamma(X, \mathscr{O}(L))$，$A = \{s = 0\}$，$A \cap K = \emptyset$ をみたす A 全体の集合を $\mathscr{S}(G, K)$ と書くとき，集合

$$ \tilde{K}_{X,G} = \bigcap_{A \in \mathscr{S}(G,K)} (X \setminus A) $$

を K の X における G に関する（一般化された）**有理型凸被**とよぶ.

注 1. $\mathrm{Pic}(X)$ の単位元を $\mathbb{1}_X$ と書けば，${}_HK_X = \tilde{K}_{X,\{\mathbb{1}_X\}}$.

複素空間 X の解析的集合 A は，X で疎（nowhere dense）かつ $N(\mathscr{I}) = A$ をみたす X 上の連接主イデアル層 $\mathscr{I}$ が存在するとき，X の**超曲面**（hypersurface）とよばれる．X のコンパクト集合 K に対し,

$$ {}_hK_X := \left\{ x \in X \mid X\ の任意の超曲面\ A\ に対し\ x \in A\ ならば\ A \cap K \neq \emptyset \right\} $$

と書く（Hirschowitz [6, p. 50]）.

命題 2. X を孤立点をもたない Stein 空間とする．このとき，X の任意のコンパクト集合 K に対し，${}_hK_X = \tilde{K}_{X,\mathrm{Pic}(X)}$.

注 3. X が孤立点をもたない Stein 空間のとき，X の任意のコンパクト集合 K に対し，${}_hK_X \subset {}_HK_X$ が成り立つ．X が Stein 多様体のとき，X の任意のコンパクト集合 K に対して ${}_hK_X = {}_HK_X$ が成り立つことは，$\mathrm{Hom}(H_2(X, \mathbb{Z}), \mathbb{Z}) = 0$ と同値である（Colţoiu [4]）.

命題 4. X を孤立点をもたない Stein 空間，G を $\mathrm{Pic}(X)$ の部分半群とする．このとき，次の 2 条件は同値である.

(1) X の任意のコンパクト集合 K に対し，$\mathscr{S}(G, K) \neq \emptyset$.
(2) X の任意の相対コンパクト開集合 D に対し，$L|_D = \mathbb{1}_D$ なる $L \in G$ が存在する.

* 〒 862-0976 熊本市九品寺 4-24-1 熊本大学医学部保健学科

例 5. 例えば，$X := \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^* \subset \mathbb{C}^2$, $A := \left\{(z,w) \mid z = w^{\mathrm{i}}\right\}$ のとき，正因子 A の定める X 上の正則直線束を L とすれば，$K := \{|z| = |w| = 1\}$ について，$\tilde{K}_{X,\{L^\nu \mid \nu \in \mathbb{N}\}} = X$（Stein [8] の例）.

Stein 空間において，次の有理型近似定理が成り立ち，これは Weil-岡の有理近似定理の一般化である.

定理 6. X を Stein 空間，G を $\mathrm{Pic}(X)$ の部分半群，K を $\tilde{K}_{X,G} = K$ なる X のコンパクト集合とする．このとき，任意の $\varphi \in \mathscr{O}(K)$ と $\varepsilon > 0$ に対し，$L \in G$ と $f, g \in \Gamma(X, \mathscr{O}(L))$ が存在して，集合 $\{g = 0\}$ は X で疎，K 上で $g \neq 0$，かつ $\left\|\varphi - (f/g)\right\|_K < \varepsilon$.

系 7 ([2, Theorem 11])**.** X を Stein 空間，K を ${}_H K_X = K$ なる X のコンパクト集合とする．このとき，任意の $\varphi \in \mathscr{O}(K)$ と $\varepsilon > 0$ に対し，正則関数 $f, g \in \mathscr{O}(X)$ が存在して，集合 $\{g = 0\}$ は X で疎，K 上で $g \neq 0$ かつ $\left\|\varphi - (f/g)\right\|_K < \varepsilon$.

系 8 (cf. Nguyen [5, Lemma 2.2])**.** X を Stein 多様体 S の開集合，K を ${}_H K_X = K$ なる X のコンパクト集合とする．このとき，任意の $\varphi \in \mathscr{O}(K)$ と $\varepsilon > 0$ に対し，$f, g \in \mathscr{O}(X)$ が存在して，K 上で $g \neq 0$ かつ $\left\|\varphi - (f/g)\right\|_K < \varepsilon$.

系 9 (cf. Hirschowitz [6, Théorème 2])**.** X を孤立点をもたない Stein 空間，K を ${}_h K_X = K$ なる X のコンパクト集合とする．このとき，任意の $\varphi \in \mathscr{O}(K)$ と $\varepsilon > 0$ に対し，有理型関数 $h \in \mathscr{M}(X) \cap \mathscr{O}(K)$ が存在して，$\left\|\varphi - h\right\|_K < \varepsilon$.

参考文献

[1] 阿部誠: 有理型近似性質をもつ領域について. In: 第 44 回多変数関数論サマーセミナー予稿集, pp. 15–19. 越後湯沢 (2005)

[2] Abe, M.: Meromorphic approximation theorem in a Stein space. Ann. Mat. Pura Appl. (4) **184**, 263–274 (2005)

[3] Abe, M., Furushima, M.: On the meromorphic convexity of normality domains in a Stein manifold. Manuscripta Math. **103**, 447–453 (2000)

[4] Colţoiu, M.: On hulls of meromorphy and a class of Stein manifolds. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4) **28**, 405–412 (1999)

[5] Nguyen, Q.D.: Weak Runge pairs in $\mathbf{C}^n$. J. Math. Anal. Appl. **327**, 71–78 (2007)

[6] Hirschowitz, A.: Sur l'approximation des hypersurfaces. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (3) **25**, 47–58 (1971)

[7] Lupacciolu, G.: Complements of domains with respect to hulls of outside compact sets. Math. Z. **214**, 111–117 (1993)

[8] Stein, K.: Topologische Bedingungen für die Existenz analytischer Funktionen komplexer Veränderlichen zu vorgegebenen Nullstellenflächen. Math. Ann. **117**, 727–757 (1941)