函数論分科会講演アブストラクト，日本数学会 2007 年度秋季総合分科会，東北大学，2007 年 9 月 21–24 日，pp. 55–56.

２３

強い有理型近似性質をもつ領域について

阿部 誠*

複素空間はつねに被約かつ第 2 可算と仮定する．複素空間 X のコンパクト集合 K について，集合

$$\tilde{K}_X := \left\{x \in X \mid \text{任意の } f \in \mathscr{O}(X) \text{ に対し } f(x) \in f(K)\right\}$$

を K の X における**有理型凸被**（meromorphically convex hull）とよぶ．複素空間 X の開集合 D が**有理型** $\mathscr{O}(X)$**-凸**（meromorphically $\mathscr{O}(X)$-convex）とは，D 内の任意のコンパクト集合 K に対し，集合 $\tilde{K}_X \cap D$ がコンパクトなことである．

注意 1. $\mathbb{C}^n$ の開集合 D について, 有理型 $\mathscr{O}(\mathbb{C}^n)$-凸 $\Leftrightarrow$ **有理凸**（rationally convex）.

定理 2 ([1])**.** Stein 多様体 X の開集合 D について，次の 2 条件は同値である．

(1) D は有理型 $\mathscr{O}(X)$-凸である．

(2) D は Stein であり, かつ任意の $\varphi \in \mathscr{O}(D)$, コンパクト集合 $K \subset D$, $\varepsilon > 0$ に対し, $f \in \mathscr{O}(X)$ と $g \in \mathrm{Ac}(X)$ が存在して, K 上で $g \neq 0$ かつ $\left\|\varphi - (f/g)\right\|_K < \varepsilon$.

複素空間 X の開集合 D について，$f \in \mathscr{O}(X)$，$g \in \mathrm{Ac}(X)$，かつ D 上で $g \neq 0$ なる $h = (f/g)|_D$ 全体を $\mathscr{Q}_X(D)$ で表す．

命題 3 ([3])**.** Stein 空間 X の開集合 D について，次の 2 条件は同値である．

(1) D は $\mathscr{Q}_X(D)$-凸である．

(2) D は Stein であり, かつ任意の $\varphi \in \mathscr{O}(D)$, コンパクト集合 $K \subset D$, $\varepsilon > 0$ に対し, $f \in \mathscr{O}(X)$ と $g \in \mathrm{Ac}(X)$ が存在して, D 上で $g \neq 0$ かつ $\left\|\varphi - (f/g)\right\|_K < \varepsilon$.

次は Runge の有理近似定理の一般化である（cf. Behnke-Stein [4, Satz 13]）．

命題 4 ([3])**.** D を 1 次元 Stein 空間 X の開集合とする．任意の $\varphi \in \mathscr{O}(D)$，コンパクト集合 $K \subset D$，$\varepsilon > 0$ に対し，$m \in \mathscr{M}(X) \cap \mathscr{O}(D)$ が存在して，$\left\|\varphi - m\right\|_K < \varepsilon$.

一般に，複素空間 X の開集合 D は，$\mathscr{Q}_X(D)$-凸ならば有理型 $\mathscr{O}(X)$-凸であるが，X が既約 Stein 空間の場合に限定しても，$\dim X \geq 2$ のとき，逆は正しくない．

定理 5 ([3])**.** $\mathbb{C}^n$ の開集合 D について，次の包含関係が成り立つ．また，$n \geq 2$ のときは，いずれの "$\Rightarrow$" も逆は成り立たない．

$$\text{多項式凸} \overset{(1)}{\Rightarrow} \mathscr{R}(D)\text{-凸} \overset{(2)}{\Rightarrow} \mathscr{Q}_{\mathbb{C}^n}(D)\text{-凸} \overset{(3)}{\Rightarrow} \text{有理凸} \overset{(4)}{\Rightarrow} \text{Stein}$$

* 〒 862-0976 熊本市九品寺 4-24-1 熊本大学医学部保健学科

ただし，$\mathscr{R}(D) := \mathbb{C}(z_1, z_2, \ldots, z_n) \cap \mathscr{O}(D)$.
逆が成り立たない例（$n = 2$ の場合）.

(1) Hartogs の三角形 $D := \{(z_1, z_2) \mid |z_1| < |z_2| < 1\}$．Nishino [5, 6] の例.

(2) $D := \mathbb{C}^2 \setminus S$，$S$ は $\mathbb{C}^2$ の超越的既約超曲面.

(3) $D := \mathbb{C}^* \times \mathbb{C} \setminus S$，$S := \left\{(z_1, z_2) \mid z_2 = \mathrm{e}^{1/z_1}\right\}$.
$D := (\Delta \times \mathbb{C}^*) \cup \left(\left(\mathbb{C} \setminus \overline{\Delta}\right) \times \mathbb{C}\right)$，$\Delta := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$.

(4) Stein [8] の例．Oka [7] の例．Wermer [9] の例.

定理 6 ([2]). Stein 空間 X の開集合 D について，次の 2 条件は同値である.

(1) D は有理型 $\mathscr{O}(X)$-凸である.

(2) 各 D_ν が $\mathscr{Q}_X(D_\nu)$-凸であるような X の開集合の単調増加列 $\{D_\nu\}_{\nu=1}^{\infty}$ が存在して，D はその極限である.

定理 7 ([2]). $\mathbb{C}^n$ の（連結な）開集合 D について，次の 2 条件は同値である[†].

(1) D は有理凸である.

(2) 各 D_ν が $\mathscr{R}(D_\nu)$-凸であるような $\mathbb{C}^n$ の（連結な）開集合の単調増加列 $\{D_\nu\}_{\nu=1}^{\infty}$ が存在して，D はその極限である.

参考文献

[1] Abe, M.: Meromorphic approximation theorem in a Stein space. Ann. Mat. Pura Appl. (4) **184**, 263–274 (2005)

[2] Abe, M.: A note on the meromorphic $\mathscr{O}(X)$-convexity. Kumamoto J. Math. **18**, 17–23 (2005)

[3] Abe, M.: Open sets satisfying the strong meromorphic approximation property. Toyama Math. J. **29**, 7–23 (2006)

[4] Behnke, H., Stein, K.: Entwicklung analytischer Funktionen auf Riemannschen Flächen. Math. Ann. **120**, 430–461 (1949)

[5] Nishino, T.: Un exemple concernant la convexité par rapport aux polynômes. J. Math. Kyoto Univ. **6**, 85–90 (1966)

[6] 西野利雄: 単連結で有理凸状であるが多項式凸状ではない例. In: 函数論分科会講演アブストラクト, 日本数学会 2003 年度年会, pp. 67–68. 東京大学 (2003)

[7] Oka, K.: Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables. IV – Domaines d'holomorphie et domaines rationellment convexes. Japan. J. Math. **17**, 517–521 (1941)

[8] Stein, K.: Topologische Bedingungen für die Existenz analytischer Funktionen komplexer Veränderlichen zu vorgegebenen Nullstellenflächen. Math. Ann. **117**, 727–757 (1941)

[9] Wermer, J.: On a domain equivalent to the bidisk. Math. Ann. **248**, 193–194 (1980)

[†]Oka [7] では，(2) が有理凸性の定義である.