

---

# シュタイン空間における有理型凸性の研究

---

(課題番号：18540188)

平成18年度～平成19年度科学研究費補助金  
(基盤研究(C))

研究成果報告書

平成20年3月

研究代表者 阿部 誠 (熊本大学医学部准教授)

## はじめに

複素空間  $X$  の開集合  $D$  に対する有理型凸性や有理型  $\mathcal{O}(X)$ -凸性 (有理型 Runge 性) の概念は, 正則凸性や  $\mathcal{O}(X)$ -凸性 (Runge 性) と比べるとき, その考察は困難を伴うものであり, 一方,  $X$  が Stein 多様体, すなわち, 特異点をもたない Stein 空間の場合に限れば, Levi の問題などの解決のためには, その考察を必要としなかったということもあり, すでに, Oka (1936, 1941) により,  $\mathbb{C}^n$  の領域の有理 (型) 凸性が論じられているにもかかわらず, その重要性が認識されることは少なかった。

20 世紀における多変数関数論の研究を方向付けた源流のひとつに Julia の予想 (1926) というものがあるが, それは, 正則関数族の Fatou 集合は正則領域であろう, というものであるが, この予想を解決するために, 正則凸性の概念が Cartan-Thullen (1932) によって導入された。そして,  $X$  を複素多様体,  $\mathcal{F}$  を  $X$  上の正則関数族とすると,  $\mathcal{F}$  の Fatou 集合  $D(\mathcal{F})$  の擬凸性が Barth (1971) によって証明され, したがって, Docquier-Grauert の定理 (1960) により,  $X$  が Stein 多様体であれば,  $D(\mathcal{F})$  は Stein である。これが, 長い間, Julia の予想の最終的な解決のように思われてきた。

しかし, Abe-Furushima (2000) は,  $X$  が Stein 多様体であれば,  $D(\mathcal{F})$  は単に Stein であるという以上に, もっと強く, 有理型  $\mathcal{O}(X)$ -凸であるという事実を証明した。逆に, Stein 多様体  $X$  の開集合  $D$  が有理型  $\mathcal{O}(X)$ -凸であれば,  $D(\mathcal{F}) = D$  なる  $X$  上の正則関数族  $\mathcal{F}$  が存在するので, これが Stein 多様体における Julia の予想の真の解決というべきものである。この特徴付けを得るために, Abe (2005) は, 被約 Stein 空間におけるひとつの有理型近似定理を証明し, 被約 Stein 空間  $X$  の開集合の有理型  $\mathcal{O}(X)$ -凸性を考察した。これらのことは, Stein 空間の構造の解明を目的とするとき, 開集合に対する有理型凸性や有理型  $\mathcal{O}(X)$ -凸性の概念の重要性と有用性を強く認識させるものである。

特異点をもつ一般の Stein 空間  $X$  に対する Levi の問題については, 長い年月の経過と多くの研究の存在にもかかわらず, 満足すべき十分な結果は知られてはいない。したがって, Stein 空間の構造の解明を目指すというだけで, すでに多くの困難が予想されるものであり, その研究は, この大きな問題を見つめながら進めて行くべきものである。

以上のような観点に立って, Stein 空間における有理型凸性に関連する解析的または幾何的性質についてのこれまでの研究をさらに発展させたのが今回の研究, およびその成果である。

研究代表者 阿部 誠

## 研究組織

研究代表者 阿部 誠 (熊本大学医学部准教授)

研究分担者 島 唯史 (広島大学大学院工学研究科准教授)

## 研究経費

	直接経費	間接経費	計
平成 18 年度	1,000,000 円	0 円	1,000,000 円
平成 19 年度	900,000 円	270,000 円	1,170,000 円
計	1,900,000 円	270,000 円	2,170,000 円

## 研究発表

### (1) 雑誌論文 (計 10 件)

#### 学術雑誌

1. Makoto ABE, *Polynomial convexity and strong disk property*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, Vol. 321, no. 1, pp. 32–36, 2006 査読有
2. Makoto ABE, *Open sets satisfying the strong meromorphic approximation property*, Toyama Mathematical Journal, Vol. 29, pp. 7–23, 2006 査読有
3. Makoto ABE, *Holomorphic line bundles and divisors on a domain of a Stein manifold*, Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze, Ser. 5, Vol. 6, no. 2, pp. 323–330, 2007 査読有
4. Mikio FURUSHIMA, Yasuhiro OHSHIMA, and Tadashi SHIMA, *Analytic compactifications of  $\mathbb{C}^2/\mathbb{D}$* , Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg, Vol. 77, pp. 155–168, 2007 査読有

#### 紀要

5. 阿部 誠・古島幹雄, 数学論文用クラスファイル kumajm.cls について, 熊本大学医学部保健学科紀要, Vol. 3, pp. 123–136, 2007 査読無

## 予稿集

6. Makoto ABE, *Meromorphic approximation in a Stein space*, Abstracts of Lectures Delivered at the 14th International Conference on Finite or Infinite Dimensional Complex Analysis and Applications, Hue, Vietnam, August 1–5, 2006, Hanoi University of Technology and Hue University, p. 30, 2006 査読無
7. 阿部 誠, 多項式凸性と強い円板的性質, 函数論分科会講演アブストラクト, 日本数学会 2006 年度秋季総合分科会, 大阪市立大学, 2006 年 9 月 19–22 日, pp. 25–26, 2006 査読無
8. 阿部 誠, Stein 多様体の領域上の正則直線束と因子, 函数論分科会講演アブストラクト, 日本数学会 2007 年度年会, 埼玉大学, 2007 年 3 月 27–30 日, pp. 53–54, 2007 査読無
9. 阿部 誠, Stein 空間における有理型近似定理, 函数論分科会講演アブストラクト, 日本数学会 2007 年度秋季総合分科会, 東北大学, 2007 年 9 月 21–24 日, pp. 53–54, 2007 査読無
10. 阿部 誠, 強い有理型近似性質をもつ領域について, 函数論分科会講演アブストラクト, 日本数学会 2007 年度秋季総合分科会, 東北大学, 2007 年 9 月 21–24 日, pp. 55–56, 2007 査読無

## (2) 学会発表 (計 8 件)

1. 島 唯史,  $\mathbb{C}^2/\mathbb{D}$  の解析的コンパクト化について, 複素解析セミナー, 九州大学, 福岡市中央区, 2006 年 6 月 26 日, 60 分
2. Makoto ABE, *Meromorphic approximation in a Stein space*, The 14th International Conference on Finite or Infinite Dimensional Complex Analysis and Applications, Hue University, Hue, Vietnam, 2006 年 8 月 1 日, 30 分
3. 阿部 誠, 多項式凸性と強い円板的性質, 日本数学会 2006 年度秋季総合分科会函数論分科会, 大阪市立大学, 大阪市住吉区, 2006 年 9 月 19 日, 10 分
4. 阿部 誠, Stein 多様体の領域上の正則直線束と因子, 日本数学会 2007 年度年会函数論分科会, 埼玉大学, さいたま市桜区, 2007 年 3 月 30 日, 10 分

5. Makoto ABE, *Strong disk property and the Bremermann problem on polynomial convexity*, Finland-Japan Joint Seminar on Analysis, University of Helsinki, Helsinki, Finland, 2007年8月28日, 25分
6. 阿部 誠, Stein 空間における有理型近似定理, 日本数学会 2007 年度秋季総合分科会函数論分科会, 東北大学, 仙台市青葉区, 2007年9月24日, 10分
7. 阿部 誠, 強い有理型近似性質をもつ領域について, 日本数学会 2007 年度秋季総合分科会函数論分科会, 東北大学, 仙台市青葉区, 2007年9月24日, 10分
8. 阿部 誠, Stein 多様体の領域上の正則直線束と因子, 平成 19 年度多変数関数論冬セミナー, 富山大学, 富山市, 2007年12月22日, 60分

(3) 図書 (計 0 件)

なし

研究成果による工業所有権の出願・取得状況

(1) 出願 (計 0 件)

なし

(2) 取得 (計 0 件)

なし

## 研究成果

以下は、Stein 空間における有理型凸性に関連する解析的または幾何的性質の研究に関して、平成 18–19 年度の期間内に得られた成果の概要である。角括弧 [ ] 内の数字は、添付資料の番号 (pp. 7–8) を表す。

- Stein 多様体  $X$  内の有理型凸開集合  $D$  は必ずしも強い円板的性質をもつわけではない。しかし、 $D$  がさらに単連結であれば、 $D$  は強い円板的性質をもつことを証明することができた [2, 3]。さらに、Duval (1991) または Nishino (1966, 2003) の結果を援用することにより、 $\mathbb{C}^n$  の開集合  $D$  の多項式凸性が、 $\mathbb{C}^n$  内の任意の複素直線  $L$  と  $D$  の共通部分  $D \cap L$  が単連結であるという性質によって特徴付けられるかどうかを問う Bremermann (1958) の問題も否定的に解決することができた。
- 複素直線  $\mathbb{C}$  の開集合についての強い形の Runge の有理近似定理に相当する性質を、一般の被約 Stein 空間  $X$  の開集合  $D$  について考え、それを強い有理型近似性質とよぶ。1 次元の Stein 空間  $X$  に対しては、任意の開集合がこの性質をもつことを証明した [4, 9]。一方、具体的な例を与えることにより、 $n \geq 2$  のとき、 $\mathbb{C}^n$  の有理凸開集合は、 $\mathbb{C}^n$  において必ずしも強い有理型近似性質をもつわけではないことを証明した [4, 9]。考察の対象を  $X = \mathbb{C}^n$  の場合に限定しても、 $\dim X \geq 2$  のときは、他の近似性質または擬凸性に関連する他の解析幾何的性質との関係を調べるとき、それらは全体としては複雑な様相を呈する。
- $n$  次元 Stein 多様体  $X$  の開集合  $D$  が、条件  $\dim H^k(D, \mathcal{O}) < +\infty$  ( $2 \leq k \leq n-1$ ) をみたすとき、 $D$  の Stein 性を、標準的な写像  $\text{Div}(D) \rightarrow \text{Pic}(D)$  の全射性などによって特徴付けた [5, 7, 10]。その証明において、必ずしも被約でない Cohen-Macaulay Stein 空間の考察が必要になる。これは、論文

Makoto ABE, *Holomorphic line bundles on a domain of a two-dimensional Stein manifold*, Annales Polonici Mathematici, Vol. 83, no. 3, pp. 269–272, 2004

で得られた  $n = 2$  の場合の結果の高次元化であるとともに、Ballico (2006) の定理も特別の場合として含む。

- 有理型関数についての Levi の接続定理が成り立たない被約複素空間の具体的な例 ( $\mathbb{C}^4$  の解析的集合) を与えた [6]

- Stein 多様体  $X$  の開集合  $D$  について,  $D$  が  $X$  上のある正則関数族  $\mathcal{F}$  の Fatou 集合であることは,  $D$  が有理型  $\mathcal{O}(X)$ -凸であること, また,  $D$  が Stein かつ有理型近似性質をみたすことによって特徴付けられることを, すでに, 論文

Makoto ABE and Mikio FURUSHIMA, *On the meromorphic convexity of normality domains in a Stein manifold*, Manuscripta Mathematica, Vol. 103, no. 4, pp. 447–453, 2000

Makoto ABE, *Meromorphic approximation theorem in a Stein space*, Annali di Matematica Pura ed Applicata, Ser. 4, Vol. 184, no. 2, pp. 263–274, 2005

において証明したが, この有理型近似性質は, 複素直線  $\mathbb{C}$  の開集合についていえば, 弱い形の Runge の有理近似定理である。この特徴付けを得るために, Weil-Oka の有理近似定理の一般化であるところの被約 Stein 空間における有理型近似定理を証明し, それを用いたが, 一方, Hirschowitz (1971) による Stein 多様体における別の形の有理型近似定理が存在する。Coltoiu (1999) により, ふたつの有理型近似定理は  $\text{Hom}(H_2(X, \mathbb{Z}), \mathbb{Z}) = 0$  なる Stein 多様体  $X$  に対しては同じ主張であるが, 一般の被約 Stein 空間  $X$  に対してはそうではない。これらを被約 Stein 空間  $X$  において, Picard 群  $\text{Pic}(X)$  の部分半群  $G$  に関する一般化された有理型近似定理として統合することに成功した [ 1, 8, 12 ]

- $G$  を一般線形群  $GL(2, \mathbb{C})$  の小型有限部分群とするとき, 商空間  $\mathbb{C}^2/G$  の極小正規解析的コンパクト化における境界  $C$  の重みつき双対グラフの分類に関して, 論文

Makoto ABE, Mikio FURUSHIMA, and Mitsuhiro YAMASAKI, *Analytic compactifications of  $\mathbb{C}^2/G$* , Kyushu Journal of Mathematics, Vol. 54, no. 1, pp. 87–101, 2000

Makoto ABE, Mikio FURUSHIMA, and Tadashi SHIMA, *Analytic compactifications of  $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_n$* , Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg, Vol. 74, pp. 223–235, 2004

に引き続き, 最後に残された  $G = \mathbb{D}$  (2面体群) の場合を考察し, 分類を完成させた [ 11 ]

## 添付資料

1. Makoto ABE, *Meromorphic approximation in a Stein space*, Abstracts of Lectures Delivered at the 14th International Conference on Finite or Infinite Dimensional Complex Analysis and Applications, Hue, Vietnam, August 1–5, 2006, Hanoi University of Technology and Hue University, p. 30, 2006
2. Makoto ABE, *Polynomial convexity and strong disk property*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, Vol. 321, no. 1, pp. 32–36, 2006
3. 阿部 誠, 多項式凸性と強い円板的性質, 函数論分科会講演アブストラクト, 日本数学会 2006 年度秋季総合分科会, 大阪市立大学, 大阪, 2006 年 9 月 19–22 日, pp. 25–26, 2006
4. Makoto ABE, *Open sets satisfying the strong meromorphic approximation property*, Toyama Mathematical Journal, Vol. 29, pp. 7–23, 2006
5. 阿部 誠, Stein 多様体の領域上の正則直線束と因子, 函数論分科会講演アブストラクト, 日本数学会 2007 年度年会, 埼玉大学, さいたま, 2007 年 3 月 27–30 日, pp. 53–54, 2007
6. 阿部 誠・古島幹雄, 数学論文用クラスファイル kumajm.cls について, 熊本大学医学部保健学科紀要, Vol. 3, pp. 123–136, 2007
7. Makoto ABE, *Holomorphic line bundles and divisors on a domain of a Stein manifold*, Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze, Ser. 5, Vol. 6, no. 2, pp. 323–330, 2007
8. 阿部 誠, Stein 空間における有理型近似定理, 函数論分科会講演アブストラクト, 日本数学会 2007 年度秋季総合分科会, 東北大学, 仙台, 2007 年 9 月 21–24 日, pp. 53–54, 2007
9. 阿部 誠, 強い有理型近似性質をもつ領域について, 函数論分科会講演アブストラクト, 日本数学会 2007 年度秋季総合分科会, 東北大学, 仙台, 2007 年 9 月 21–24 日, pp. 55–56, 2007
10. 阿部 誠, Stein 多様体の領域上の正則直線束と因子, 平成 19 年度多変数関数論冬セミナー, 富山大学, 富山, 2007 年 12 月 22–24 日, 配布資料



11. Mikio FURUSHIMA , Yasuhiro OHSHIMA , and Tadashi SHIMA , *Analytic compactifications of  $\mathbb{C}^2/\mathbb{D}$*  , Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg, Vol. 77 , pp. 155–168 , 2007
12. Makoto ABE , *Meromorphic approximation in a Stein space* , プレプリント
13. Abstracts of Research project , Grant-in-Aid for Scientific Research( 2007 ) , 提出予定