Stein 多様体の領域上の正則直線束と因子

阿部 誠*

2007 年 12 月 22 日

被約複素空間 D 上の Cartier **因子**とは，切断 $\mathfrak{d} \in (\mathscr{M}^*/\mathscr{O}^*)(D)$ のことである．D 上の Cousin-II 分布 $\{(U_i, m_i)\}_{i\in I}$ によって定義される Cartier 因子 $\mathfrak{d}$ に対し，コサイクル $\{m_i/m_j\} \in Z^1(\{U_i\}_{i\in I}, \mathscr{O}^*)$ によって定義される D 上の正則直線束を $[\mathfrak{d}]$ と書く．Cartier 因子は，正則 Cousin-II 分布によって定義されるとき，**正**（positive）であるという．

D が被約 Stein 空間のとき，Cartan の定理 B により，D 上の任意の正則直線束 L に対し，D の任意の既約成分上で恒等的には 0 でないような切断 $s \in \Gamma(D, \mathscr{O}(L))$ が存在する（Gunning [9, p. 124]）．このとき，$L = [\operatorname{div}(s)]$ と書けて，$\operatorname{div}(s)$ は D 上の正因子である．

複素空間 $(X, \mathscr{O}_X)$ は，任意の $x \in X$ に対し，局所環 $\mathscr{O}_{X,x}$ が Cohen-Macaulay であるとき，Cohen-Macaulay **空間**であるという．

定理 1（Abe [2, Theorem 4.1]）．$(X, \mathscr{O}_X)$ を（必ずしも被約でない）純 n 次元 Cohen-Macaulay Stein 空間，D を X の開集合とし，次の 2 条件を仮定する．

i）$H^k(D, \mathscr{O}_X|_D) = 0 \quad (2 \leqq k \leqq n-1)$．

ii）D 上の正則直線束 L が，標準的な準同型の合成

$$H^1(D, \mathscr{O}_X|_D) \to H^1(D, \mathscr{O}) \to H^1(D, \mathscr{O}^*)$$

の像に属するならば，D 上の Cartier 因子 $\mathfrak{d}$ が存在して，$L = [\mathfrak{d}]$（ただし，$\mathscr{O} := (\mathscr{O}_X/\mathscr{N}_X)|_D$ は D の被約複素構造層）．

このとき，D は任意の $x \in \partial D \setminus \operatorname{Sing}(X, \mathscr{O}_X)$ において局所 Stein である．

注意 2（Abe [2, Remark 4.2]）．定理 1 の条件 i）は，次の条件 i)′ と同値である．

i)′ $\dim H^k(D, \mathscr{O}_X|_D) \leqq \aleph_0 \quad (2 \leqq k \leqq n-1)$．

Docquier-Grauert [7] により，Stein 多様体 X の開集合 D について，

$$D \text{ が Stein} \Leftrightarrow D \text{ が局所 Stein}$$

* 〒 862-0976 熊本市九品寺 4-24-1 熊本大学医学部保健学科

であるから，次のことが成り立つ．

定理 3（Abe [2, Theorem 4.3]）．X を n 次元 Stein 多様体とする．このとき, 条件

$$H^k(D, \mathscr{O}) = 0 \quad (2 \leqq k \leqq n-1)$$

をみたす X の開集合 D について，次の 4 条件は同値である．

（1）D は Stein である．
（2）D 上の任意の正則直線束 L に対し，D 上の正因子 $\mathfrak{d}$ が存在して，$L = [\mathfrak{d}]$.
（3）D 上の任意の正則直線束 L に対し，D 上の因子 $\mathfrak{d}$ が存在して，$L = [\mathfrak{d}]$.
（4）D 上の位相的に自明な任意の正則直線束 L に対し，D 上の因子 $\mathfrak{d}$ が存在して，$L = [\mathfrak{d}]$.

系 4（Abe [1, Theorem 3]）．2 次元 Stein 多様体 X の開集合 D について，定理 3 の 4 条件は同値である．

系 5（Ballico [4, Theorem 1]）．X を Stein 多様体，$\varphi : X \to \mathbb{R}$ を $\mathscr{C}^2$ 級弱 2-凸関数（Andreotti-Grauert の意味）とする．このとき，開集合 $D := \{\varphi < c\}$（$c \in \mathbb{R}$）について，定理 3 の 4 条件は同値である．

次のような Serre の定理 [14, p. 65] の一般化については，もっとよい結果が知られている．

系 6（Laufer [12, Theorem 4.1]）．n 次元 Stein 多様体 X の開集合 D について，次の 2 条件は同値である．

（1）D は Stein である．
（2）$H^k(D, \mathscr{O}) = 0 \quad (1 \leqq k \leqq n-1)$

$n \geqq 3$ のとき，定理 3 の 4 条件は無条件には同値でない．例えば，次の命題の D は Stein ではないが，X が Stein 多様体のとき，定理 3 の条件 (2) をみたす．

命題 7（Shiffman [15, p. 340]）．X を $\dim X \geqq 3$ なる複素多様体，T を $\operatorname{codim} T \geqq 3$ なる X の解析的集合とする．このとき，$D := X \setminus T$ 上の任意の正則直線束 L に対し，D 上の正則直線束 L' が存在して，$L'|_D = L$.

定理 1 の証明は次元 n に関する数学的帰納法による．$n = 2$ の場合は，以下の補題 8，9 に基き，Kajiwara-Kazama [10, Lemma 2]，Grauert-Remmert [8, Satz 7]，Levi の拡張定理（Kajiwara-Sakai [11, Proposition 3]）を用いる．

なお，$X = \mathbb{C}^n$ の場合に限定すれば，Lelong [13, p. 201] により，証明は簡略化できるが，一般の被約 Stein 空間に対して Lelong の定理を一般化することはでき

ない（Coltoiu-Diederich [6]，Brenner [5]）．

次の補題 8，9 において，$M := \Delta^2 \setminus \{(0,0)\}$，$U_\nu := \Delta^2 \setminus \{z_\nu = 0\}$（$\nu = 1, 2$）．ただし，$\Delta$ は単位円板である．

補題 8（Ballico [3, Remark 1.4]）．M 上の正則直線束 L に対し，次の 2 条件は同値である．

（1）L は自明（holomorphically trivial）である．
（2）M 上の因子 $\mathfrak{d}$ が存在して，$L = [\mathfrak{d}]$.

補題 9．関数 $h \in \mathscr{O}(U_1 \cap U_2)$ について，次の 2 条件は同値である．

（1）$\mathrm{e}^h \in \mathscr{O}^*(U_1 \cap U_2)$ の定める M 上の正則直線束は自明である．
（2）h の $(0,0)$ を中心とする Laurent 展開は $cz_1^{-m_1} z_2^{-m_2}$（$m_1 > 0,\ m_2 > 0,\ c \neq 0$）の形の項をもたない．

補題 10（Abe [2, Lemma 3.2]）．D を $\mathbb{C}^n$ の開集合，H を $\mathbb{C}^n$ の超平面とする．このとき，D 上の任意の Cartier 因子 $\mathfrak{d}$ に対し，D 上の Cartier 因子 $\mathfrak{c}$ が存在して，台 $|\mathfrak{c}|$ は $Z := D \cap H$ において疎（nowhere dense），かつ $[\mathfrak{d}]|_Z = [\mathfrak{c}|_Z]$.

補題 8 は次の命題から直ちに得られる．

命題 11．X を $\dim X \geqq 2$ なる複素多様体，T を $\operatorname{codim} T \geqq 2$ なる X の解析的集合とする．このとき，$D := X \setminus T$ 上の任意の Cartier 因子 $\mathfrak{d}$ に対して，X 上の Cartier 因子 $\mathfrak{d}'$ が存在して，$\mathfrak{d}'|_D = \mathfrak{d}$.

一般の被約 Stein 空間 X の開集合 D について，定理 3 に相当することが正しいかどうかについては未解決であるが，定理 3 よりも詳しく，次のことが成り立つ．

定理 12．$\operatorname{Sing}(X)$ が離散的，かつ任意の $x \in \operatorname{Sing}(X)$ が商特異点であるような，n 次元 Stein 空間 X を考える．このとき，条件

$$H^k(D, \mathscr{O}) = 0 \quad (2 \leqq k \leqq n-1)$$

をみたす X の開集合 D について，定理 3 の 4 条件は同値である．

系 13．任意の $x \in \operatorname{Sing}(X)$ が商特異点であるような 2 次元 Stein 空間 X の開集合 D について，定理 3 の 4 条件は同値である．

参考文献

[1] Abe, M.: Holomorphic line bundles on a domain of a two-dimensional Stein manifold. Ann. Polon. Math. **83**, 269–272 (2004)

[2] Abe, M.: Holomorphic line bundles and divisors on a domain of a Stein manifold. Ann. Scuola Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5) **6**, 323–330 (2007)

[3] Ballico, E.: Holomorphic vector bundles on $\mathbf{C}^2 \setminus \{0\}$. Israel J. Math. **128**, 197–204 (2002)

[4] Ballico, E.: Cousin I condition and Stein spaces. Complex Var. Theory Appl. **50**, 23–25 (2005)

[5] Brenner, H.: A class of counter-examples to the hypersection problem based on forcing equations. Arch. Math. (Basel) **82**, 564–569 (2004)

[6] Coltoiu, M., Diederich, K.: Open sets with Stein hypersurface sections in Stein spaces. Ann. of Math. (2) **145**, 175–182 (1997)

[7] Docquier, F., Grauert, H.: Levisches Problem und Rungescher Satz für Teilgebiete Steinscher Mannigfaltigkeiten. Math. Ann. **140**, 94–123 (1960)

[8] Grauert, H., Remmert, R.: Konvexität in der komplexen Analysis. Nicht-holomorph-konvexe Holomorphiegebiete und Anwendungen auf die Abbildungstheorie. Comment. Math. Helv. **31**, 152–183 (1956)

[9] Gunning, R.C.: Introduction to holomorphic functions of several variables, vol. 3. Wadsworth, Belmont (1990)

[10] Kajiwara, J., Kazama, H.: Two dimensional complex manifold with vanishing cohomology set. Math. Ann. **204**, 1–12 (1973)

[11] Kajiwara, J., Sakai, E.: Generalization of Levi-Oka's theorem concerning meromorphic functions. Nagoya Math. J. **29**, 75–84 (1967)

[12] Laufer, H.B.: On sheaf cohomology and envelopes of holomorphy. Ann. of Math. **84**, 102–118 (1966)

[13] Lelong, P.: Domaines convexes par rapport aux fonctions plurisousharmoniques. J. Analyse Math. **2**, 178–208 (1952)

[14] Serre, J.P.: Quelques problèmes globaux relatifs aux variétés de Stein. In: Centre belge de Recherches mathématiques (ed.) Colloque sur les fonctions de plusieurs variables tenu à Bruxelles du 11 au 14 mars 1953, pp. 57–68. Librairie universitaire, Louvain (1954)

[15] Shiffman, B.: Extension of positive line bundles and meromorphic maps. Invent. Math. **15**, 332–347 (1972)