

○正 公文誠 学 鷲崎亮太 学 佐藤潤一

正 水本郁朗 正 岩井善太 (熊本大学)

Makoto KUMON, Ryota WASHIZAKI, Junichi SATO,

Ikuro MIZUMOTO and Zenta IWAI, Kumamoto University

Key Words: Synchronization, Speed Gradient Energy Method, Phase Model

1 はじめに

同一のプロセスが繰り返されるリズム現象は、振り子の振動や化学反応、あるいは生物の体内時計のように数多く知られている。特に非線形振動子同士がある種の相互作用を持つ時、同期して振動する現象は「引き込み」と呼ばれ、数理的な研究が盛んに行われている。生物の体内時計が太陽の運動に同期して概日リズムを生じて生命活動に役立っていることや、神経振動子群のモデルを用いることで柔軟な歩行運動を生成できる可能性が指摘されるなど、同期現象は基礎的な興味に留まらず種々の応用が期待されている。制御理論の立場からも Fradkov[1, 2]らは振動子の同期をエネルギー制御によって実現できることを指摘している。この手法は十分に小さな制御入力によって制御目的を達成し、系の特徴を利用した有用な方法である。しかしながら、Fradkovらの研究では振動子の同期の機序について十分に考察されているとは言い難い。そこで本研究では位相モデル [3] を用いて系を縮約し、制御系の同期についての詳細を明らかにする。

2 制御対象・制御アルゴリズム

本研究の対象とする系は図1に示すような弱いバネで結合された2つの振子系である。以下左側の振子を1系、右側を2系と呼び、それぞれの振子の鉛直下方向からの時計回りの回転角 $\phi_{1,2}$ および角速度 $\dot{\phi}_{1,2}$ を計測できるものとする。また制御入力としてトルク τ [Nm] を1系に加えることができる。系の物理パラメータの具体的な値は表1にまとめた。

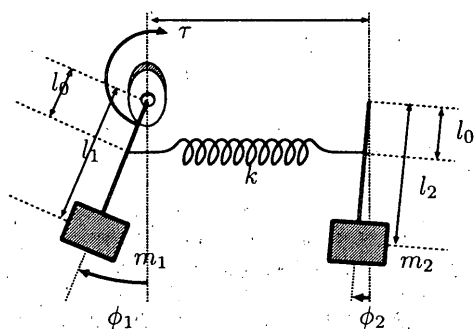


Figure 1: Coupled Oscillators

Table 1: Parameters

$m_{1,2}$	$l_{1,2}$	l_0	k
0.3[kg]	0.12[m]	0.02[m]	80[N/m]

系のダイナミクスは以下で与えられる。

$$\begin{aligned} J_1 \dot{\phi}_1 + m_1 g l_1 \sin \phi_1 &= -k l_0^2 f(\phi_1, \phi_2) \cos \phi_1 + \tau \\ J_2 \dot{\phi}_2 + m_2 g l_2 \sin \phi_2 &= k l_0^2 f(\phi_1, \phi_2) \cos \phi_2 \\ f(\phi_1, \phi_2) &= \sin \phi_1 - \sin \phi_2 \end{aligned} \quad (1)$$

ここで $J_{1,2}$ は慣性モーメント、 g は重力加速度を表わす。

今小さな入力 τ によって2つの振子を同期して振動させるという制御目的を考える。制御入力 τ が十分に小さい場合、系全体の力学的エネルギー H [J] を運動の特徴量として考えることができ、また2つの振子が同一の振動数で振動する時振子が同期していると考えられることから、Fradkovら [1] は小さな入力 τ で次の目的関数 $Q(x(t))$ を0に近づける制御系を設計することを制御目的と設定した。

$$Q(x(t)) = \alpha(H(x(t)) - H_*)^2 + (1 - \alpha)(\phi_1 - \phi_2)^2 \quad (2)$$

ここで α は $0 < \alpha < 1$ となる数である。Fradkovらはこの目的を達成する制御入力 τ として Speed Gradient Energy 法 (以下 SGE 法) [2] を用いて次のように与えている。

$$\tau = -\gamma[\alpha(H(x(t)) - H_*)\dot{\phi}_1 + (1 - \alpha)(\dot{\phi}_1 - \dot{\phi}_2)] \quad (3)$$

ただし γ は正の定数。系のエネルギーのみを制御する場合 ($\alpha = 1$)、任意の $\gamma > 0$ に対して $H(x(t)) \rightarrow H_*(t \rightarrow \infty)$ を示すことができる。ただし、摩擦が存在する場合 γ は任意に小さくすることは出来ない。数値計算や実験などではこの手法によってうまく同期制御が実現されることが報告されており [1]、著者らも確認している。そこで以下では同期が実現される仕組みを考察する。

3 位相モデルによる解析

非線形振動子群の同期現象を振動子の位相に注目してダイナミクスを縮約する手法がある [3]。そこで前節で設計された制御系の位相ダイナミクスを考え、振子の同期の構造を調べることにする。適当な γ, α のもとで、制御入力 τ およびバネの結合力が十分に小さく、エネルギー制御が適切に行われている ($H(x(t)) \approx H_*$) と仮定する。この時振子1, 2は $(\phi_i, \dot{\phi}_i)$ 平面内の楕円様のリミットサイクルに漸近する。そこで振子 i の位相として

$$\theta_i = \text{Atan2}(\omega_i \phi_i, \dot{\phi}_i) \quad (4)$$

を考える。ただし $\omega_i = \sqrt{\frac{m_i g l_i}{J_i}}$ である。 ϕ_i がリミットサイクルに十分に近い時

$$\phi_i(\theta_i) \approx a \cos(\theta_i), \quad (5)$$

$$\dot{\phi}_i = \pm \sqrt{\frac{2m_i g l_i}{J_i}} \{ \cos(\phi_i(\theta_i)) - \cos a \}$$

$$a = \text{Acos} \left(1 - \frac{H_*}{(m_1 l_1 + m_2 l_2) g} \right)$$

と近似できる。 ϕ_i にダイナミクスがあるので θ_i にもダイナミクスがあり次のように計算できる。

$$\dot{\theta}_i = \text{grad}_{(\phi_i, \dot{\phi}_i)} \theta_i \cdot \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \phi_i \\ \dot{\phi}_i \end{pmatrix} \quad (6)$$

式(1)(3)を(6)に代入し、 ϕ_i が θ_i の関数として近似できること(5)を利用して整理すると θ_i について閉じた形式のダイナミクスを得ることが出来る。これを

$$\dot{\theta}_i = \Theta_i(\theta_i, \theta_j) \quad (i, j = 1, 2 \quad i \neq j) \quad (7)$$

と書くことにする。

さて、 $Q(x(t))$ の定義から $\phi_1 \equiv \phi_2$ となるのが制御目的の一つであるが、これは θ_i について $\theta_1 \equiv \theta_2$ となることと同等である。そこで以下 $\theta_1 - \theta_2 = 0$ となる $\theta_{1,2}$ の点について考察する。ここで、考察している点の近くの全ての点で $(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2)(\theta_1 - \theta_2) < 0$ となる場合、位相差 $\theta_1 - \theta_2$ は安定となる。このことを数値的に求めた結果を図2に示す。図中○は安定な点、×は安定でない点を示す。 $\theta_1 = \theta_2$ となる運動に注目すると、安定な点と安定でない点が複雑に入り組んでおり制御目的が完全に達成できないことが予想される。

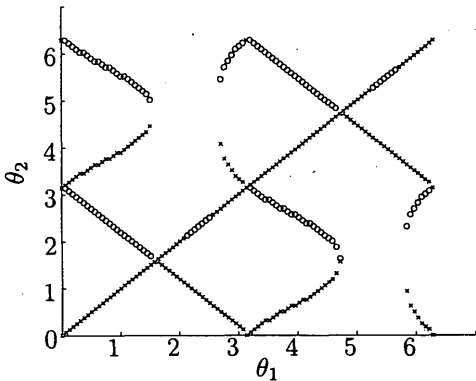


Figure 2: Stability ($\gamma = 0.5, \alpha = 0.95$)

しかしながら同期の定義を、振子が同一の振動数や振動周期を有すること考えた場合、この系は同期を実現することが可能である。以下このことを示すため、振子の1周期に渡る位相差の平均的な変化率を考える。ここで位相差の平均的な変化率とは、振子1が1周期振動する間の $\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2$ の時間平均と定義し $\overline{\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2}$ と表わす。また入力およびバネによる相互作用が十分に小さい時、振子1と振子2の位相差 $d \equiv \theta_1 - \theta_2$ は急激に変化しないと考えられる。そこで考えている時間区間において d を定数で近似して $\overline{\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2}$ を計算すると

$$\begin{aligned} \overline{\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2} &= \frac{1}{2\pi} \int_{\theta_1(t)}^{\theta_1(t)+2\pi} (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) d\theta_1 \\ &\approx \frac{1}{2\pi} \int_{\theta_1(t)}^{\theta_1(t)+2\pi} (\Theta_1(\theta_1, \theta_1 + d) - \Theta_2(\theta_1 + d, \theta_1)) d\theta_1 \end{aligned} \quad (8)$$

と d の関数として与えられる。一方 $\overline{\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2}$ は d の変化を示す量でもあるので、式(8)を用いて先程と同様に安定性を判断することができる。つまり、 $\overline{\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2} = 0$ となる d の近くで $\overline{\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2} d > 0$ となる点は安定な点と考えられる。数値的に求めた結果を図3に示す。図より $d=0$ つまり $\theta_1 = \theta_2$ となる点が安定になっていることがわかる。

以上より、制御目的として掲げた各時刻における振子の角速度を一致させることは困難であるが、振子の振動数を一致させることを期待出来ることが示された。

4 数値例

前節の結果を有効性を確認するため、数値計算を行った。制御器のパラメータは $H_* = 0.1, \alpha = 0.95, \gamma = 0.5$ とし、 $\phi_1 = 0.01[\text{rad}], \phi_2 = 0[\text{rad}]$ の姿勢で静止させた状

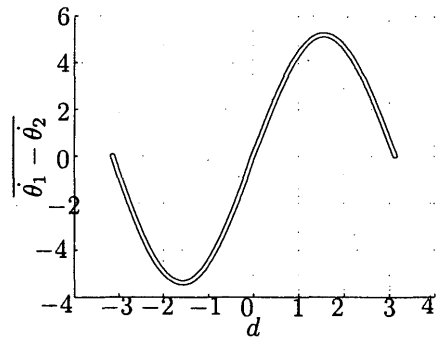


Figure 3: Stability ($\gamma = 0.5, \alpha = 0.95$)

態を初期状態とした。以下の図4,5,6がそれぞれ ϕ_1, ϕ_2, H の時間変化である。入力が小さいので H は H_k に近づくのにかかっているが(図6)、図4,5より分かるように振子 ϕ_1, ϕ_2 の同期は達成されていることがわかり前節の結果が確認された。

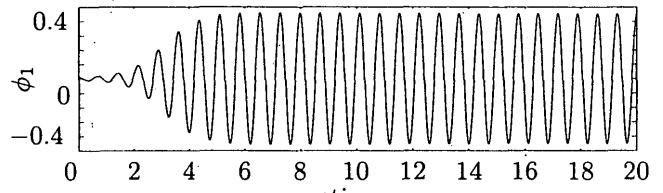


Figure 4: ϕ_1 vs t

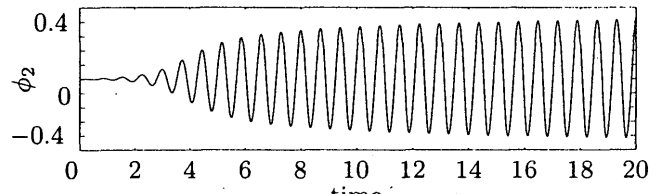


Figure 5: ϕ_2 vs t

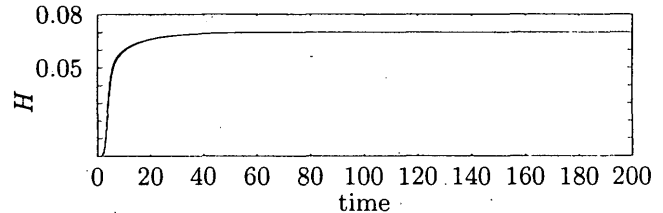


Figure 6: H vs t

5 おわりに

本研究では弱いバネで結合された振子系を、小さな入力によって同期して振動させる制御系を考察した。位相モデルによって同期の仕組みを数値的に解析した結果、振動周期が一致することが示され、数値例によって確認された。紙幅の都合で割愛したが、実際の実験の様子については当日発表の予定である。

References

- [1] Andrievsky Boris and Fradkov Alexander. Feedback resonance in single coupled 1-dof oscillators. *Int. J. Bifurcation Chaos Appl. Sci. Eng.*, 9(10):2047-2057, 1999.
- [2] Fradkov Alexander and Pogromsky Alexander. *Introduction to control of oscillations and chaos*. World Scientific, 1998.
- [3] 蔵本由紀他. バターン形成. 朝倉書店, 1991.