

## 高密度ポリエチレンの曲げクリープ解析と実験的検討\*

廣江 哲幸<sup>\*1</sup>, 松尾 日出男<sup>\*2</sup>  
藤原 和人<sup>\*1</sup>, 津田 康紀<sup>\*3</sup>Numerical and Experimental Study on Creep Behavior of Beams  
for High Density PolyethyleneTetsuyuki HIROE<sup>\*4</sup>, Hideo MATSUO,  
Kazuhito FUJIWARA and Yasunori TSUDA<sup>\*\*</sup> Kumamoto University, Dept. of Mechanical Engineering & Materials Science,  
Kurokami 2-39-1, Kumamoto, 860-8555 Japan

The previous monotonic compressive loading tests for high-density polymers including polyethylene, revealed that the inelastic deformation behavior of these engineering plastics is remarkably rate-dependent at room temperature. The viscoplastic constitutive theory based on overstress had reproduced such deformation of the polymers successfully. In this study the overstress model is applied to analyze the creep behavior of polyethylene beams at 25°C subjected to a linearly increasing moment which is subsequently held constant. The numerical experiments show the significant loading rate effects, illustrating that the stress distribution at the moment increase depends on the moment rate. Such rate effects disappear with time when stresses are redistributed and reach equilibrium stress curve. In order to verify the numerical results, four-point bending tests are performed for polyethylene beams and the time-histories of curvatures obtained experimentally from surface-strain measurements show a fairly good correspondence with the numerical results.

**Key Words:** Creep, Bending, Constitutive Equation, High-Density Polyethylene, Numerical Analysis, Material Testing

## 1. 緒 言

近年、高分子材料に構造材としての機能も要求されるようになってきていることから、今後、金属材料と同程度の高精度変形解析が必要になることも考えられ、また高分子材料の構成式に関する研究<sup>(1),(2)</sup>も行われるようになった。そこで著者らは、高密度ポリエチレンを含む代表的なエンジニアリングプラスチックを対象とし、これまで主として鉄鋼材料の非弾性解析で用いた過大応力に基づく粘塑性構成式モデル<sup>(3)(4)~(6)</sup>の適用性について検討<sup>(7)(8)</sup>してきた。これら高分子材料の単調圧縮実験では、常温域での時間・温度換算特性など高分子材料特有の時間依存性<sup>(8)</sup>を見出したが、金属材料の高温域での非弾性挙動との類似点も多く、単調負荷に対しては本構成式モデルによる数値シミュレーションが有効であることが確認<sup>(7)</sup>できた。

本研究では、一様単軸負荷の応答解析で実績のある高密度ポリエチレン<sup>(7)</sup>を対象として、基本的な構造要素であるはりの曲げクリープ解析<sup>(4)(5)(9)</sup>を実施した。

また得られた数値解析結果を実験的に検証するために25°Cでポリエチレン製はりの四点曲げ・クリープ実験を行った。

2. はりの曲げクリープ解析モデルと  
平衡解

**2-1 解析モデル** 高密度ポリエチレンを対象として本研究で用いた単軸応力状態での過大応力構成式モデル<sup>(6)~(8)</sup>は次の式(1)のような応力 $\sigma$ とひずみ $\epsilon$ の関係式で表すことができる。ここで $g$ :平衡応力関数、 $X$ :過大応力、 $K$ :粘性関数、 $\beta$ :粘性制御関数、 $E$ :縦弾性係数、 $\dot{\cdot}$ :時間 $t$ の微分であり、 $[ ]$ 内は関数の変数を示す。

$$\dot{\epsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \frac{X}{E \cdot K[X, \beta[\epsilon]]}, \quad X = \sigma - g[\epsilon] \quad \dots\dots\dots (1)$$

また、本研究では図1のようなはりモデルを考える。Eulerのはり理論より、図1のような純曲げ状態にあり断面が対称軸を有するはりにおいて長手方向のひずみは曲率 $\gamma$ と中立軸からの距離 $y$ を用いて次式で表される。

$$\epsilon[y, t] = y \cdot \gamma[t] \quad \dots\dots\dots (2)$$

また、はりには軸力が働かないので、

\* 原稿受付 1999年1月27日。

<sup>\*1</sup> 正員, 熊本大学工学部(☎860-8555 熊本市黒髪2-39-1)。<sup>\*2</sup> 熊本大学工学部。<sup>\*3</sup> 熊本大学大学院。

E mail: hiroe@gpo.kumamoto-u.ac.jp

$$\int_{-y_2}^{y_1} \sigma[y, t] b[y] dy = 0 \quad (3)$$

となり、モーメントと応力の釣合いは次式のように表される。

$$M[t] = \int_{-y_2}^{y_1} y \sigma[y, t] b[y] dy \quad (4)$$

式(1)と式(2), (3)を時間微分した式とを組み合わせると次式を得る ( $I$  は断面二次モーメントを示す)。

$$\dot{\gamma} = \frac{1}{EI} \int_{-y_2}^{y_1} y \frac{X}{K[X, \beta[\varepsilon]]} b dy + \frac{\dot{M}}{EI} \quad (5)$$

式(1)を微分して式(1), (4)を代入すると次式を得る。

$$\begin{aligned} \dot{\sigma} = & \frac{y}{I} \int_{-y_2}^{y_1} y \frac{X}{K[X, \beta[\varepsilon]]} b dy \\ & + \frac{\dot{M}}{I} y - \frac{X}{k[X, \beta[\varepsilon]]} \quad (6) \end{aligned}$$

以上からはりの挙動は式(3), (5), (6)によって決定される[式(3)は中立軸の決定に用いる]。

また曲げクリープの負荷条件は次のように設定する。

$$\begin{aligned} t=0: & \gamma = \sigma = 0, \quad t_0 > t > 0: \dot{M} = \text{const} \\ t \geq t_0: & \dot{M} = 0 (M = M_0) \end{aligned}$$

次にはりの断面が中立軸に関して対称形の場合(高さ:  $2h$ )について考える。このとき式(5)は部分積分により次式のように表すことができる。

$$\dot{\gamma} = \frac{\dot{M}}{EI} + \frac{1}{EI} \frac{M - G}{K} \quad (7)$$

ここで、各関数は次式のようにになっている。

$$\frac{1}{K} = \frac{2}{K[\sigma[y_1] - g[\gamma y_1], \beta[\gamma y_1]]} \quad (8 \cdot a)$$

$$G = Me + \bar{K}F \quad (8 \cdot b)$$

$$\begin{aligned} F = & 2 \int_0^h \left\{ \int_0^y y (\sigma - g[\varepsilon]) b dy \right\} \\ & \times \frac{d}{dy} \left( \frac{1}{K[\sigma - g[\varepsilon], \beta[\varepsilon]]} \right) dy \quad (8 \cdot c) \end{aligned}$$

$$Me = 2 \int_0^h y g[\varepsilon] b dy \quad (8 \cdot d)$$

Table 1 Analogy between eqs. (1) and (7)

Uniaxial loading	$\sigma$	$\varepsilon$	$E$	$g$	$K$
Beam bending	$M$	$\gamma$	$EI$	$G$	$\bar{K}$

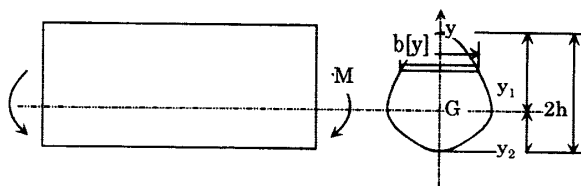


Fig. 1 Beam bending model

式(7)を、単軸の構成式(1)と比較してみると、表1に示すような対応があることがわかる。

このことからはりの粘塑性挙動の解析結果は単軸での挙動と類似していると予想することができる。例えば、 $G$  は応力が平衡応力に漸近する ( $\sigma \rightarrow g$ ) に伴い  $Me$  に漸近する ( $G \rightarrow Me$ )。したがって、式(8・b)中の  $Me$  は単軸での平衡応力  $g$  に対応するはりの平衡モーメントと考えることができる。

2.2 クリープ変形の平衡解 単軸応力の場合、式(1)より、次の式(9)または式(10)の条件下で各々平衡状態があることがわかる。

$$\sigma = g[\varepsilon] \quad (9)$$

$$\sigma_0 - g[\varepsilon] = \text{const} \quad (10 \cdot a)$$

$$\beta[\varepsilon] = \text{const} \quad (10 \cdot b)$$

式(9)の場合、過大応力は零になり、応力、ひずみ速度が零の平衡状態になる。また、式(10)の場合、過大応力と粘性制御関数が一定で定常クリープの平衡状態となる。このとき  $g[\varepsilon] = \text{const}$ , (または  $dg/d\varepsilon = g' = 0$ ) および  $d\beta/d\varepsilon = \beta' = 0$  である。

対称断面はりの曲げクリープの場合、仮に式(9)が全断面で成立し、 $\dot{\gamma} = \dot{M} = 0$  の平衡状態のとき式(7)、式(8)より式(11)を得、さらにクリープ状態での式(7)の積分形式(12)よりこの平衡状態に到達する理論時間は無限長であることがわかる。

$$M = G = Me \quad (11)$$

$$EI \int_{\gamma_0}^{\gamma} \frac{d\gamma \bar{K}}{M_0 - G} = t - t_0 \quad (12)$$

一方定常曲げクリープ状態  $\dot{\gamma} = \text{const}$  では全断面で式(10)が成立する必要がある、あるひずみを超えると  $g' = 0, \beta' = 0$  と同等である。このとき  $Me$  は変形が大きくなると塑性関節モーメントに対応する  $M_\infty$  に近づき  $M_0 > M_\infty$  で定常クリープの平衡状態が実現することになる。ただし本研究対象の高密度ポリエチレンでは式(10)を満足する材料データは得られていない。

### 3. 数値解析

3.1 ガウス積分近似による数値解析法 数値解析対象のはりを矩形断面はり(幅:  $b$ , 高さ:  $2h$  かつ  $b = h$ )とし、各変数を次のように無次元化する。

$$\bar{y} = y/h, \quad \bar{b} = b/h = 1, \quad \bar{\gamma} = \gamma h (= \varepsilon_{\max})$$

$$\bar{\gamma}_y = \sigma_y/E = \gamma_y h, \quad \bar{I} = I/h^4 = 2\bar{b}/3 = 2/3$$

$$\bar{M} = \dot{M}/M_y, \quad \text{ここで } M_y = \sigma_y I/h$$

$\sigma_y$ :  $g[\varepsilon]$  曲線接線の応力切片(後出の図2参照)

以上の式を用い式(5)を無次元化表示すると

$$\bar{\gamma} = \frac{2}{E\bar{I}} \int_0^1 \bar{y} f[\sigma, \bar{y}, \bar{\gamma}] \bar{b} d\bar{y} + \frac{\bar{M} \sigma_y}{E} \quad (13)$$

ここで  $f[\ ] = X/K[\ ]$   
 式(6)に式(13)を代入すると

$$\dot{\sigma} = \frac{2}{I} \bar{y} \int_0^1 \bar{y} f[\sigma, \bar{y} \bar{\gamma}] d\bar{y} + \dot{M} \sigma_y \bar{y} - f[\sigma, \bar{y} \bar{\gamma}] \quad \dots\dots\dots (14)$$

式(13), (14)の積分項に対して次のガウス積分近似 ( $N_g$  点法)を適用すると式(16), (17)を得る.

$$\int_0^1 \bar{y} f[\sigma, \bar{y} \bar{\gamma}] d\bar{y} = \sum_{i=1}^{N_g} \omega_i \left(\frac{1}{2}\right) \bar{y}_i f[\sigma_i, \bar{y}_i \bar{\gamma}] + R$$

$$\cong \sum_{i=1}^{N_g} \omega_i \left(\frac{1}{2}\right) \bar{y}_i f[\sigma_i, \bar{y}_i \bar{\gamma}] \quad \dots\dots\dots (15)$$

ここで

$\bar{y}_i = \frac{1}{2}(\bar{y}_i + 1), i=1 \sim N_g$ ; ガウス積分点の番号  
 $\omega_i$ ;  $i$  番めガウス点の重み係数  
 $\bar{y}_i$ ;  $i$  番めのガウス積分点の位置,  $R$ ; 残差

Table 2 Equilibrium stress function  $g[\epsilon]$

$$g[\epsilon] = E_g \cdot \epsilon + \frac{(U_{1g} + U_{2g}) \cdot B_g}{\xi_g - 2}$$

$$U_{1g} = (\xi_g - 2) \cdot (|U_g| - |V_g|)$$

$$U_{2g} = (1 + |U_g|)^{(2-\xi_g)} - (1 + |V_g|)^{(2-\xi_g)}$$

$$U_g = R_{1g} + R_{0g} \cdot \epsilon \quad , \quad V_g = R_{1g} - R_{0g} \cdot \epsilon$$

$$B_g = \frac{G_g}{2 \cdot R_{1g}} \quad , \quad R_{0g} = \frac{(E_g - E_g)}{2 \cdot B_g \cdot (1 - (1 + R_{1g})^{(1-\xi_g)})}$$

$$E_g = 115(MPa) \quad , \quad E_g = 8.2(MPa)$$

$$G_g = \sigma_y = 9.97(MPa) \quad , \quad \xi_g = 25 \quad , \quad R_{1g} = 0.1$$

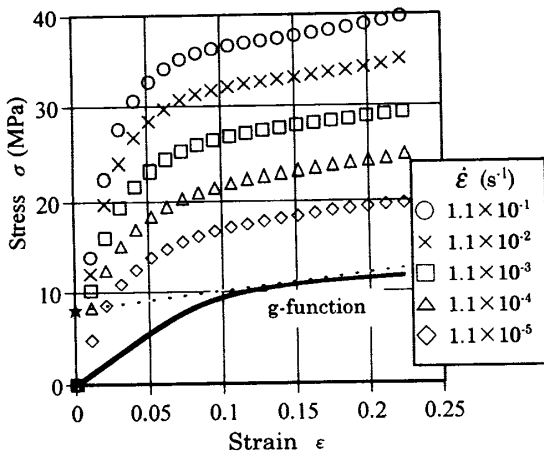


Fig. 2 Stress-strain curves and  $g$  function in monotonic compressive loading tests<sup>(8)</sup> for polyethylene rods used in this study

$$\dot{\gamma} = \frac{1.5}{E} \sum_{i=1}^{N_g} \omega_i \bar{y}_i f[\sigma_i, \bar{y}_i \bar{\gamma}] + \frac{\dot{M} \sigma_y}{E} \quad \dots\dots\dots (16)$$

$$\dot{\sigma}_i = 1.5 \bar{y}_i \sum_{i=1}^{N_g} \omega_i \bar{y}_i f[\sigma_i, \bar{y}_i \bar{\gamma}] + \dot{M} \sigma_y \bar{y}_i - f[\sigma_i, \bar{y}_i \bar{\gamma}] \quad \dots\dots\dots (17)$$

したがって、曲率  $\gamma$  に関して微分方程式(16)式が一つ、各ガウス点  $i$  での応力  $\sigma_i$  に関して微分方程式(17)が  $N_g$  個設定される。結局、高分子はりの曲げクリープ解析では、モーメント  $M$  の時間履歴を与えて ( $N_g + 1$ ) 元の連立一次常微分方程式(16), (17)を解くことになる。

3.2 高密度ポリエチレンはりの解析条件

3.2.1 構成式材料関数および材料定数 数値解析および4章の曲げ・クリープ実験で用いた高密度ポリエチレンは密度:  $0.95 \text{ g/cm}^3$  のサンプルテック(株)製引抜き棒材であり、解析・実験の材料温度は  $25^\circ\text{C}$  としている。この条件下で図2に示す定ひずみ速度の圧縮試験データ<sup>(7)</sup>が得られており、またリラクゼーション試験から図中の平衡応力曲線  $g$  も設定されている。これらのデータから粘性関数  $k$ , 粘性制御関数  $\beta$  を決定することができる。設定した  $g, k, \beta$  の各材料関数・定数値を表2~4に示している。また  $E$ :  $1200 \text{ MPa}$ , 無次元化で用いた  $\sigma_y$  は図2中★の応力値である。

3.2.2 解析条件 今回の解析においては、矩形断面はりの対称断面を10点近似し、11元の連立常微分方程式を解いている。数値積分は Bulirsch-Stoer

Table 3 Viscosity function  $k[\sigma - g[\epsilon], \beta[\epsilon]]$

$$k[\sigma - g[\epsilon], \beta[\epsilon]] = c_0 \cdot \exp\left\{A_0 - \frac{A_0}{\beta[\epsilon] + D_0} X\right\}$$

$$X = \sigma - g[\epsilon]$$

$$C_0 = 1.0(\text{sec}), \quad A_0 = 7.73, \quad D_0 = 1.0(MPa)$$

Table 4 Viscosity control function  $\beta[\epsilon]$

$$\beta[\epsilon] = E_c \cdot \epsilon + \frac{(U_{1c} + U_{2c}) \cdot B_c}{\xi_c - 2}$$

$$U_{1c} = (\xi_c - 2) \cdot (|U_c| - |V_c|)$$

$$U_{2c} = (1 + |U_c|)^{(2-\xi_c)} - (1 + |V_c|)^{(2-\xi_c)}$$

$$U_c = R_{1c} + R_{0c} \cdot \epsilon \quad , \quad V_c = R_{1c} - R_{0c} \cdot \epsilon$$

$$B_c = \frac{G_{sc}}{2 \cdot R_{1c}} \quad , \quad R_{0c} = \frac{(E_c - E_c)}{2 \cdot B_c \cdot (1 - (1 + R_{1c})^{(1-\xi_c)})}$$

$$E_c = 383(MPa) \quad , \quad E_c = 6.1(MPa)$$

$$G_{sc} = 23.5(MPa) \quad , \quad \xi_c = 25 \quad , \quad R_{1c} = 0.1$$

法<sup>(10)</sup>を用い、許容量大相対誤差を $10^{-7}$ とした。各ガウス点の位置を表5に示した。ガウス近似の重み係数 $w_i$ は30けたまで採り、倍精度計算すれば工学的に精度の問題はないことを確認している。数値解析実験は表6に示す3ケースについて実施した。主としてCase 1,2は曲げの負荷速度の効果を、Case 3は負荷レベルの影響を調べることを目的としている。曲げ荷重の保持時間は $10^6$ s(11~12日間)とした。

**3.3 解析結果と考察** 図3は数値解析3ケースのモーメントと曲率の関係を無次元表示で示してい

Table 5 Positions of Gauss points

Gauss Point ( $S_i$ )	S1	S2	S3	S4	S5
$\bar{y}_i = y_i/h$	0.013	0.067	0.160	0.283	0.426
	S6	S7	S8	S9	S10
	0.574	0.717	0.840	0.933	0.987

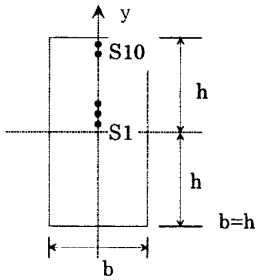


Table 6 Loading conditions of numerical experiments

Case	$\dot{M}/My (s^{-1})$	$M/My$	Hold Time (s)
1	$1.7 \times 10^{-4}$	1.7	$10^6$
2	$1.7 \times 10^{-2}$	1.7	$10^6$
3	$2.2 \times 10^{-3}$	2.2	$10^6$

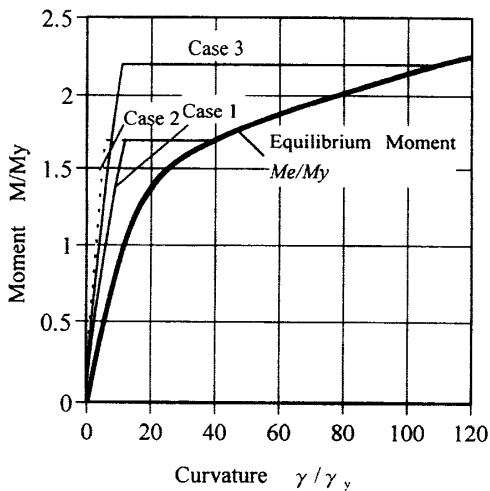


Fig. 3 Moment-ratio vs. curvature-ratio for cases 1, 2, and 3

る。モーメントの負荷速度を100倍遅くすることで到達する曲率が約2倍増加し、約12日間のクリープ変形で4~8倍の曲率増加が認められる。変形はいずれも $Me$ 曲線に極めて漸近したところまで到達している。図4はCase 1,2のガウス点 $S_i$ での応力-ひずみ曲線を $g$ 関数とともに示している。Case 1,2の負荷速度による応力分布の相違はクリープ変形中の応力再分布中に消失することがわかる。一般に表層に近い応力は減衰し中心部の応力は増加しながら $g$ 曲線に漸近しているが、Case 3でも傾向は同じである。

Case 1,2について、これらの時間的変化で図示すると図5のようになる。(a)は初期の時間的変化を(b)は引き続き続いている長時間域での変化状況を示している。これから初期の負荷速度の影響は約25時間でもなくなり約12日( $10^6$ s)経つと、曲率変化を含めすべての速度が零になる平衡状態にかなり近づくが、S4部で応力再分布が完了していないことなどがわかる。Case 3についても基本的な傾向は同じである。

**4. 四点曲げ実験による検討**

3章の数値解析を実験的に検証するために四点曲げクリープ実験を試みた。供試高密度ポリエチレンは $3 \cdot 3 \cdot 1$ 項の材料データと同じ棒材から同軸に切り出された $20 \times 40 \times 300$  mmの棒材である。試験はこれまでの単軸圧縮実験と同じコンピュータ制御油圧サーボ試験機を用いて $25^\circ\text{C}$ の恒温水槽中で実施した。図6に四点曲げジグと試験体の位置関係を示す。曲げ変形計測は、中心部の試験体上下面に貼り付けたは大ひずみゲージ(最大計測ひずみ:15%, KFEL-5-120 C1)をデータロガーで連続計測し、曲率に変換し

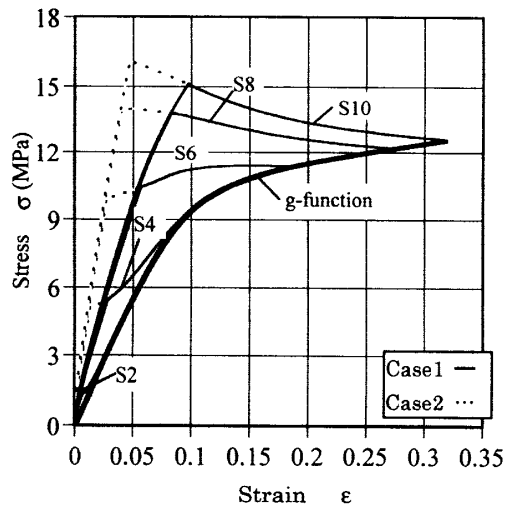


Fig. 4 Stress vs. strain at the Gauss points with  $g$ -function for cases 1 and 2

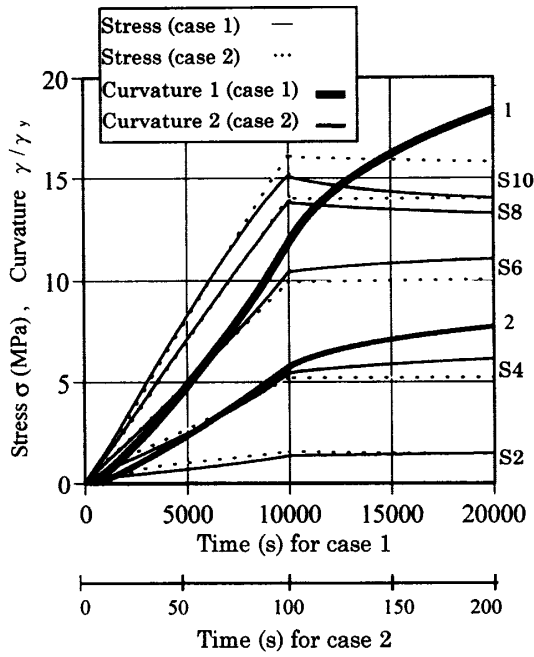
た、ただし高分子のはりは図6のように大変形するため、予備実験で罫書き線を書き変形させ、実験範囲の倍程度まで Bernoulli-Euler の仮定がほぼ成り立つことを確かめている。また高モーメント、高ひずみ域における大変形中の曲げ負荷では不確定要因となるくさび効果や摩擦力の影響が次第に大きくなる。図6に示すように変形後の支点間  $L_0$  の曲げ角度を  $\theta$  とすると曲率  $\gamma$  との関係は  $\theta = \gamma \cdot L_0 / 2$  であり、試験体を垂直

に押し単位厚さ当たりの力  $Q$  は試験圧縮力  $P$  を用いて  $Q = P / (2 \cdot \cos \theta)$  となる。この垂直力間の距離は  $L' = (L - H \cdot \sin \theta) / \cos \theta$  である。また支点部は変形に伴って移動しようとするから摩擦力  $\mu Q$  も曲げ負荷に影響する。以上の要因をすべて考慮すると曲げ負荷  $M_{exp}$  の近似算出式は次式と推定される。

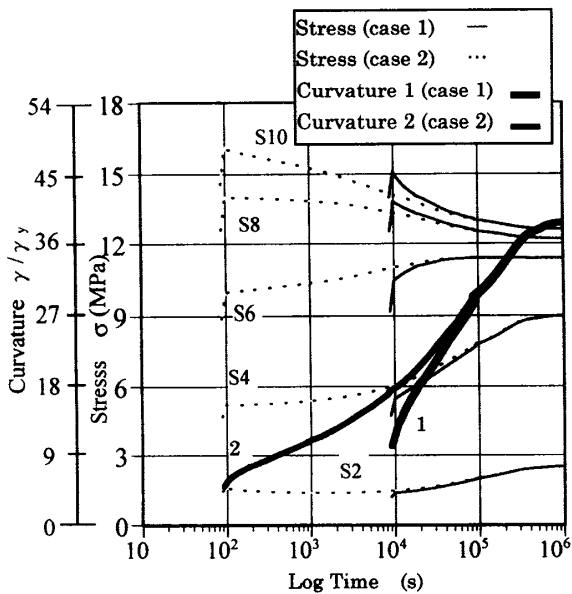
$$M_{exp} = Q(L' - \mu H) \dots\dots\dots (18)$$

ただし、上式で摩擦力に対してのデータがないこと、大ひずみ計測の信頼性を考慮して、今回の実験は図中の  $\theta$  が 9~10% 程度 (ひずみ計測 8~9% 相当) の変形発生で実験終了とした。したがって、本実験での式 (18) の適用は  $M_{exp} = PL/2 (\theta = 0)$  である。

以上の前提のもとに 3 章の Case 1, 2 について実験を実施し、数値解析結果と比較した。今回の実験は低



(a) Short term histories



(b) Long term histories

Fig. 5 Time-histories of stresses and curvatures for cases 1 and 2

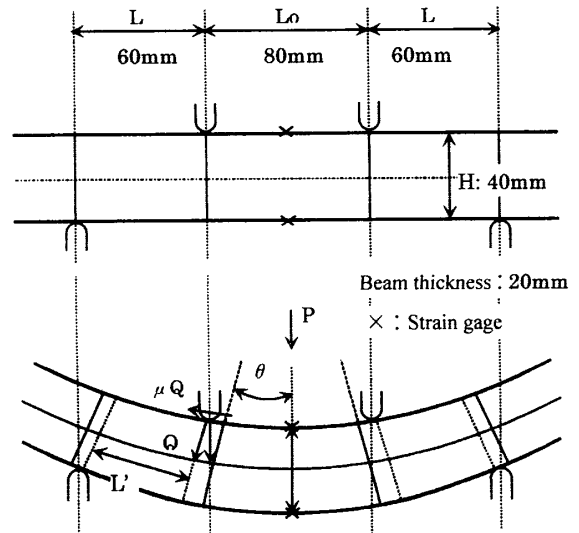


Fig. 6 Experimental beam bending bending model

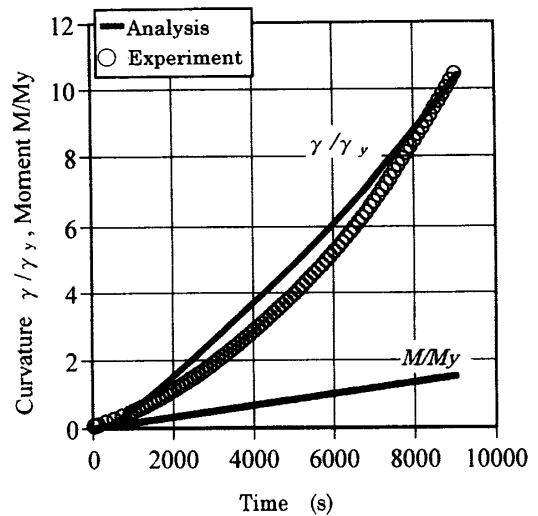


Fig. 7 Comparison of experimental and numerical bending test based on case 1

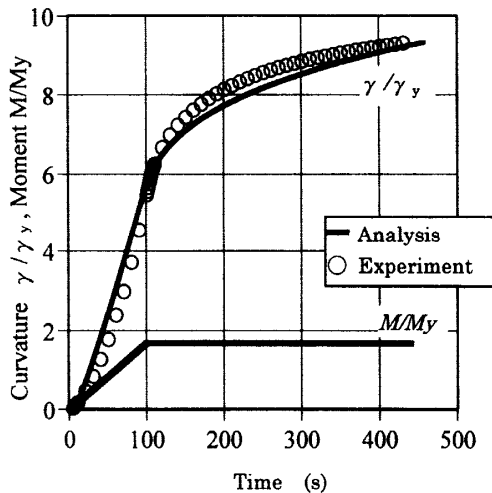


Fig. 8 Comparison of experimental and numerical creep bending test based on case 2

レベルのモーメントであり、ひずみも小さかったため、前に示した考えは考慮せずに解析を行った。図7は3章 Case 1に相当する低速度曲げ負荷の結果を示す。変形の増加が大きく、クリープ開始直前で実験を終了した。また図8では Case 2に相当する高速曲げ負荷後の曲げクリープ変形までの比較が行われている。いずれもこの範囲内では数値解析は曲げ負荷速度効果や曲げクリープ変形の実験結果をよく再現している。今回の検討は比較的低ひずみ域に限ったため、大変形域におけるひずみ分布の線形性の確認や曲げ変形の影響検討など課題が残るが本数値解析法の有効性は確認できたと考えられる。

## 5. 結 言

高密度ポリエチレン棒材を対象に、単軸一様応力場の単調負荷応答に対して実績のある粘塑性構成式を用い、はりの曲げクリープ解析および四点曲げ実験を実施し、以下の結論を得た。

(1) はりの曲げ理論の過大応力に基づく粘塑性構

成式モデルを適用し、曲げモーメント、応力および曲率の基礎関係式を導出した。また単軸における構成式との対応から曲げクリープに対する平衡解の予測ができた。

(2) 得られた曲げでの基礎式に空間積分のガウス近似を適用することで連立微分方程式を定式化し、高分子はりの曲げ問題に対して数値解析を行う手法を確立した。

(3) 数値解析結果から高密度ポリエチレンはりの曲げ負荷に対する速度効果や曲げクリープ変形挙動および変形中のはり断面内における応力の再分布の様子を定量的に把握することができた。

(4) 四点曲げ実験を実施し、実験結果の数値解析による再現性から本解析手法の実用性が確かめられた。

今後、他の高分子材料への適用、変形回復や長時間計測を含む実験方法の検討などを進めて行く予定である。最後に計算、実験に協力した学生の大橋史治君、杉本昭一君、宮元将照君に感謝する。

## 文 献

- (1) 北川正義・邸建輝・水谷一教信, 機論, 58-548, A(1992), 621-626.
- (2) 有山莞・佐久間通之・金子堅司, 機論, 58-556, A(1992), 113-118.
- (3) Krempl, E., *ASM STP*, 765(1981), 5-28.
- (4) Hiroe, T. and Krempl, E., *ASME PVTC*, 60(1982), 31-42.
- (5) Hiroe, T. and Krempl, E., *Nucl. Eng. Des.*, 77-2(1984), 139-148.
- (6) 廣江哲幸・猪狩敏秀, 機論, 51-461, A(1985), 248-253.
- (7) 廣江哲幸・松尾日出男・藤原和人・宮田政信・柴田陽介・酒井憲司, 機論, 61-584, A(1995), 743-749.
- (8) 廣江哲幸・松尾日出男・藤原和人・津田康紀, 機論, 64-624, A(1998)69-74.
- (9) Delph, T. J., *Nucl. Eng. Des.*, 65(1981), 411-421.
- (10) Buirish, R. and Stoer, J., *Numerische Mathematik*, 8(1966), 1-13.
- (11) Nielson, L. E. (小野木重治訳), 高分子と複合材料の力学的性質, (1994), 219, 化学同人.