

粘塑性理論の高温非弾性解析への適用\*  
(多軸非比例負荷に対するモデルの修正と試解析例)広江 哲幸\*<sup>1</sup>, 中島 慶一\*<sup>2</sup>An Application of the Viscoplasticity Theory to the Inelastic Analysis  
at Elevated Temperatures  
(On the Modification of the Model for Multiaxial  
Non-Proportional Loading and Example Study)

Tetsuyuki HIROE and Keiichi NAKAJIMA

The extended viscoplasticity theory is modified without the use of the equilibrium stress function and the modified model is shown to be applicable to multiaxial nonproportional loadings using the updating rule for the viscosity control function. Numerical computations are made for 2¼Cr-1Mo steel at elevated temperatures (450–600°C) under typical multiaxial nonproportional loadings such as stress or strain path bending, mechanical ratcheting, combined creep-plasticity interaction, cruciform strain path and circular stress or strain path, some of which are experimentally tested in this study. Computational results represent the inelastic deformation characteristics observed in the experiment fairly well except some cases such as mechanical ratcheting, which requires that the anisotropic hardening effect to be taken into consideration.

**Key Words:** Plasticity, Creep, Viscoplasticity Theory, Unified Constitutive Theory, Non-proportional Loading

## 1. 緒 言

高温非弾性解析の高精度化を目的とした新しい構成式の研究として、著者らは Krempf らによる粘塑性理論<sup>(1)</sup>を、高温クリープ域に適用できるように拡張<sup>(2)</sup>し、クリープ疲労寿命評価への応用<sup>(3)</sup>、温度変動下の変形解析への適用<sup>(4)</sup>を行ってきた。しかしこれらはいずれも単軸応力場についての研究であり、今後、本モデルの実用化を図るためにはモデルの多軸化と FEM コードへの組み込みによる構造体への適用性についての検討を進める必要がある。後者についてはすでに単調比例負荷に限定した多軸式を用いて FEM 解析<sup>(5)</sup>を行ったが、モデルの一般的多軸化のためには特に非比例の多軸負荷に対する解析法を確立する必要がある。

そこで本研究では、これまで多軸非比例負荷の取扱いが困難<sup>(1)</sup>とされていた本粘塑性モデルの修正を行い一般的な多軸問題に適用できる解析法を考え、2¼Cr-1 Mo 鋼を対象とした高温域での代表的非比例負

荷の例題<sup>(6)</sup>について解析し、一部、実験を含め検討したのでその結果について報告する。

## 2. 拡張粘塑性モデルの修正

本研究対象の粘塑性モデル<sup>(1)–(5)</sup>では非弾性ひずみ速度  $\dot{\epsilon}_m$  は応力  $\sigma$  と全ひずみ  $\epsilon$  の関数である平衡応力  $g[\epsilon]$  の差である過大応力  $X$  で決定され、除荷時に過大応力が零になる時点で平衡応力の変換(update)を行う。(〔 〕内は関数の引数を示す。)しかし多軸非比例負荷問題においては各平衡応力成分  $G_{ij}$  に適切な変換則を設定することが難しく、このことが多軸化へのモデル発展の障害となっていた。

そこで本研究では粘塑性の拡張モデル<sup>(2)</sup>に対し、新たに  $g$  関数を用いず、粘性関数  $k[X, \beta[\epsilon]]$  のみで非弾性ひずみ速度を表すような修正を試みた。 $\beta[\epsilon]$ : 粘性制御関数) 図 1 に修正の要点を模式図で示した。ここでは平衡応力関数  $g$  を

$$g[\epsilon] = 0 \dots\dots\dots (1)$$

としている。 $g$  関数はひずみ速度  $\dot{\epsilon} \neq 0$  のときの応力・ひずみ曲線として定義できるが、これまで現実にはひずみ速度  $10^{-10}\%s^{-1}$  の応力(外挿)として設定した<sup>(2)</sup>から仮想的にはさらに低ひずみ速度で低応力レベルの関数を想定することも可能であり、式(1)を仮定して

\* 平成元年7月13日 九州支部北九州地方講演会において講演、原稿受付 昭和63年11月28日。

\*<sup>1</sup> 正員、熊本大学工学部 (☎860 熊本市黒髪2-39-1)。

\*<sup>2</sup> 正員、三菱重工業(株)長崎研究所 (☎850-91 長崎市飽の浦町1-1)。

も不都合はない。式(1)を設定すれば、これまでの  $k_1[X, \beta_1(\varepsilon)]-X$  の関係は、図1中に示すような  $k_2[\sigma, \beta_2(\varepsilon)]-\sigma$  に置換される。(Suffix 1,2はおのおの旧, 新を表す。)ただし、この置換では次式のように  $\dot{\varepsilon}_{in}$  が同一になるように関数設定する必要がある。

$$\dot{\varepsilon}_{in} = \frac{X}{E \cdot k_1[X, \beta_1(\varepsilon)]} \dots\dots\dots (2)$$

$$= \frac{\sigma}{E \cdot k_2[X, \beta_2(\varepsilon)]} \dots\dots\dots (3)$$

実験データから  $k_2$  値を設定する方法は  $k_1$  の場合<sup>(2)</sup> と同様で、例えば定ひずみ速度 ( $\dot{\varepsilon}_0$ ) の引張り  $\sigma-\varepsilon$  曲線からは次式で  $k_2$  が求まる。 $\beta_2[\varepsilon]$  についても同様である。

$$k_2 = \frac{\sigma}{\dot{\varepsilon}_0 \left( E - \frac{d\sigma}{d\varepsilon} \right)} \dots\dots\dots (4)$$

以上のモデル修正により多軸表示は次式となり、平衡応力関数成分  $G_{ij}$  の定義や  $\sigma_{ij} = G_{ij}$  での判定、更新が不要となる。(以後、Suffix 2は省く。)

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij}^{el} + \dot{\varepsilon}_{ij}^{in}$$

$$= (D_{ijkl})^{-1} \left( \dot{\sigma}_{kl} + \frac{\sigma_{kl}}{k[\bar{\sigma}, \beta(\bar{\varepsilon})]} \right) \dots\dots\dots (5)$$

ここで

$$D_{ijkl} = \frac{E}{1+\nu} \left\{ \frac{1}{2} (\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) + \frac{\nu}{1-2\nu} \delta_{ij}\delta_{kl} \right\}$$

また

$$\bar{\sigma} = (1.5 S_{ij} S_{ij})^{1/2}, S_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \sigma_{kk} \delta_{ij} \dots\dots\dots (6)$$

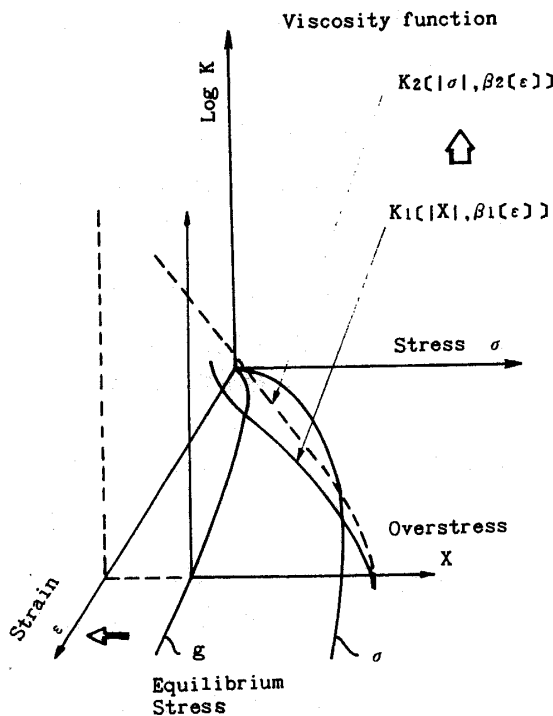


図1 モデル修正の模式図

$$\bar{\varepsilon} = \left\{ \frac{1.5 e_{ij} e_{ij}}{(1+\nu)^2} \right\}^{1/2}, e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \frac{1}{3} \varepsilon_{kk} \delta_{ij} \dots\dots\dots (7)$$

なお上式では微小ひずみ域ということから通常用いられる非弾性ひずみの体積不変を条件にはしていないが従来どおり体積不変とすれば単軸式との対応から式(5)は次式となる。

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = (D_{ijkl})^{-1} \dot{\sigma}_{kl} + \frac{1.5 S_{ij}}{E \cdot k[\bar{\sigma}, \beta(\bar{\varepsilon})]} \dots\dots\dots (8)$$

ここで式(7)の  $\bar{\varepsilon}$  表示式中の  $\nu (=0.3 \sim 0.5)$  は本研究では0.5と仮定する。

式(8)により構成式は単純化されたが  $\beta(\bar{\varepsilon})$  については負荷反転や非比例負荷に対して変換則が不可欠であり、図2, 3に示す方法を適用した。すなわち、

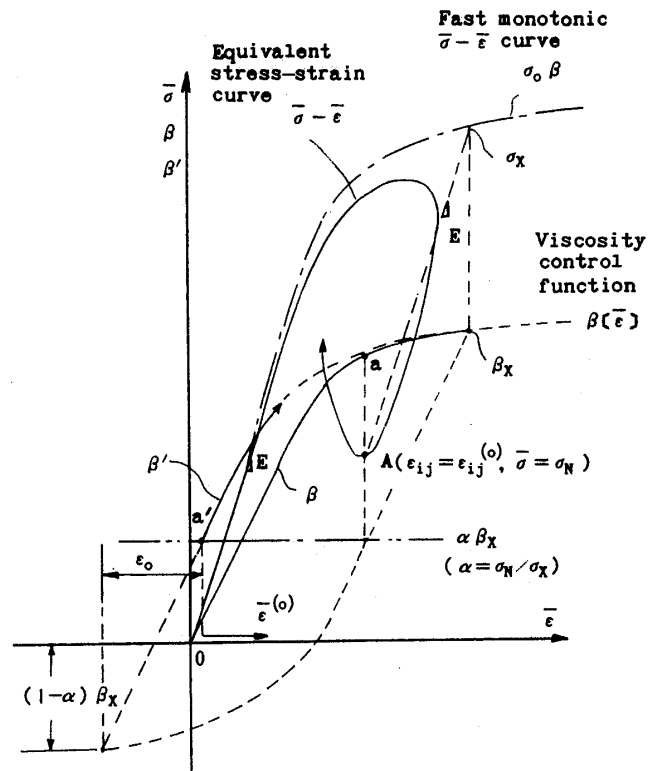


図2 粘性制御関数βの変換則模式図

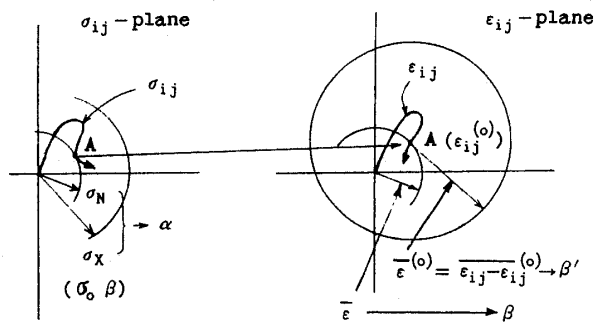


図3 β変換則の補足模式図

(1)  $\beta$  は  $d\bar{\sigma}$  が負から正に変わるとき(このときの  $\varepsilon_{ij}$ ,  $\bar{\varepsilon}$ ,  $\bar{\sigma}$  を  $\varepsilon_{ij}^{(0)}$ ,  $\bar{\varepsilon}_0$ ,  $\sigma_N$  とする.)  $d\bar{\varepsilon} < 0$  であれば  $\beta$  は次式の  $\beta'$  になる.

$$\left. \begin{aligned} \beta' &= 2(1-\alpha)\beta \left[ \frac{\bar{\varepsilon}^{(0)} + \varepsilon_0}{2(1-\alpha)} \right] - \beta_0 \\ & \quad (\beta \leq \beta_x) \\ &= \beta(\bar{\varepsilon}) \quad (\beta > \beta_x) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (9)$$

ここで

$$\bar{\varepsilon} = \{\varepsilon_0 - (\bar{\varepsilon}_0 + \varepsilon_0)(1-2\alpha)\} + \bar{\varepsilon}^{(0)}$$

$$\bar{\varepsilon}^{(0)} = \frac{\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^{(0)}}{2}$$

[一は式(7)の相当表示を示す]

$$\alpha = \sigma_N / \sigma_x, \beta_0 = (1-2\alpha)\beta_x$$

$\sigma_x, \varepsilon_0$ : 図2に示すように図式計算により

算出 ( $\beta_x = \sigma_x / \sigma_0, \sigma_0$ : 材料定数)

ただし  $\beta$  から  $\beta'$  への変換において前の変換による  $\beta'$  の最大値  $\beta'_{max}$  が  $\beta_x$  より小さいとき, 以後の変換では  $\beta_x$  (または  $\sigma_x$ ) は変化せず, さらに変換時の  $\bar{\sigma}$  値がそれまでの  $\sigma_N$  より大きいときは  $\alpha$  も変化せず式(9)の  $\varepsilon_0$  のみ修正する.  $\beta'_{max} \geq \beta_x$  のときは, 次の変換時には  $\beta_x = \beta'_{max}$  となり, したがって新しい  $\alpha$  値はそれまでの  $\alpha, \beta_x$  を用いて  $\alpha \cdot \beta_x / \beta'_{max}$  となる.

(2)  $\beta'$  は  $d\bar{\sigma} < 0, d\bar{\varepsilon} < 0$  のとき,  $\beta$  に戻る.

以上の判定・変換則は後出の応力経路曲げ試験における  $\bar{\sigma}-\bar{\varepsilon}$  曲線の特徴を基に単軸負荷反転(折れ曲げ角  $180^\circ$ )との対応性を考慮して設定した.

3. 多軸非比例負荷試験と解析条件

既報<sup>(2)-(4)</sup>と同じ  $2\frac{1}{4}$ Cr-1Mo鋼について表1に示す条件で多軸非比例負荷試験を実施した. 実験方法の詳細は文献(7)に示してある. 2章の解析方法を用いた試験解析はこの実験条件以外に材料学会 W/G によって実験と解析が実施<sup>(6)</sup>されている表2に示す条件に対して実施した. (一部繰返し数を少なくした.)  $2\frac{1}{4}$ Cr-1Mo鋼について各温度に対する材料関数  $k, \beta$  の定数値は既存データ<sup>(4)</sup>により従来どおり設定し直したが結果的に  $k$  関数中の定数  $B_1^{(2)(4)}$  のみを変更すればよく表3のとおりである. なお本解析では材料の繰返し軟化, 硬化はないものとした.

4. シミュレーション解析とその検討

表1, 2の引圧-ねじり条件下での多軸式は式(8)から次式となる. ( $\gamma$ : 工学ひずみ表示)

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \frac{\sigma}{E \cdot k} \beta(\bar{\varepsilon}) \dots\dots\dots (10)$$

表1 多軸負荷試験条件 (2 $\frac{1}{4}$ Cr-1Mo鋼)

Temperature	Item	Diagram
450℃	Stress path bend (H-1)	
500℃	Out-of-phase cyclic strain (H-2)	$\Delta\bar{\varepsilon} = \sqrt{\Delta\epsilon^2 + \Delta\gamma^2/3} = 1\%$ $(\Delta\gamma/\sqrt{3})/\Delta\epsilon = 1$ $\varphi = 90^\circ$ $\dot{\bar{\varepsilon}} = 0.5\% S^{-1}$ $N = 3$ 
	Mechanical ratchet (H-3)	$\Delta\gamma/\sqrt{3} = 1\%$ $\dot{\gamma}/\sqrt{3} = 0.5\% S^{-1}$ $N = 20$ $\sigma = 98.1 \text{ MPa}$ $\dot{\sigma} = 98.1 \text{ MPa S}^{-1}$ 

表2 補足の解析条件<sup>(6)</sup> (2 $\frac{1}{4}$ Cr-1Mo鋼)

Temperature	Item	Diagram
600℃	Tensile creep   Combined plasticity (A-I-1)	$\sigma = 150 \text{ MPa}$ $\dot{\sigma} = \pm 10 \text{ MPa/s}$ $t = 10 \text{ h}$ $\dot{\bar{\varepsilon}} = 0.1\%/s$ $\bar{\varepsilon} = 2\%$ 
	Tensile plasticity   Combined creep (A-II-2)	$\dot{\bar{\varepsilon}} = 0.1\%/s$ $\bar{\varepsilon} = 2\%$ $\dot{\sigma} = -10 \text{ MPa/s}$ $\sigma = 150 \text{ MPa}$ $\sqrt{3} \tau, t = 10 \text{ h}$ 
	Cruciform strain path (A-III-1)	$\tau/\sqrt{3} = 0.6$ $\dot{\bar{\varepsilon}} = 0.1\%/s$ $N = 2$ 
	Circular strain path (A-III-2)	$\tau/\sqrt{3} = 0.6$ $\dot{\bar{\varepsilon}} = \pm 0.1\%/s$ $\dot{\omega} = \frac{1}{6} \text{ rad/s}$ $\dot{\omega} = \frac{1}{60}$ $N = 1$ $\dot{\omega} = \frac{1}{6}$ $N = 1$ 
	Circular stress path (A-III-3)	$\sqrt{3} \tau = 150$ $\dot{\sigma} = \pm 100 \text{ MPa/s}$ $\dot{\omega} = \frac{\pi}{3600} \text{ rad/s}$ $N = 5$ 

表 3 粘性関数中の  $B_1$  定数値  
(2¼Cr-1Mo 鋼)

T(°C)	600	550	500	450	300	25
$B_1$	5.61	6.26	6.85	7.02	7.60	8.35

$$\dot{\gamma} = \frac{2(1+\nu)}{E} \dot{\epsilon} + \frac{3\tau}{E \cdot k(\bar{\sigma}, \beta[\bar{\epsilon}])} \dots\dots\dots (11)$$

$k, \beta$  関数と定数は既報<sup>(2)(4)</sup>と表3の修正値を用い、図2, 3の変換則を考慮しながら表1, 2の条件で式(10), (11)の数値積分を行った。解析結果の代表例を図4, 図6~12に示す。対応する実験結果は図5と図6, 7の図中に付記している。構成式の材料定数設定に用いた既報データは表1, 2の供試材と同一材料で

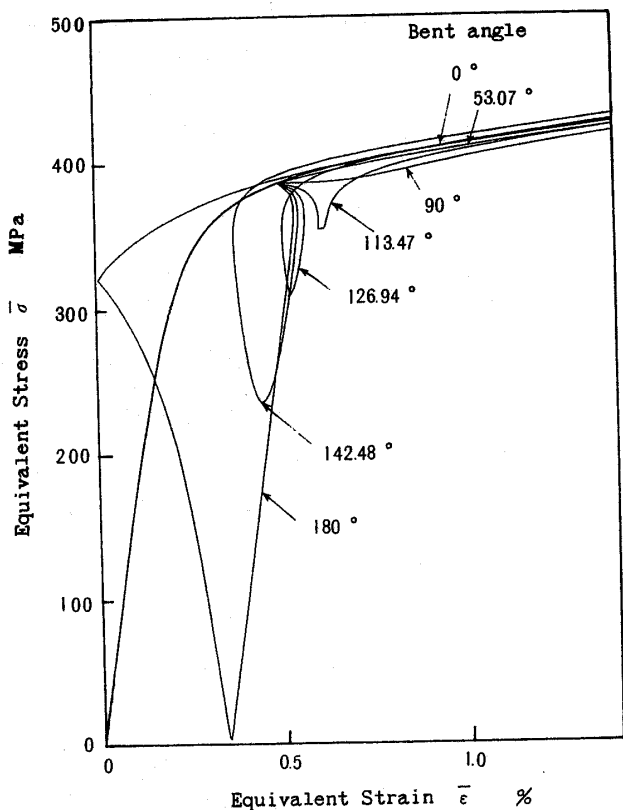


図 4 応力経路曲げの解析結果

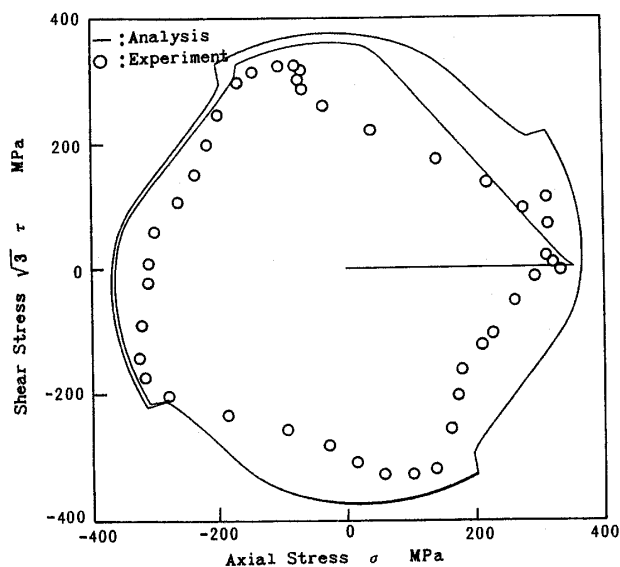


図 6 位相差繰返しひずみの解析と実験結果

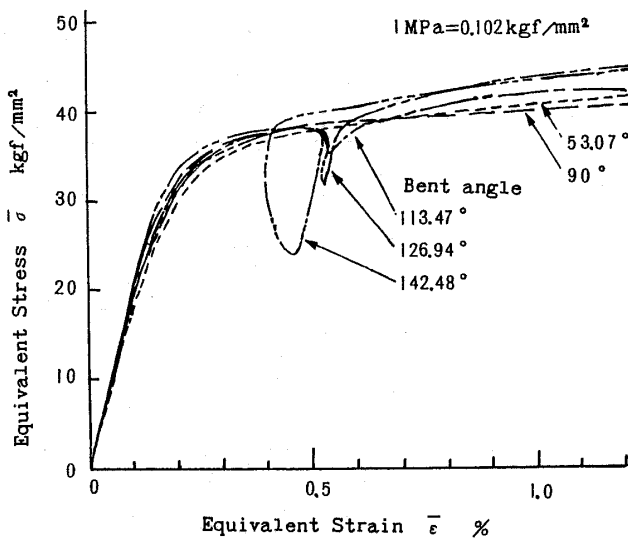


図 5 応力経路曲げの実験結果

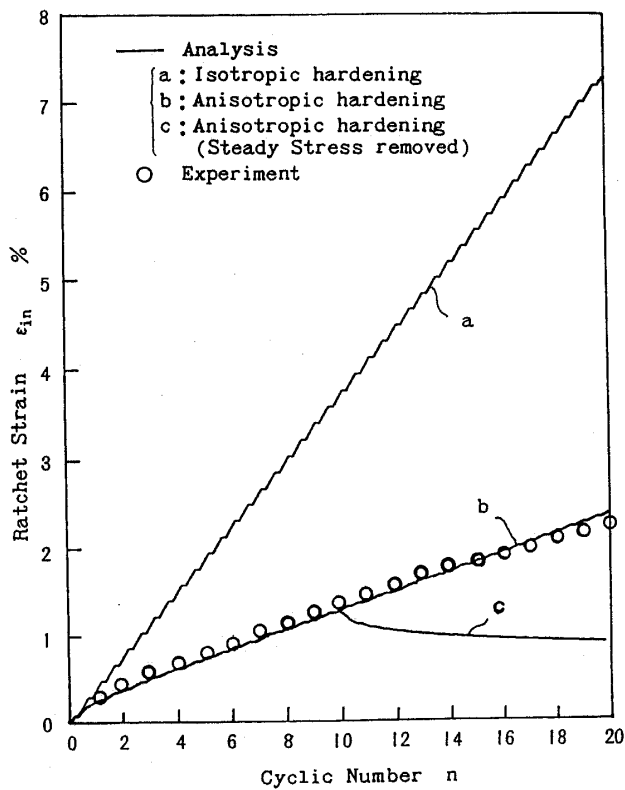


図 7 メカニカルラチェットの解析と実験結果

あるがロットの違いもあって解析の引張曲線は実験値と相当の差を生じた。例えば1%引張りひずみ応力で比較して表1の材料に対して0~10%, 表2の材料に対しては25~30%程度解析が大きめの値を示していた。(表2の実験データは解析結果の図中に付記しなかった。)

応力経路曲げの解析結果と実験結果を図4, 5に示す。実験データのばらつきが大きい解析結果とは比較的良く対応しており、曲げ角度113.47°と126.94°では相当応力が減少から増加に反転する際に若干のクリープの変形が生じている。位相差繰返しひずみの解析と実験の結果を図6に示す。応力の絶対値に差があるが応力変化挙動はほぼ合致している。次に図7はメ

カニカルラチェットにおける軸方向非弾性ひずみ(ラチェット変形)の蓄積挙動を示す。解析による変形(図7中a)は繰返しひずみ軟化を無視していることもあってサイクルごとにほぼ一定の割合で増加しているが実験による変形進行は初期に著しく減少しその後一定割合の進展となっており、両者の差は大きい。このような変形進行量の減少は通常異方硬化によるとされており、またフェライト系鋼材では定応力を途中で除去して引き続き繰返しひずみを負荷することにより変形が回復する<sup>(6)</sup>ことも知られている。そこでこの異方硬化を表すためラチェットひずみ速度の起因応力となる式(10)右辺第2項の軸方向応力 $\sigma$ を次の有効応力に

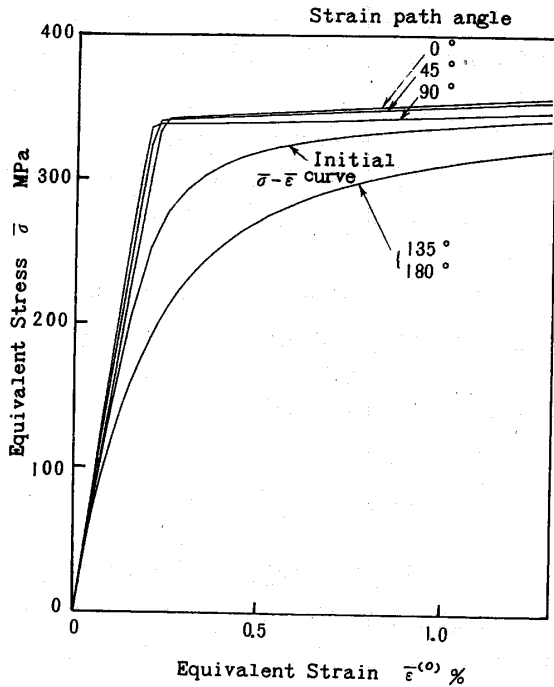


図8 予クリープ変形後の塑性変形解析結果

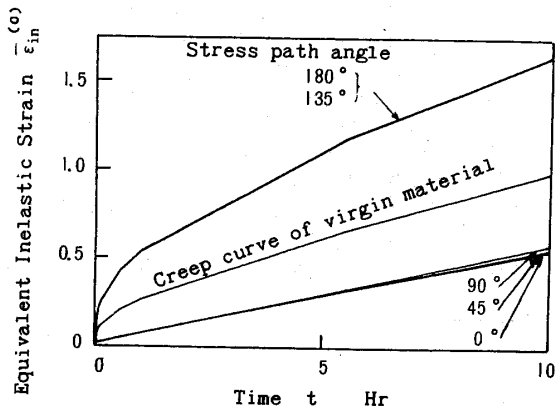


図9 予塑性変形後のクリープ変形解析結果

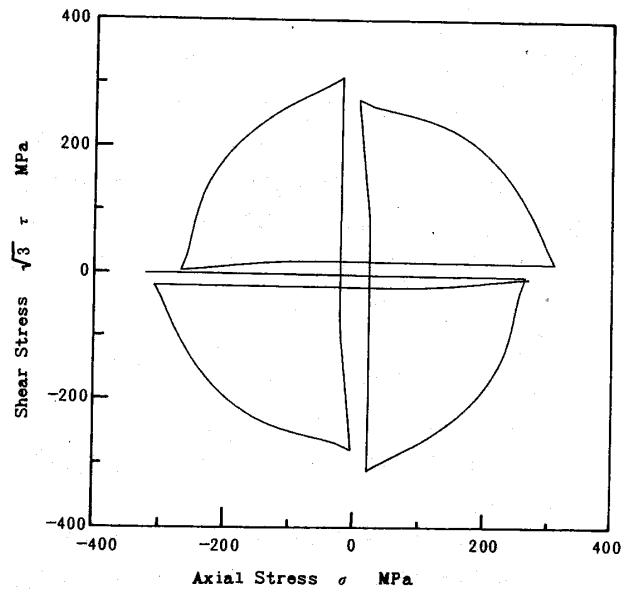


図10 十字形ひずみ経路解析結果

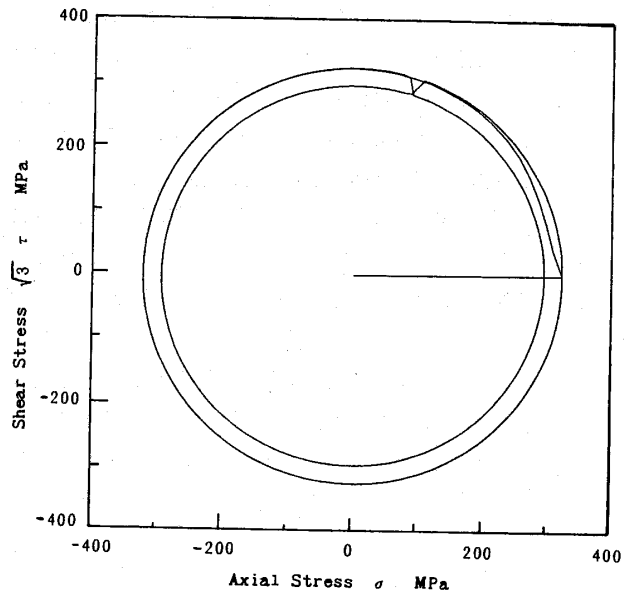


図11 円形ひずみ経路解析結果

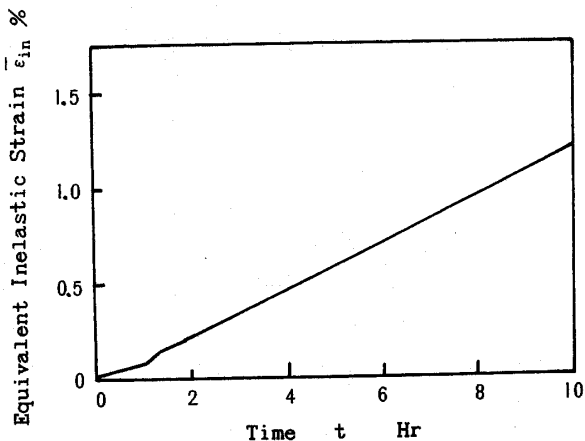


図 12 円形応力経路解析結果

置換することを試み解析結果を図 7 中 b に示した。

$$\sigma_{\text{eff}} = \sigma(1 - \bar{\alpha}\bar{\beta}(\epsilon_{\text{in}})) \dots \dots \dots (12)$$

ここで  $\epsilon_{\text{in}}$  はラチェットひずみ、関数  $\bar{\beta}$  は  $\beta$  関数中の接線係数を零とした以外は  $\beta$  と同一とし、異方硬化の度合を表す材料定数  $\bar{\alpha}$  は実験データとの適合から 0.765 に設定した。また  $\sigma$  が  $\sigma = \sigma_0$ ,  $\sigma_{\text{eff}} = \sigma_{\text{eff},0}$ ,  $\epsilon_{\text{in}} = \epsilon_{\text{in},0}$  の時点から変動するとき、以後の  $\sigma_{\text{eff}}$  は次式で表されるとした試算(10 サイクルめで  $\sigma = \sigma_0 \rightarrow 0$ : 除荷)も実施し、結果を図 7 中 c に示した。

$$\sigma_{\text{eff}} = \sigma_{\text{eff},0} + (\sigma - \sigma_0)(1 - \bar{\alpha}\bar{\beta}(\epsilon_{\text{in}} - \epsilon_{\text{in},0})) \dots (13)$$

式(12), (13)と実験との対応は十分ではなく今後さらに検討を要する。

次に材料学会で実施されたベンチマーク問題<sup>(6)</sup>に対する解析結果を示す。図 8 は軸方向クリープ変形が以後の塑性変形(ひずみ折れ曲げ)に与える結果を調べる問題の解析結果を示し、図 9 は逆のケースの解析結果を示す。いずれも予ひずみを基準とした表示  $\bar{\epsilon}^{(0)}$  を用いた。解析結果は曲げ角度  $\theta = 0, 45, 90^\circ$  と  $135, 180^\circ$  の二つのグループに区別され、初期の相当応力・ひずみ挙動がその中間に位置するという特徴があるが、これは  $\beta$  変換の判定が  $\bar{\sigma}$ ,  $\bar{\epsilon}$  の増減変化に基づいていることと変換後の  $\beta'$  も相当ひずみの関数である(式(9))ことなど  $\beta$  関数の特性によっている。これらの解析結果は大略、実験結果と合致しているが個々の特徴については相違もあり実験を含めさらに詳細な検討の余地があると思われる。図 10 は十字形ひずみ経路問題の解析結果を示し、実験結果<sup>(6)</sup>との対応は良好である。また図 11, 12 はおのおの円形ひずみ、応力経路問

題の解析結果を示す。図 11 ではひずみ速度の変動による  $\sigma - \sqrt{3}\tau$  応力ループの移行現象<sup>(6)</sup>が再現されている。また図 12 は相当クリープひずみを表しており、実験値<sup>(6)</sup>に比べ変形量は少ないが進展挙動は類似している。

非比例の多軸負荷については本研究の解析例以外にもさまざまな特徴ある問題があり、今後実験との対応についてさらにモデルの検討が必要と考えられるが、本試解析でいくつかの課題は残すものの大略満足できる結果が得られており、第 1 段階としての多軸化ができたと考えられる。

## 5. 結 論

拡張粘塑性モデルの修正を行い、非比例負荷を含む一般的な多軸問題に対する解析法を案出し、代表的な多軸非比例負荷の例題の試解析を実施し次の結果を得た。

(1) 拡張粘塑性モデルを平衡応力関数を用いないモデルに修正し、粘性制御関数の変換則を案出することにより多軸非比例負荷の解析ができることを示した。

(2) 2¼Cr-1Mo 鋼, 450~600°C を対象とした各種の多軸非比例負荷の試解析と一部の実験を実施したが、解析上の不都合はなく、得られた応力・ひずみ挙動も大略実験結果と合致した。

(3) メカニカルラチェットに対する異方硬化特性の導入や実験結果との細部の対応について課題が残った。

本研究で一般多軸問題に対する拡張粘塑性モデルの実用化の見通しが得られた。今後、さらにモデルの検討を進めながら構造体への適用を図ってゆきたい。

## 文 献

- (1) Cernocky, E. P. and Krempl, E., *Acta Mech.*, 36(1980), 263.
- (2) 広江・猪狩, 機論, 51-461, A(1985), 248.
- (3) 広江・機論, 52-474, A(1986), 430.
- (4) 岩崎・広江・猪狩, 機論, 53-493, A(1987), 838.
- (5) 本論文集 2097 ページ.
- (6) 材料学会, 多軸応力下の 2¼Cr-1Mo 鋼の高温における非弾性構成式と寿命評価に関する共同研究=報告書, 非弾性解析法調査グループ, (1988).
- (7) 北出・猪狩・山内・中島, 材料学会第 25 回高温強度シンポジウム前刷集, (1987), 97.
- (8) 鶴戸口・朝田・三橋・広江, 機論, 42-359(1976), 1993.