

固体中衝撃波の一解法*

廣江 哲幸^{*1}, 松尾 日出男^{*2}
藤原 和人^{*2}, 後藤 豊博^{*3}

Numerical Simulation of Shocks in Solids

Tetsuyuki HIROE, Hideo MATSUO,
Kazuhiro FUJIWARA and Toyohiro GOTOH

Converging shock waves in solids are numerically simulated using the random choice method (RCM), which has been developed for gases. Initially, a Riemann solver for fluidlike solids with the Grüneisen-type equation of state is constructed. It is incorporated into the RCM, and is applied to the cylindrical shock tube problem in solid copper with a driving pressure of 20 GPa. Spatial distributions of pressure, density and particle velocity show that the steepness at the shock front is maintained both in the converging and reflecting stages. Numerical results are compared with those of the finite difference method (FDM), showing the superiority of RCM over FDM. It is shown that the pressure on the shock front and the total energy contained in the central circular area in the reflecting stage are much larger than those in the focusing stage.

Key Words: Shock Wave, Numerical Analysis, State Equation of Solid, Riemann Problem, Random Choice Method

1. 緒 言

従来, 収束衝撃波の解析はその大半が気体を対象としたものである。当初, 解析的方法として, 級数展開法⁽¹⁾⁽²⁾, 積分関係式法⁽³⁾⁽⁴⁾などが用いられたが, これらの方法では取扱える問題が限定され最終的には数値的解法がとられている。しかし収束点近傍においては衝撃波の強度が極端に大きくなること, しかも衝撃波強度の収束に伴う増大が非常に急激であること, さらに衝撃波面後方において特性量の変化が峻烈であることなどに起因して通常の差分法でこれを解くことは困難である(弱い衝撃波については例えばフラックスベクトル分割法⁽⁵⁾, TVD法⁽⁶⁾などの差分法を用いて解いた例がある)。その最も大きな理由は数値粘性による波面近傍での解析誤差のため上に述べた収束波特有の問題に対して差分法の対応が困難となるところにある。Saitoら⁽⁷⁾はランダムチョイス法(以下RCMと呼ぶ)を用いて円筒収束波を解析した。その後, 松尾ら⁽⁸⁾⁽⁹⁾は一連の解析の結果, 一次元流れの範囲内では衝撃波

適合法(shock fitting method)を別にするとRCMが最も信頼し得る結果を与えることを示した。これはRCMの成り立ちそのものが常に不連続性を保持しながら計算を進めていくところにある。衝撃波適合法は適用できる問題が限定されることを考えると今後固体も含めて広い媒質中での収束波問題に対してRCMが一つの有効な方法となり得ることが予想される。事実, 二次元弾性流れに対してRCMを適用した例が報告されている⁽¹⁰⁾。しかし固体媒質中においてその弾塑性特性を無視し得るような強い衝撃波(平面衝撃波も含めて)の解析に対してRCMを適用した例は見当たらない。

本研究は上に述べた気体中収束波問題に対する経験をもとにして, 固体中の強い収束衝撃波問題に対してRCMを適用しその解析を試みたものである。ところでRCM適用においては膨大な数のリーマン問題の計算を実施することになるため固体中リーマン問題の正確で効率的解法が重要である。しかし固体では仮定⁽¹¹⁾を設けたExplicitな解があるのみで通常は数値積分を行っている。以下このようなRCMの構成法およびこれを用いた収束衝撃波の試解析結果の概要を示す。

* 原稿受付 平成3年12月13日。

^{*1} 正員, 熊本大学工学部 (〒860 熊本市黒髪2-39-1)。

^{*2} 熊本大学工学部。

^{*3} 熊本大学大学院。

2. 固体の状態式および保存則

圧力 P , 密度 ρ (比容積 $v \equiv 1/\rho$), 内部エネルギー E の関係を表す固体の状態式は次の Mie-Grüneisen 式を用いた。

$$P = P_H(\rho) + \rho\gamma(\rho)\{E - E_H(\rho)\} \dots\dots\dots (1)$$

ここで $E_H = P_H/\eta/2\rho_0$, $\eta = 1 - \rho_0/\rho$ (添字 O は標準状態での値を示す), γ は Grüneisen 係数である。また Hugoniot 圧縮曲線 P_H データの替わりに衝撃速度 U_s と物質速度 u の線形関係式 $U_s = C_0 + Su$ を用い P_H を導出した。また $\gamma(\rho)$ としては $\rho\gamma = \rho_0\gamma_0 = \text{const.}$ の関係を採用した。

超高压領域では固体も流体的挙動が支配的になるため下記に示す一次元非粘性流体の保存則を適用した。独立変数 r, t は空間座標 (Euler 座標) と時間を表す。

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F(U)}{\partial r} + W(U) = 0 \dots\dots\dots (2)$$

ここで

$$U = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ e \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + P \\ u(e + P) \end{pmatrix}$$

$$W(U) = \begin{pmatrix} \rho u/r \\ \rho u^2/r \\ u(e + P)/r \end{pmatrix} (\alpha - 1)$$

$$e = \rho(E + u^2/2)$$

α は考える対称性 (平面, 円筒, 球) により 1, 2, 3 をとる。

3. リーマン問題の解法とランダムチョイス法の適用

リーマン問題または衝撃波管の問題では, 左側, 右側のおおのこの状態をそれぞれ後退波 (Backward-facing Wave), 前進波 (Forward-facing Wave) の前

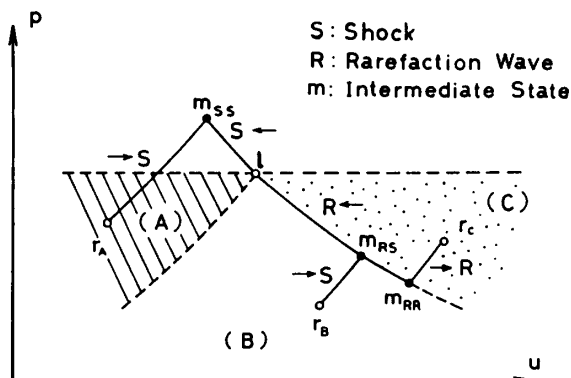


図 1 リーマン問題における発生波の組合せパターン (l, r : 左側, 右側の初期状態, m : 発生波の中間状態)

方とするときの実現可能な後方状態を $P-u$ 平面に表しその交点を求めることにより解くことができる⁽¹²⁾。したがって例えば図 1 に示すように左側を高压側としたときのリーマン問題で実現される衝撃波 S と膨張波 R の組合せ波形パターンは右側が図 1 中 (A)~(C) の各領域に位置するときのおおのこの $S+S, R+S, R+R$ となるのがわかる。衝撃波面上の状態は波面前後の保存則である Rankine-Hugoniot 式が次式のように簡単な式で表されているから状態式 (1) と組合せて容易に正確な計算ができる。

$$E = E_i + (v_i - v)(P + P_i)/2 \dots\dots\dots (3)$$

$$u = u_i \pm \sqrt{(v - v_i)/(P_i - P)} (P - P_i) \dots\dots\dots (4)$$

$$\rho(U_s - u_i) = \pm \sqrt{(P - P_i)/(v_i - v)} \dots\dots\dots (5)$$

ここで \pm は基準状態 (P_i, ρ_i, u_i) に対して前進および後退の関係にある衝撃波を示す。

次に膨張波の $P-u$ 関係を求めるには微分形の保存則と状態式から得られる次式を解く必要がある。

$$dE = -Pdv \dots\dots\dots (6)$$

$$-du/dv = \pm c/v \dots\dots\dots (7)$$

$$dP/dv = -c^2/v^2 = \{1 - K_0(v_0 - v)/2\} \{dP_H(v)/dv\} - K_0\{P - P_H(v)/2\} \dots\dots\dots (8)$$

ここで c : 音速, $K_0 = \rho_0\gamma_0$

本研究では高压側 (左側) から $P-v$ 関係 (等エントロピー線) を逐次計算しながら $du = (-dpdv)^{1/2}$ の差分式を用いて $P-u$ 曲線を得る方法を採用した。 $R+S$ と $R+R$ の区分けはこの計算途中で判断でき繰り返し計算は必要としない。なお逐次計算には熱力学関係式 (6) と状態式 (1) の差分化により得られる次式を用いた。

$$P_i = \frac{P_H(v_i) - \rho_0\gamma_0(P_{i-1}\Delta v_i/2 + E_H - E_{i-1})}{1 + \rho_0\gamma_0\Delta v_i/2} \dots\dots\dots (9)$$

ここで $\Delta v_i = v_i - v_{i-1}$

表 1 理想気体の衝撃波管問題のリーマン解法およびランダムチョイス法による解の厳密解に対する相対誤差 (N : 差分式の分割数)

N	X10 ⁻⁴	
	Riemann Solver	RCM
10 ³	2.88831	2.83226
10 ⁴	0.20242	0.18160
10 ⁵	0.01057	0.00737
10 ⁶	0.00288	0.00160

上記手法による解の精度検討として式(1)が $P_H=0$, $\gamma=x-1$ (x :比熱比) とすることでポリトロピック気体の状態式なることを利用して平面衝撃波管問題(圧力比:10)を解き厳密解との比較を行った。その結果, 表1に示すように膨張部の逐次計算ステップ数 N を 10^5 とすれば衝撃圧の相対誤差を 10^{-6} 程度にでき, 十分な精度を維持できることを確認した。以上で簡便で高精度の結果が得られるリーマン解法(Riemann Solver)が構成できた。

次に式(2)で Δr ($=R_0/N$, R_0 :基準長, N :メッシュ分割数), Δt を r, t の増分とし差分近似と演算子分割法⁽¹³⁾を適用すると次の2式を得る。

$$(U_j^* - U_j^r) / \Delta t = -F_r(U_j^r) \dots\dots\dots(10)$$

$$(U_j^{*+1} - U_j^*) / \Delta t = -W(U_j^*) \dots\dots\dots(11)$$

ここで $U_j^* = U(j\Delta r, n\Delta t)$

添字 r は r の偏微分を示す。式(10)の暫定解 U_j^* は平面問題の保存則の解であることがわかる。これを図2に示すように節点間 $j \sim j+1$ をリーマン問題に置換し $\Delta t/2$ 後の中間節点 $j+1/2$ における解をこの間でランダムに選択した場所 X での解で代表させるランダムチョイス法⁽¹⁴⁾によって求める。この計算を単位時間ステップで2回繰返し収束波の場合はさらに空間差分を含まない式(11)を用いる。一様乱数の生成は van der Corput の方法⁽¹⁵⁾を用い時間増分 Δt の決定は Courant-Friedrichs-Lewy 条件⁽¹²⁾によった。またリーマン解法の場合と同様に気体の衝撃波管の厳密解と RCM による数値解析結果(総節点分割数:500)を比較し, 相対誤差を表1に併記した。RCM では膨張波部全体の逐次計算の分割数が結果的にリーマン解法単独で解く場合より細かいため精度も同等以上を示しており $N=10^5$ で十分である。

以上述べた固体のリーマン問題の解法を用いて気体と同様に次元問題に対する RCM の適用が可能とな

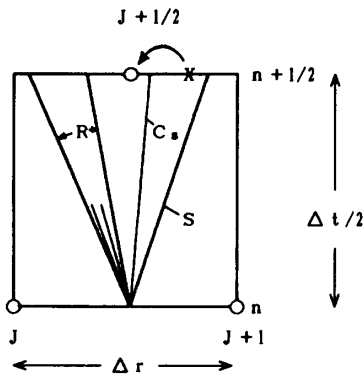


図2 リーマン解法のランダムチョイス法への適用模式図 (R+Sタイプ)

った。

ところで, 収束波に対してRCMを適用する際によくその収束点近傍での解の精度について一言触れておく必要がある。収束波が収束点に近づくにつれて特性量の分布は波面後方の狭い範囲で急激な変化をするようになる。したがってサンプリングポイントをランダムにとることによる解の揺らぎが拡大されることになる。これは場合によっては局所的な狭い領域では無視し難い誤差を招くことになるかもしれない。しかし乱数が一様である限り解は平均的には正しい結果を与えているはずである。また波面後方の狭い範囲における局所的な誤差は解の全体の振る舞いには影響を与

表2 初期条件と材料定数

$P_4 = 20 \text{ GPa}$	$P_1 = 0 \text{ GPa}$
$u_4 = 0 \text{ km/s}$	$u_1 = 0 \text{ km/s}$
$\rho_4 = 10061 \text{ kg/m}^3$	$\rho_1 = \rho_0^*$
$\rho_0 = 8930 \text{ kg/m}^3$	$\gamma_0 = 1.96$
$C_0 = 3940 \text{ m/s}$	$S = 1.489$

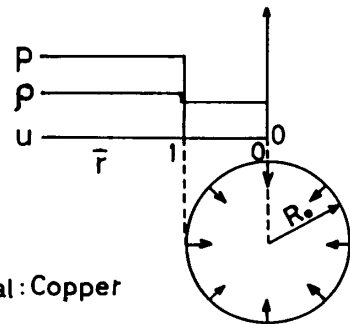


図3 固体の円筒状衝撃波管問題

*: Derived from $E_1 = E_4 = 0 \text{ MJ/kg}$

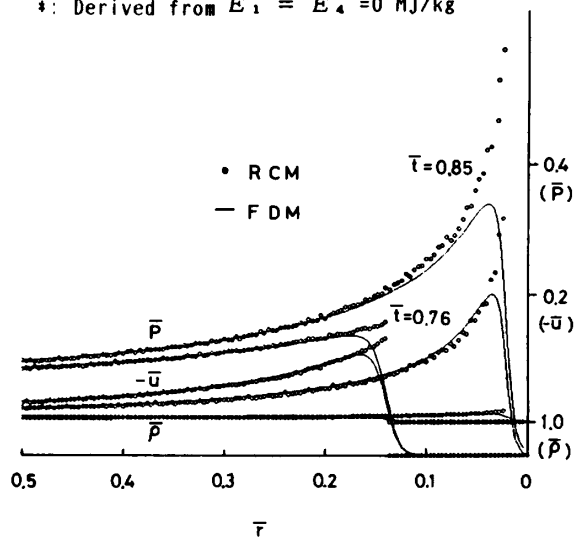


図4 ランダムチョイス法と差分法との解の比較

えない。したがって、実際的には収束点近傍では時間的または場所的な解の揺らぎを眺めながら現象を捉えていくことにすれば誤った結論に至ることはあるまい。

4. 収束衝撃波の数値解析結果とその検討

図3に示すような銅の円筒状衝撃波管問題に対して表2の初期条件と材料定数⁽¹⁶⁾で計算を実施した。添字1, 4はおおの低圧部, 高圧部を示す。節点分割数は中心低圧部を250とした。高圧領域は同じ分割幅で十分長くとった。中心には便宜上, 半分分割幅の半径を有する剛体のコアを想定した。また差分法(FDM)コードWondy IIIa⁽¹⁷⁾による同一条件での計算(一次, 二次人工粘性係数: 0.5, 0.5)も行い比較した。各変数は

$\bar{P} = P/\rho_0 c_0^2$, $\bar{\rho} = \rho/\rho_0$, $\bar{u} = u/c_0$, $\bar{r} = r/R_0$, $\bar{t} = c_0 t/R_0$, $\bar{e} = e/e^*$ (e^* は計算開始直後の衝撃波面上での e 値)で無次元表示した。図4はRCMとFDMとによる計算結果を比較しており、衝撃波が収束点に近づいた2時刻での圧力, 密度, 粒子速度の空間分布を示している。FDMでは不連続な衝撃波面の平滑化を行う必要があるためその影響は波面が収束点に近いほど顕著になりRCMとの差が大きくなっている。これから気体の場合⁽⁶⁾と同様に収束衝撃波の解析にはRCMが有効であることがわかる。ただし計算時間(cpu)は収束点

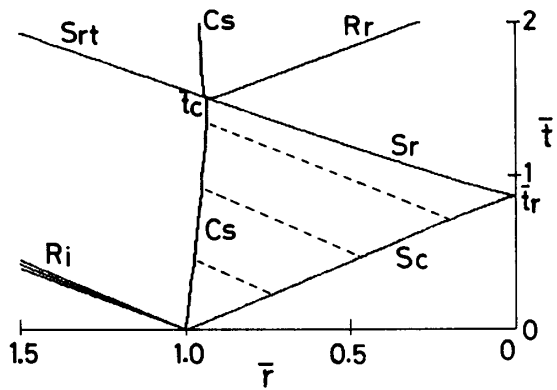
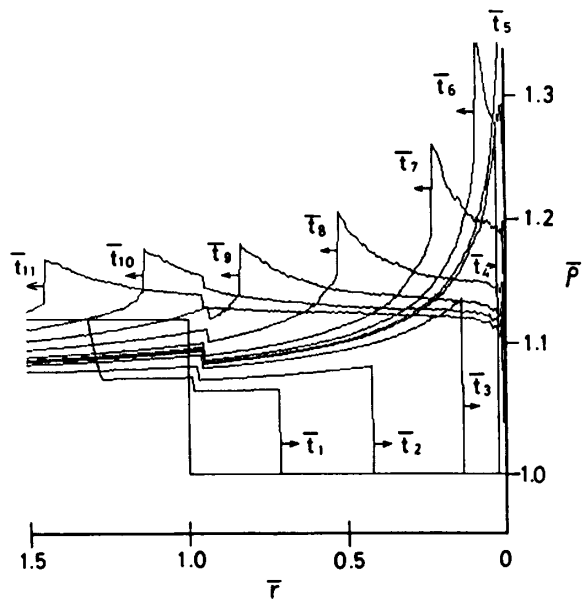
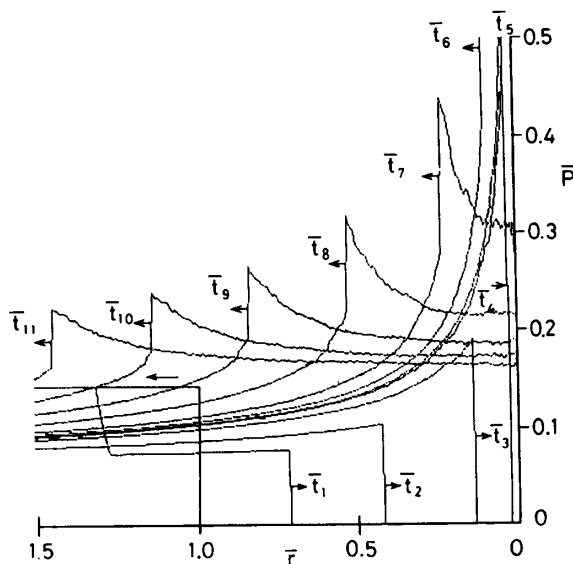


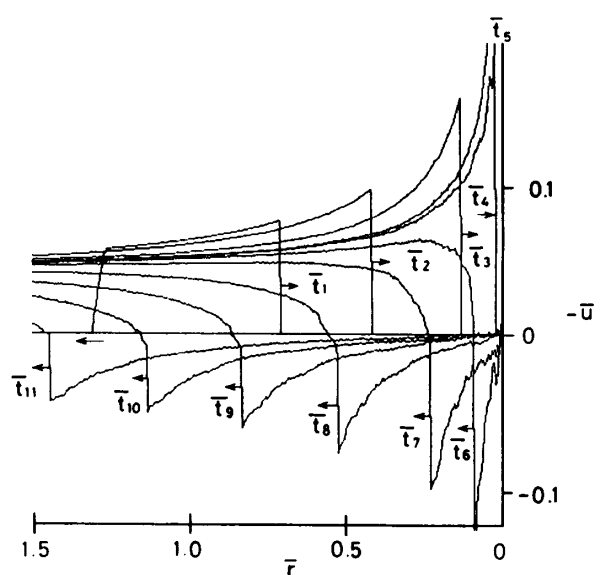
図5 円筒状衝撃波管問題での波動線図



(b) 密度



(a) 圧力



(c) 粒子速度

図6 圧力, 密度, 粒子速度の空間分布の変化 ($\bar{t}_{i=1-11} = 0.259, 0.518, 0.760, 0.847, 0.860; 0.906, 0.993, 1.202, 1.424, 1.652, 1.885, (\bar{t}_5 = \bar{t}_r)$)

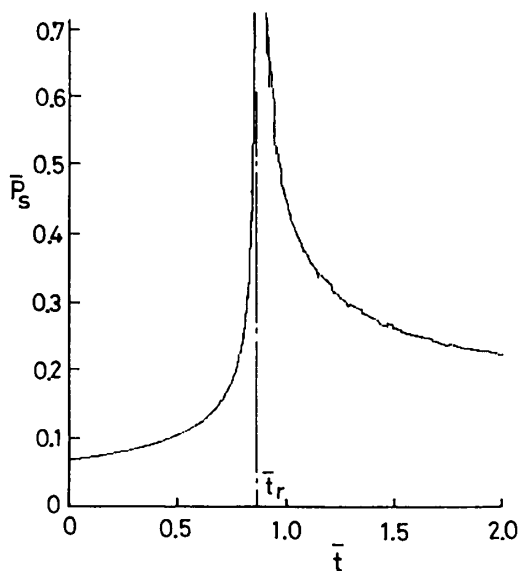


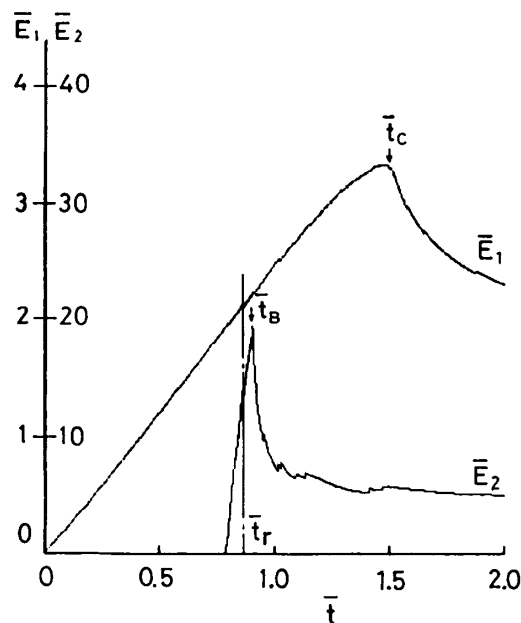
図7 衝撃波面上の圧力の時間的変化

到達まで45 min (FACOM m780/10Q) でFDMによる計算の数十倍を要した。

図5は $\bar{r}-\bar{t}$ 平面上に全体的な流れを特徴づける衝撃波、膨張波、接触不連続面の軌跡を図示したものである。膨張波 R_i と逆方向の衝撃波 S_c はほぼ等速で進み中心部で加速し \bar{t}_r で反射後衝撃波 S_r となる。接触不連続面 C_c の収縮は S_c からの圧縮波(図4中点線の特性格線参照)によって減速され、 S_r が透過して衝撃波 S_n と弱い反射膨張波 R_r に分岐する時刻 \bar{t}_c で後退に転じている。図6(a)~(c)は衝撃波が収束、反射し接触面を透過する間の11箇所の時刻における圧力、密度、粒子速度の空間分布の変化を示しており、各過程で衝撃波面の不連続性が明確に保持されていることがわかる。いずれも中心軸近傍で著しい収束効果を示しており各場所の圧力、密度は衝撃波の反射効果でさらに上昇することがわかる。また C_c 面の密度差はわずかであり各波形への影響はほとんどない。

図7は衝撃波面上の圧力の時間的変化を示している。図5と組合せて各場所での衝撃圧縮度合いがわかる。例えば $\bar{r}=0.05$ の場所では初期衝撃圧に比べ収束で約5倍、反射で約14倍の圧力上昇があった。図8は初期におおの $\bar{r}<1.0$ ($=\bar{r}_1$)、 0.1 ($=\bar{r}_2$)の領域内にあった物質中の全エネルギーが時間的に変化する様子を示したものである。 $\bar{E}_j=2\pi \sum \bar{r}_i \Delta \bar{r}_i \bar{e}_i / \pi \bar{r}_j^2$, $j=1, 2$ で \sum は領域内節点 i の総和であり、この定義から \bar{E}_j 値は各領域が平面衝撃波管での衝撃圧縮状態にあるとした場合の全エネルギーに対する比を示し、収束・反射効果によるエネルギーの増大比を表している。

\bar{E}_1, \bar{E}_2 ともに衝撃波が収束した後も増加し続け、反

図8 全エネルギーの時間的変化 (\bar{E}_1, \bar{E}_2 : おのおの $F < 1.0, 0.1$ の領域内の全エネルギー)

射衝撃波が各領域外に透過するとき($\bar{t}_c, \bar{t}_B=1.50, 0.90$)に最大値(3.21, 19.0)をとることがわかった。

以上の試解析で示したようにRCM適用によって固体中衝撃波の収束・反射効果が定量的に把握できるようになった。これらの結果は収束衝撃波を利用した材料合成などの評価に有効に利用でき、また差分法など、従来の数値解法の精度検討にも用いられる。

5. 結 論

固体を対象にランダムチョイス法の適用を試み、以下の結論を得た。

(1) Grüneisen形状態式を有する固体に対してリーマン問題の正確で効率的な解法(Riemann Solver)を構成した。これをランダムチョイス法に組み込み固体用の一次元衝撃解析プログラムを作成した。

(2) 試解析として銅の円筒状リーマン問題を解析した。その結果、ランダムチョイス法によれば従来の差分法に比べてくに衝撃波が収束・反射する過程でその不連続性が保持でき、中心部での衝撃圧や全エネルギーの変化挙動が定量的に把握できることがわかった。

今後は爆薬、気体、粉体などを含む多層構造体への拡張および二次元問題への適用を図ってゆきたい。

文 献

- (1) Bach, G. G. and Lee, J. H., *J. Fluid Mech.*, 37(1969), 513.

- (2) Matsuo, H., *Mem. Fac. Eng.*, Kumamoto Univ., **23** (1977), 1.
- (3) Matsuo, H., *Phys. Fluids*, **22**(1979), 1618.
- (4) Matsuo, H., *Phys. Fluids*, **26**(1983), 1755.
- (5) Fujiwara, K., Matsuo, H. and Hiroe, T., *J. Jpn. Soc. Aerosp. Sci.*, **39**-445(1991), 81.
- (6) Watanabe, M. and Takayama, K., *Shock Waves*, **1**-1(1991), 149.
- (7) Saito, T. and Glass, I. I., *Proc. R. Soc.*, London, Ser. A, **384**(1982), 217.
- (8) Matsuo, H., ほか 3 名, *J. Comput. Phys.*, **75**(1988), 38.
- (9) Matsuo, H. and Fujiwara, K., *Phys. Fluids*, A, **2**-2(1990), 266.
- (10) Esser, B. and Grönig, H. M., Presented at Colloquim of the Sonderforschungsbereich 27, RWPH Aachen, July 3 and 4, (1985).
- (11) Nagayama, K., *J. Phys. Soc. Jpn.*, **57**(1988), 9.
- (12) Courant, R. and Friedrichs, K. O., *Supersonic Flow and Shock Waves*, (1948), 202, Springer-Verlag.
- (13) Sod, G. A., *J. Fluid Mech.*, **83**(1977), 785.
- (14) Glimm, J., *Commun. Pure Appl. Math.*, **18**(1965), 697.
- (15) Collella, P., *Lawrence Berkeley Laboratory Rep.*, No. LBL-8774(1979).
- (16) Kohn, B. J., *Air Force Weapons Labo.*, AFWL-TR-69-38(1969). 55.
- (17) Lawrence, R. J., *Sandia Labo. Development Rep.*, SC-DR-70-315(1970).