

## ロバスト適応バックステッピングによる磁気浮上システムの制御\*

水本 郁朗<sup>\*1</sup>, 大石 晋也<sup>\*2</sup>, 公文 誠<sup>\*1</sup>  
岩井 善太<sup>\*3</sup>, 神澤 龍市<sup>\*4</sup>

## Robust Adaptive Backstepping Control of a Magnetic Levitation System

Ikuro MIZUMOTO<sup>\*5</sup>, Shinya OHISHI, Makoto KUMON,  
Zenta IWAI and Ryuichi KOZAWA<sup>\*5</sup> Graduate School of Science and Technology, Kumamoto University,  
2-39-1 Kurokami, Kumamoto-shi, Kumamoto, 860-8555 Japan

It is very important to confirm the robust performance of the existing control scheme through experiments because several problems which might not satisfy the assumptions imposed on the controlled system are in hiding in practical applications. In this paper, we verify the effectiveness of the proposed robust adaptive backstepping control through experiment of a magnetic levitation system with uncertain nonlinearities.

**Key Words**: Robust Adaptive Control, Nonlinear Systems, Magnetic Levitation System, Backstepping

## 1. 緒 言

実在するシステムの多くは何らかの非線形特性や不確かさを有している。このようなことから、'90年代の初めより、不確かな非線形に対する適応制御手法が意欲的に研究されている<sup>(1)~(5)</sup>。中でも適応バックステッピング手法は、対象システムが'Parametric feedback form'に変換可能であれば、これまで必要とされていたマッチング条件や Lipschitz 条件を満足しないより広範な非線形システムに対して適用可能であった<sup>(5)</sup>。しかし、この手法の適用も不確かさが既知関数と未知定数との線形和で表されるパラメトリックな不確かさを持つシステムに限定されていた。このようなことから、ノンパラメトリックな不確かさを持つ非線形システムに対する適応制御手法がいくつか提案されている。特に、文献<sup>(6)(7)</sup>の手法は、入力項にもノンパラメトリックな不確かさを持つ非線形システムを対象としており、より一般的な非線形システムに対してもロバストな適応制御が設計できる手法である。また、それらの有用性は、非線形性の強い完全混合タンク反応器(CSTR)や磁気浮上系のモデルを用いた数値シミュレーションに

より検証されている。しかし、実際に制御手法を実システムへ適用しようとする場合、想定されていないさまざまな要因により、数値シミュレーションによる検証では表れない問題に直面することがある。このようなことから、提案された制御手法の有用性・実用性を実機のシステムで検証し、実用上有効な改善手法を示すことは制御手法の実用化を図る上で重要なことである。本論文では、上述の不確かな非線形システム、特に入力項にもノンパラメトリックな不確かさを持つ非線形システムにも有効な手法として著者らにより提案されているハイゲインフィードバック型ロバスト適応バックステッピング手法の実用性を一入出力磁気浮上システムに対する実験により検証する。本実験では、文献<sup>(6)</sup>で示されているデッドゾーン法の適応調整則と $\sigma$ 修正法により制御系を構成した場合( $\sigma$ 修正法による制御系の構成法および安定性解析は本論文中で新たに行なう)、およびPID制御による場合について比較検証し、適用した適応制御手法の実際のシステムへの応用に関する問題点を明らかにする。さらに、明らかにされた問題点を考慮し、ノイズの影響やセットポイントが変化する場合などを想定したフィードバックゲインの下限切り替え型 $\sigma$ 修正調整則による改善を試みた結果を示す。ここで提案する下限切り替え型 $\sigma$ 修正調整則による改善は、ハイゲインフィードバック型ロバスト適応バックステッピング手法と $\sigma$ 修正法の特性を生かしたものであり、実際の応用において十分有

\* 原稿受付 2007年1月22日。

<sup>\*1</sup> 正員, 熊本大学大学院自然科学研究科(☎860-8555 熊本市黒髪2-39-1)。<sup>\*2</sup> 学生員, 熊本大学大学院自然科学研究科。<sup>\*3</sup> 正員, フェロー, 熊本大学大学院自然科学研究科。<sup>\*4</sup> 正員, 熊本大学工学部。

E-mail: ikuro@gpo.kumamoto-u.ac.jp

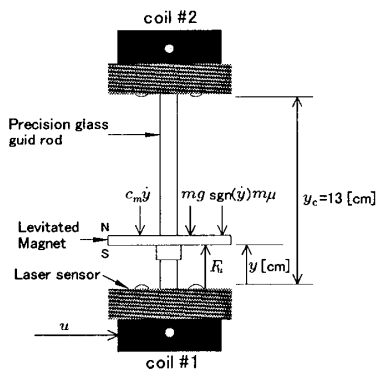


Fig. 1 Schematic diagram of magnetic levitation system

効な手法と考えられる。

## 2. 装置の概要

今回使用した磁気浮上装置の概要を図1に示す。装置には上部と下部にドライブコイルがあるが、本稿では下部のコイルのみを用いて実験を行う。磁石がコイル間でガラスロッドにより支持され、上下方向のみの運動に拘束されている。コイルにはアンプが取り付けられ、入力にはアンプに対する入力電圧であり、それによりコイルに直流電流が流れ、磁界が発生する。正の電圧をかけると磁石に反発力が働き、負の電圧をかけると吸引力が働く。出力は下部にあるレーザ変位計により磁石の高さを計測する。また、装置には $\pm 3[V]$ よりも大きな電圧が連続で加わらないようにする必要がある<sup>(8)</sup>。

## 3. 磁気浮上システムのモデル化

今回使用する装置での磁石の上下運動の運動方程式は、次式で記述される<sup>(8)</sup>。

$$m\ddot{x}_1 = F_u - c_m \dot{x}_1 - mg \quad (1)$$

$$F_u = \frac{u}{a(y+b)^N} \quad (2)$$

ここで、 $x_1$ : 磁石の位置 [m],  $m = 0.12$ : 磁石の質量 [kg],  $c_m$ : 粘性係数 ( $= m\beta$ ),  $g$ : 重力加速度 [ $m/s^2$ ],  $F_u$ : アクチュエータにより発生する磁力 [N],  $u$ : 入力電圧 [V] である。また  $a, b, N$  は未知定数であり、文献<sup>(8)</sup>によると  $3 < N < 4.5$  とされている。ここではさらに、中央に挿入されたガラスロッドと磁石との摩擦の影響も考慮し、

$$m\ddot{x}_1 = F_u - c_m \dot{x}_1 - mg - \text{sgn}(\dot{x}_1)m\mu \quad (3)$$

とする。後述の適応バックステッピング手法では  $m, \beta, g, a, b, N$  が未知として制御系が構成できる。

ここで、 $x_1 = 10^{-2}y[m]$  であり、 $x_2 = \dot{x}_1[m/s]$  とおけば、式(3)は、

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = f_2(x_2) + g_2(x_1)u \\ y = cx_1 \end{cases} \quad (4)$$

と表すことができる。ここに、

$$f_2(x_2) = -\beta x_2 - g - \text{sgn}(x_2)\mu \quad (5)$$

$$g_2(x_1) = \frac{1}{am(cx_1 + b)^N} \quad (6)$$

$$c = 10^2 \quad (7)$$

である。

## 4. 適応バックステッピング制御系設計

システム(4)のように表される二次の一入出力非線形系に対し、文献<sup>(6)</sup>をもとにして構成した二つの適応制御系について述べる。

初めにシステム(4)に対し、以下の仮定をおく。

[仮定]

(1) 未知非線形関数  $f_2(x_2)$  に対し、

$$|f_2| \leq f_{02} |f_{M2}(x_2)| + f_{i2} \quad (8)$$

なる関係を満足する未知正定数  $f_{02}, f_{i2}$  および滑らかな既知関数  $f_{M2}(x_2)$  が存在する。

(2) 未知非線形関数  $g_2(x_1)$  に対し、

$$0 < g_{m2} \leq g_2(x_2) \quad (9)$$

なる関係を満足する未知正定数  $g_{m2}$  が存在する。

これらの仮定に対し、対象とする磁気浮上システムでは、式(5)より

$$f_{02} = \beta, f_{M2} = x_2, f_{i2} = g + \mu \quad (10)$$

とおくことにより、仮定(1)を満足する。また、仮定(2)も式(6)と  $0 \leq x_1 \leq y_c = 0.13[m]$  であることより満足する。

このとき制御目的は、出力  $y$  が与えられた規範信号  $y_r$  に追従する、すなわち微小正定数  $\delta$  に対し、

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |y - y_r| \leq \delta \quad (11)$$

を満足する適応制御器を設計することである。ここに、 $y_r$  は以下の条件を満足する信号である。

$$\begin{cases} |y_r(t)| \leq d_0 \\ |\dot{y}_r(t)| \leq d_1 \end{cases} \quad \forall t \in (0, \infty) \quad (12)$$

$d_0, d_1$  はある正定数である。

4.1 デッドゾーンによる制御系構成 文献<sup>(6)</sup>をもとに、規範出力  $y_r$ [cm] に対し、制御入力  $u = u_d$  を以下のように設計する。ただし、文献<sup>(6)</sup>の制御系構成での最終ステップにおける積分項を一定値  $c_{d2}$  としている。これは、速度のノイズの影響を考慮したためである。また、文献<sup>(6)</sup>での正定値  $\gamma_{nP}$  を  $\gamma_{d21} \sim \gamma_{d24}$  に分割することで、細かな調節を可能にしている。

$$u_d = -\hat{k}_{d2}z_{d2} \tag{13}$$

$$\hat{k}_{d2} = c_{d2} + \hat{k}_{d2P}, \quad c_{d2} > 0 \tag{14}$$

$$\hat{k}_{d2P} = \gamma_{d21}f_{M2}^2 + \gamma_{d22}\hat{k}_{d1}^2x_2^2 + \gamma_{d23}\hat{k}_{d1}^2 + \gamma_{d24}z_{d1}^6$$

$$\gamma_{d21}, \gamma_{d22}, \gamma_{d23}, \gamma_{d24} > 0 \tag{15}$$

$$\alpha_{d1} = -\hat{k}_{d1}z_{d1} \tag{16}$$

$$\hat{k}_{d1} = \gamma_{d1}D(z_{d1})z_{d1}^2, \quad \hat{k}_{d1}(0) \geq 0, \gamma_{d1} > 0 \tag{17}$$

$$D(z_{d1}) = \begin{cases} 0 & \text{for } |z_{d1}| \leq \delta_z \\ 1 & \text{for } |z_{d1}| > \delta_z \end{cases} \tag{18}$$

ここに、 $z_{d2} = 10^2x_2 - \alpha_{d1}$ ,  $z_{d1} = y - y_r = 10^2x_1 - y_r$  であり、 $f_{M2}$  は  $f_{M2} = x_2$  と与えている。また、 $c_{d2}$ ,  $\gamma_{d21} \sim \gamma_{d24}$ ,  $\gamma_{d1}$ ,  $\delta_z$ ,  $\hat{k}_{d1}(0)$  は設計パラメータである。

4.2  $\sigma$  修正による制御系構成 規範出力  $y_r$ [cm] に対し、制御入力  $u = u_\sigma$  を次のように設計する。具体的な制御系の構成法手順および安定性解析は付録 A に示す。

$$u_\sigma = -\hat{k}_{\sigma2}z_{\sigma2} \tag{19}$$

$$\hat{k}_{\sigma2} = c_{\sigma2} + \hat{k}_{\sigma2P}, \quad c_{\sigma2} > 0 \tag{20}$$

$$\hat{k}_{\sigma2P} = \gamma_{\sigma21}f_{M2}^2 + \gamma_{\sigma22}\hat{k}_{\sigma1}^2x_2^2 + \gamma_{\sigma23}\hat{k}_{\sigma1}^2 + \gamma_{\sigma24}z_{\sigma1}^2(\gamma_{\sigma1}z_{\sigma1}^2 - \sigma_1\hat{k}_{\sigma1})^2$$

$$\gamma_{\sigma21}, \gamma_{\sigma22}, \gamma_{\sigma23}, \gamma_{\sigma24} > 0 \tag{21}$$

$$\alpha_{\sigma1} = -\hat{k}_{\sigma1}z_{\sigma1} \tag{22}$$

$$\hat{k}_{\sigma1} = \gamma_{\sigma1}z_{\sigma1}^2 - \sigma_1\hat{k}_{\sigma1}, \quad \hat{k}_{\sigma1}(0) \geq 0, \gamma_{\sigma1} > 0, \sigma_1 > 0 \tag{23}$$

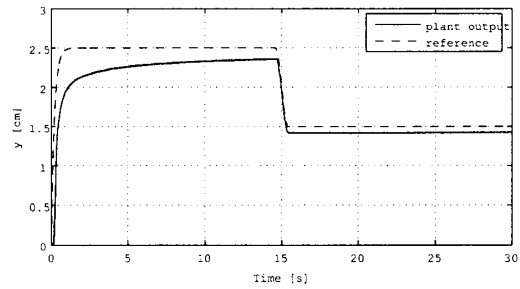
ここに、 $z_{\sigma2} = 10^2x_2 - \alpha_{\sigma1}$ ,  $z_{\sigma1} = y - y_r = 10^2x_1 - y_r$  であり、 $f_{M2}$  は  $f_{M2} = x_2$  と与えている。また、 $c_{\sigma2}$ ,  $\gamma_{\sigma21} \sim \gamma_{\sigma24}$ ,  $\gamma_{\sigma1}$ ,  $\hat{k}_{\sigma1}(0)$  および  $\sigma_1$  は設計パラメータである。

### 5. 実験結果

比較のため本論文では PID による制御実験も行った。PID 制御器は以下のように構成した。

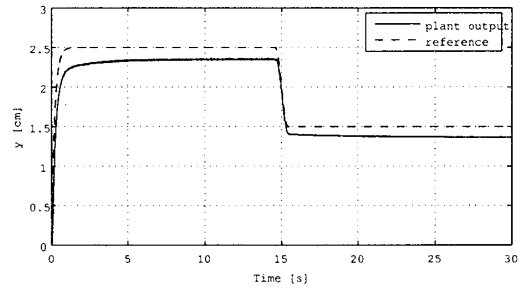
$$u_{PID} = \left( K_p + \frac{K_i}{s} + K_d s \right) [y_r - y] \tag{24}$$

何れの制御手法においても制御系構成において磁石の速度  $x_2$  が必要である。これはセンサから得られる磁石



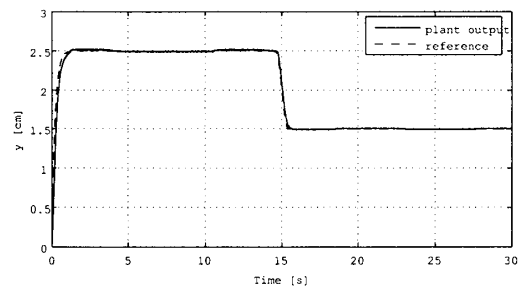
$c_{d2} = 0.1, \gamma_{d21} = 5 \times 10^{-5}, \gamma_{d22} = 5 \times 10^{-5}, \gamma_{d23} = 1 \times 10^{-8}, \gamma_{d24} = 1 \times 10^{-1}, \gamma_{d1} = 4 \times 10, \delta_z = 1 \times 10^{-2} (0.1 \text{ mm}), \hat{k}_{d1}(0) = 20$

Fig. 2 dead-zone



$c_{\sigma2} = 0.1, \gamma_{\sigma21} = 1 \times 10^{-4}, \gamma_{\sigma22} = 1 \times 10^{-4}, \gamma_{\sigma23} = 1 \times 10^{-8}, \gamma_{\sigma24} = 1 \times 10^{-4}, \gamma_{\sigma1} = 1 \times 10^2, \sigma_1 = 5 \times 10^{-2}, \hat{k}_{\sigma1}(0) = 20$

Fig. 3  $\sigma$ -modification



$K_p = 1.1, K_i = 11, K_d = 0.1$

Fig. 4 PID

の位置  $x_1$  を微分することによって得ることとする。ただし、センサから得られる値には高周波ノイズが乗っているため、そのまま微分を行うことは望ましくない。そこで、ここでは、センサより得られる  $x_1$  の値を、試行錯誤により選んだローパスフィルタ  $1/(0.0008s + 1)^2$  に通して雑音を除去した後に差分をとった値を速度  $x_2$  として用いている。磁石の設定位置  $y_r$  は、条件 (12) を考慮して、

$$y_r = \begin{cases} \frac{5}{s+5}[2.5] & \text{for } 0 \leq t < 15 - \frac{5}{12} \\ r & \text{for } 15 - \frac{5}{12} \leq t < 15 + \frac{5}{12} \\ 1.5 & \text{for } 15 + \frac{5}{12} \leq t \end{cases} \tag{25}$$

$$r = -0.5 \sin \frac{2\pi}{T}t + 2, T = \frac{5}{3}$$

とし、サンプリング間隔は 0.5[ms] とした。それぞれの制御手法による実験結果を図 2~図 4 に示す。PID

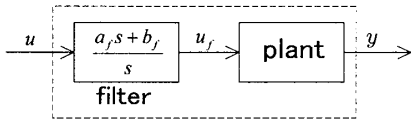


Fig. 5 introduction of filter

制御手法では、様々な規範信号に対して良好であったパラメータを用いている。

PID 制御手法では良好な結果が得られているが、適応バックステッピング法においては、満足のいくような結果が得られていないことが分かる。これは、適応制御手法においては追従誤差が小さくなるようにフィードバックゲインを自動調整するが、ノイズの影響や入力制限により適応ゲイン  $\gamma_{d1}, \gamma_{\sigma 1}$  を大きく設定できず、さらにデッドゾーン  $\delta_z$  や  $\sigma$  修正項を大きく設定しなければならないためである。

### 6. 適応バックステッピング制御手法の改善

デッドゾーンによるバックステッピング制御では  $\delta_z$  を大きく設定しても、外力が加わったときなどにはゲインが上昇し、いずれ装置の入力が破綻してしまう可能性があるため、今回の実験装置には適さないと判断し、 $\sigma$  修正による制御手法でさらなる改善を試みた。

図3によると、入力制限にかからないように選んだ設計パラメータでは、定常偏差が残ることが分かる。そこで、ここでは積分項を加えることで定常偏差を取り除くことを考える。すなわち、式(19)で得られる入力  $u_{\sigma}$  に対し、次のフィルタを導入した(図5)。

$$\frac{a_f s + b_f}{s}, (a_f, b_f: \text{任意正定数}) \quad (26)$$

このフィルタ(26)の導入により、システムの次数が一次増加したことがわかる。そこで次に、システム(4)にフィルタ(26)を導入した系について考察する。

フィルタ(26)は次の状態方程式で表される。

$$\begin{cases} \dot{x}_3 = b_f u \\ u_f = x_3 + a_f u \end{cases} \quad (27)$$

いま、(4)と(27)を併合した系を考えると、

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = f_2(x_2) + g_2(x_1)(x_3 + a_f u) \\ \dot{x}_3 = b_f u \\ y = cx_1 \end{cases} \quad (28)$$

となる。ここで、次の変数変換を行う。

$$\begin{cases} \xi_1 = x_1 \\ \xi_2 = x_2 \\ \xi_3 = x_2 - \frac{a_f}{b_f} g_2(x_1) x_3 \end{cases} \quad (29)$$

$\xi_2, \xi_3$  の微分は式(28)より、

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_2 &= f_2(x_2) + g_2(x_1) \left[ \frac{1}{g_2(x_1)} \frac{b_f}{a_f} (\xi_2 - \xi_3) + a_f u \right] \\ &= f_2(x_2) + \frac{b_f}{a_f} (\xi_2 - \xi_3) + a_f g_2(x_1) u \end{aligned} \quad (30)$$

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_3 &= f_2(x_2) + g_2(x_1)(x_3 + a_f u) - \frac{a_f}{b_f} \dot{g}_2(x_1) x_3 \\ &\quad - \frac{a_f}{b_f} g_2(x_1) b_f u \\ &= f_2(x_2) + g_2(x_1) x_3 - \frac{a_f}{b_f} \dot{g}_2(x_1) x_3 \\ &= - \left[ \frac{b_f}{a_f} - \frac{\dot{g}_2(x_1)}{g_2(x_1)} \right] \xi_3 + \left[ \frac{b_f}{a_f} - \frac{\dot{g}_2(x_1)}{g_2(x_1)} \right] \xi_2 \\ &\quad + f_2(x_2) \end{aligned} \quad (31)$$

となることから、変数変換を行った系は次式で表される。

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = \xi_2 \\ \dot{\xi}_2 = f_2(x_2) + \frac{b_f}{a_f} (\xi_2 - \xi_3) + a_f g_2(x_1) u \\ \dot{\xi}_3 = - \left[ \frac{b_f}{a_f} - \frac{\dot{g}_2(x_1)}{g_2(x_1)} \right] \xi_3 + \left[ \frac{b_f}{a_f} - \frac{\dot{g}_2(x_1)}{g_2(x_1)} \right] \xi_2 \\ \quad + f_2(x_2) \end{cases} \quad (32)$$

いま、式(6)より、

$$\dot{g}_2(x_1) = - \frac{Nc x_1}{am(cx_1 + b)^{N+1}} = - \frac{Nc x_2}{am(cx_1 + b)^{N+1}} \quad (33)$$

であるので、

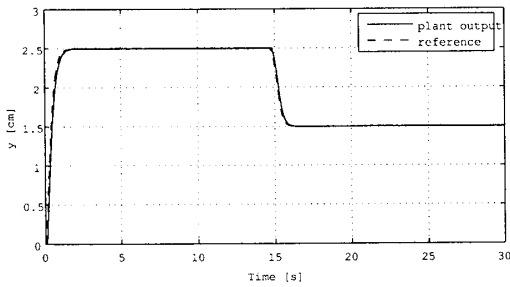
$$\begin{aligned} \dot{\xi}_3 &= - \left( \frac{b_f}{a_f} + \frac{Nc \xi_2}{cx_1 + b} \right) \xi_3 \\ &\quad + \left( \frac{b_f}{a_f} + \frac{Nc \xi_2}{cx_1 + b} \right) \xi_2 + f_2(x_2) \end{aligned} \quad (34)$$

となる。

よって、式(32)のゼロダイナミクスは、式(34)に  $\xi_1 = \xi_2 = 0$  を代入して

$$\dot{\xi}_3 = - \frac{b_f}{a_f} \xi_3 - g \quad (35)$$

を得る。 $g$  は重力加速度(定数外乱)であることから、 $g \equiv 0$  としたゼロダイナミクスは安定である。すなわち、フィルタを含むシステム(32)は相対次数2の安定なゼロダイナミクスを有するシステムであることが分かる。この場合、(19)で構成した制御器をそのまま用いることができる。すなわち、プロパなフィルタ(26)を導入することにより、システム全体の次数は増加するが、相対次数は変化しないため、制御器を再設計することなく、相対次数2のシステムに対して構成した制御器(19)をそのまま用いることができる。なお、構



$$c_{\sigma 2} = 0.1, \gamma_{\sigma 21} = 1 \times 10^{-4}, \gamma_{\sigma 22} = 1 \times 10^{-4}, \gamma_{\sigma 23} = 1 \times 10^{-8}, \gamma_{\sigma 24} = 1 \times 10^{-6}, \gamma_{\sigma 1} = 1 \times 10^2, \sigma_1 = 1, \hat{k}_{\sigma 1}(0) = 20, a_f = 1, b_f = 10$$

Fig. 6  $\sigma$ -modification-2

成された制御系（安定なゼロダイナミクスを持つシステムに対する制御系）の安定性は、付録 A および文献 (9) と同様の手順で示すことができる。

このフィルタを導入した場合、定常偏差が減少するが、それとともに  $\sigma$  修正により推定ゲイン  $\hat{k}_{\sigma 1}$  も減少し、即応性が悪くなる恐れがある。そこで、即応性の悪化を防ぐために  $\sigma$  修正 (23) を

$$\begin{cases} \hat{k}_{\sigma 1 \text{ raw}} = \gamma_{\sigma 1} z_{\sigma 1}^2 - \sigma_1 \hat{k}_{\sigma 1} & (36) \\ \hat{k}_{\sigma 1} = \hat{k}_{\sigma 1 \text{ raw}} \text{ if } \hat{k}_{\sigma 1 \text{ raw}} > \hat{k}_{\sigma 1 \text{ low}}, \hat{k}_{\sigma 1 \text{ low}} > 0 & (37) \\ \hat{k}_{\sigma 1} = \hat{k}_{\sigma 1 \text{ low}} \text{ if } \hat{k}_{\sigma 1 \text{ raw}} \leq \hat{k}_{\sigma 1 \text{ low}} \end{cases}$$

と改良することで  $\hat{k}_{\sigma 1}$  の下限値を設定する。このときの安定性も付録 A と同様にして保証される。

注意：一般には、適応制御手法で推定パラメータの推定範囲を限定するためには、そのパラメータの存在範囲が既知でなければ、安定性は保証されない。しかし、提案手法では、(37) において下限  $\hat{k}_{\sigma 1 \text{ low}} > 0$  をどのような値に設定してもシステムの安定性は保証される。

実験結果を図 6 に示す。ここでは、 $\hat{k}_{\sigma 1}$  の下限値を初期値  $\hat{k}_{\sigma 1}(0)$  と同様に  $\hat{k}_{\sigma 1 \text{ low}} = 20$  としている。提案した改善手法により、良好な結果を得ることができた。

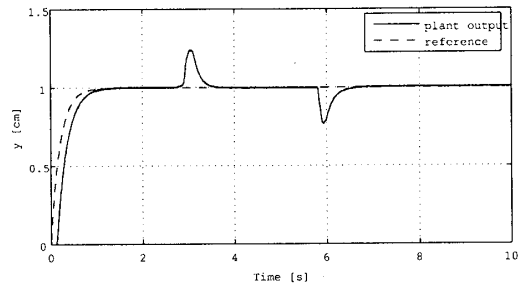
## 7. ロバスト性の検証

次に、ロバスト性の検証の実験を行なった。最初に磁石に 200[g] のおもりを付加した状態で浮かせ、途中 3 秒付近でおもりを取り除き、6 秒付近で再びおもりを付加する。設計パラメータは先の実験と同じ値を用いた。

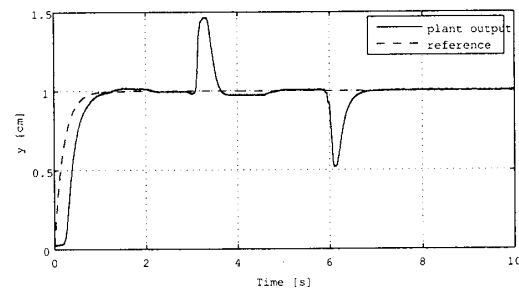
磁石の設定位置  $y_r$  は、

$$y_r = \frac{5}{s+5} [1] \quad (38)$$

とした。提案手法と PID 制御による実験結果をそれぞれ図 7、図 8 に示す。図 7、図 8 から提案手法の方がおもりの負荷の変動に対して、振幅が小さく、良好な結果が得られていることが分かる。なお、図 7、図 8



$$c_{\sigma 2} = 0.1, \gamma_{\sigma 21} = 1 \times 10^{-4}, \gamma_{\sigma 22} = 1 \times 10^{-4}, \gamma_{\sigma 23} = 1 \times 10^{-8}, \gamma_{\sigma 24} = 1 \times 10^{-6}, \gamma_{\sigma 1} = 1 \times 10^2, \sigma_1 = 1, \hat{k}_{\sigma 1}(0) = 20, a_f = 1, b_f = 10$$

Fig. 7  $\sigma$ -modification-2 (experiment 2)

$$K_p = 1.1, K_i = 11, K_d = 0.1$$

Fig. 8 PID (experiment 2)

に見られる制御開始初期の応答の遅れは、おもりを付加したことによる磁石を支持するガイド棒の静止摩擦力の増加等によるものと考えられる。

## 8. 結 言

本報告では、磁気浮上装置に対し適応バックステッピング法による制御系の構成を示し、その実用性について検証した。本実験では、PID 制御でも比較的良好な結果が得られたが、フィルタを導入した  $\sigma$  修正を用いた適応バックステッピング制御では、さらに良好な結果を得ることができた。また、おもりの負荷によるロバスト性についても検証した。

## 文 献

- (1) Polycarpou, M. M. and P. A. Ioannou, A robust adaptive nonlinear control design, *Automatica*, Vol.32, No.3, (1996) pp.423-427.
- (2) Yao, B. and M. Tomizuka, Adaptive robust control of SISO nonlinear systems in a semi-strict feedback form, *Automatica*, Vol.33, No.5, (1997) pp.893-900.
- (3) Jiang, Z-P. and L. Praly, Design of robust adaptive controller for nonlinear systems with dynamic uncertainties, *Automatica*, Vol.34, No.7 (1998) pp.825-840.
- (4) Arslan, G. and T. Basar, Robust output feedback control of strict-feedback systems with unknown nonlinearities, *Proc. of the 38th IEEE Conference of Decision and Control*, Phoenix, Arizona (1999) pp.4748-4753
- (5) Krstic, M. et al., *Nonlinear and Adaptive Control Design*, John Wiley & Sons, NY (1995)

- (6) Mizumoto, I. et al., Robust Adaptive Backstepping Control Based on High-Gain Feedback and Its Application to a CSTR Control, *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series C*, Vol.69, No.686 (2003), pp.2667-2674
- (7) Mizumoto, I. et al., Robust Adaptive Control for Strict-Feedback Nonlinear Systems, *Asian Journal of Control*, Vol.7, No.3 (2005), pp.231-243
- (8) Thomas R. Parks, *Manual For Model 730 Magnetic Levitation System (Instructor's Edition)*
- (9) Mizumoto, I. et al., High Gain Adaptive Output Feedback Control for Time-Varying Nonlinear Systems with Higher Order Relative Degree, *Transactions of the Society of Instrument and Control Engineers*, Vol.40, No.10 (2004), pp.1014-1023.
- (10) Michino, R. et al., Robust High Gain Adaptive Output Feedback Control for Nonlinear Systems with Uncertain Nonlinearities in Control Input Term, *International Journal of Control, Automation, and Systems*, Vol.1, No.1 (2003), pp.19-27.

### 付録 A: $\sigma$ 修正法による制御系構成法

ここでは、適応則に  $\sigma$  修正を用いた制御系構成法を示す。

ステップ 1:

規範出力  $y_r$  に対して、誤差変数  $z_{\sigma 1} = y - y_r = cx_1 - y_r$  を考えると、 $z_{\sigma 1}$ -システムは、

$$\dot{z}_{\sigma 1} = c\dot{x}_1 - \dot{y}_r = cx_2 - \dot{y}_r \quad (\text{A-1})$$

と表される。そこで、この  $z_{\sigma 1}$ -システム内の  $x_2$  に対する仮想入力  $\alpha_{\sigma 1}$  を次のように構成する。

$$\alpha_{\sigma 1} = -\hat{k}_{\sigma 1} z_{\sigma 1} \quad (\text{A-2})$$

$$\dot{\hat{k}}_{\sigma 1} = \gamma_{\sigma 1} z_{\sigma 1}^2 - \sigma_1 \hat{k}_{\sigma 1}, \hat{k}_{\sigma 1}(0) \geq 0, \gamma_{\sigma 1} > 0 \quad (\text{A-3})$$

ここで、次の正定値関数

$$V_{\sigma 1} = \frac{1}{2} z_{\sigma 1}^2 + \frac{1}{2\gamma_{\sigma 1}} (\hat{k}_{\sigma 1} - k_{\sigma 1}^*)^2 \quad (\text{A-4})$$

を考える。ここに、 $k_{\sigma 1}^*$  は  $\hat{k}_{\sigma 1}$  に対する未知理想フィードバックゲインであり、後に決定する。この正定値関数  $V_{\sigma 1}$  の時間微分は、次のようになる。

$$\begin{aligned} \dot{V}_{\sigma 1} &= z_{\sigma 1} (\alpha_{\sigma 1} + z_{\sigma 2} - \dot{y}_r) + (\hat{k}_{\sigma 1} - k_{\sigma 1}^*) z_{\sigma 1}^2 \\ &\quad - \frac{\sigma_1}{\gamma_{\sigma 1}} (\hat{k}_{\sigma 1} - k_{\sigma 1}^*) \hat{k}_{\sigma 1} \end{aligned} \quad (\text{A-5})$$

$$\begin{aligned} &= z_{\sigma 1} (\alpha_{\sigma 1} + z_{\sigma 2} - \dot{y}_r) + (\hat{k}_{\sigma 1} - k_{\sigma 1}^*) z_{\sigma 1}^2 \\ &\quad - \frac{\sigma_1}{\gamma_{\sigma 1}} \left[ (\hat{k}_{\sigma 1} - k_{\sigma 1}^*)^2 + (\hat{k}_{\sigma 1} - k_{\sigma 1}^*) k_{\sigma 1}^* \right] \end{aligned} \quad (\text{A-6})$$

ここに、 $z_{\sigma 2} = cx_2 - \alpha_{\sigma 1}$  である。式 (A-2)、(A-3) で与えた  $\alpha_{\sigma 1}$  の構造から、

$$\begin{aligned} \dot{V}_{\sigma 1} &= z_{\sigma 1} z_{\sigma 2} - z_{\sigma 1} \dot{y}_r - k_{\sigma 1}^* z_{\sigma 1}^2 \\ &\quad - \frac{\sigma_1}{\gamma_{\sigma 1}} \left[ (\hat{k}_{\sigma 1} - k_{\sigma 1}^*)^2 + (\hat{k}_{\sigma 1} - k_{\sigma 1}^*) k_{\sigma 1}^* \right] \end{aligned} \quad (\text{A-7})$$

となる。よって、 $|y_r| \leq d_1$  であることより、 $\dot{V}_{\sigma 1}$  は任意正定数  $\rho_{\sigma 1}$  を用いて、

$$\begin{aligned} \dot{V}_{\sigma 1} &\leq -(k_{\sigma 1}^* - \rho_{\sigma 1}) z_{\sigma 1}^2 - \rho_{\sigma 1} z_{\sigma 1}^2 + d_1 |z_{\sigma 1}| \\ &\quad + z_{\sigma 1} z_{\sigma 2} - \frac{\sigma_1}{\gamma_{\sigma 1}} (\hat{k}_{\sigma 1} - k_{\sigma 1}^*)^2 \\ &\quad - \frac{\sigma_1}{\gamma_{\sigma 1}} (\hat{k}_{\sigma 1} - k_{\sigma 1}^*) k_{\sigma 1}^* \end{aligned} \quad (\text{A-8})$$

と評価できる。また、

$$-\frac{\sigma_1}{2\gamma_{\sigma 1}} (\hat{k}_{\sigma 1} - k_{\sigma 1}^*)^2 - \frac{\sigma_1}{\gamma_{\sigma 1}} (\hat{k}_{\sigma 1} - k_{\sigma 1}^*) k_{\sigma 1}^* \leq \frac{\sigma_1 k_{\sigma 1}^{*2}}{2\gamma_{\sigma 1}} \quad (\text{A-9})$$

$$-\rho_{\sigma 1} z_{\sigma 1}^2 + d_1 |z_{\sigma 1}| \leq \frac{d_1^2}{4\rho_{\sigma 1}} \quad (\text{A-10})$$

となることを考慮すれば、 $V_{\sigma 1}$  の時間微分は、

$$\begin{aligned} \dot{V}_{\sigma 1} &\leq -(k_{\sigma 1}^* - \rho_{\sigma 1}) z_{\sigma 1}^2 - \frac{\sigma_1}{2\gamma_{\sigma 1}} (\hat{k}_{\sigma 1} - k_{\sigma 1}^*)^2 \\ &\quad + z_{\sigma 1} z_{\sigma 2} + R_{\sigma 1} \end{aligned} \quad (\text{A-11})$$

$$R_{\sigma 1} = \frac{d_1^2}{4\rho_{\sigma 1}} + \frac{\sigma_1 k_{\sigma 1}^{*2}}{2\gamma_{\sigma 1}} \quad (\text{A-12})$$

と評価できる。

ステップ 2:

式 (A-11) より  $z_{\sigma 2} = 0$  となれば、制御系は安定となる。そこでここでは、 $z_{\sigma 2}$ -システムを考える。

$z_{\sigma 2}$ -システムは

$$\begin{aligned} \dot{z}_{\sigma 2} &= c\dot{x}_2 - \dot{\alpha}_{\sigma 1} \\ &= c(f_2 + g_2 u) - \left( \frac{\partial \alpha_{\sigma 1}}{\partial x_1} x_2 + \frac{\partial \alpha_{\sigma 1}}{\partial y_r} \dot{y}_r + \frac{\partial \alpha_{\sigma 1}}{\partial \hat{k}_{\sigma 1}} \dot{\hat{k}}_{\sigma 1} \right) \end{aligned} \quad (\text{A-13})$$

と表される。そこで式 (A-13) を考慮し、 $z_{\sigma 2}$ -システム内の実入力  $u = u_{\sigma}$  を

$$u_{\sigma} = -\hat{k}_{\sigma 2} z_{\sigma 2} \quad (\text{A-14})$$

$$\hat{k}_{\sigma 2} = c_{\sigma 2} + \hat{k}_{\sigma 2P}, \quad c_{\sigma 2} > 0 \quad (\text{A-15})$$

$$\begin{aligned} \hat{k}_{\sigma 2P} &= \gamma_{\sigma 21} f_{M2}^2 + \gamma_{\sigma 22} \left| \frac{\partial \alpha_{\sigma 1}}{\partial x_1} \right|^2 x_2^2 + \gamma_{\sigma 23} \left| \frac{\partial \alpha_{\sigma 1}}{\partial y_r} \right|^2 \\ &\quad + \gamma_{\sigma 24} \left| \frac{\partial \alpha_{\sigma 1}}{\partial \hat{k}_{\sigma 1}} \right|^2 \left( \gamma_{\sigma 1} z_{\sigma 1}^2 - \sigma_1 \hat{k}_{\sigma 1} \right)^2 \end{aligned} \quad (\text{A-16})$$

$\gamma_{\sigma 21}, \gamma_{\sigma 22}, \gamma_{\sigma 23}, \gamma_{\sigma 24} > 0$

と構成する。

ここで、次の正定値関数

$$V_{\sigma} = V_{\sigma 1} + \frac{1}{2} z_{\sigma 2}^2 \quad (\text{A-17})$$

を考える。この  $V_{\sigma}$  の時間微分は

$$\dot{V}_{\sigma} = \dot{V}_{\sigma 1} + z_{\sigma 2} \dot{z}_{\sigma 2} \quad (\text{A-18})$$

$$\begin{aligned}
&= \dot{V}_{\sigma 1} + cf_2 z_{\sigma 2} + cg_2 z_{\sigma 2} u_{\sigma} - \frac{\partial \alpha_{\sigma 1}}{\partial x_1} x_2 z_{\sigma 2} \\
&\quad - \frac{\partial \alpha_{\sigma 1}}{\partial y_r} \dot{y}_r z_{\sigma 2} - \frac{\partial \alpha_{\sigma 1}}{\partial \hat{k}_{\sigma 1}} (\gamma_{\sigma 1} z_{\sigma 1}^2 - \sigma_1 \hat{k}_{\sigma 1}) z_{\sigma 2} \\
&\quad - (cg_2 c_{\sigma 2} - \rho_{\sigma 2} - \rho_{\sigma 3}) z_{\sigma 2}^2 \\
&\quad - \frac{\sigma_1}{2\gamma_{\sigma 1}} (\hat{k}_{\sigma 1} - k_{\sigma 1}^*)^2 + R_{\sigma 2} \quad (\text{A-28})
\end{aligned}$$

と評価できる。ここに、

$$\begin{aligned}
R_{\sigma 2} &= R_{\sigma 1} + \frac{cf_{02}^2}{4\gamma_{\sigma 21} g_{m2}} + \frac{1}{4c\gamma_{\sigma 22} g_{m2}} + \frac{d_1^2}{4c\gamma_{\sigma 23} g_{m2}} \\
&\quad + \frac{1}{4c\gamma_{\sigma 24} g_{m2}} + \frac{c^2 f_{12}^2}{4\rho_{\sigma 2}} \quad (\text{A-29})
\end{aligned}$$

である。最後に  $\rho_{\sigma 2} = \rho_{\sigma 3} = cg_2 c_{\sigma 2}/4$  とおき、さらに  $k_{\sigma 1}^*$  が

$$\frac{1}{2} \leq k_{\sigma 1}^* - \rho_{\sigma 1} - \frac{1}{cg_2 c_{\sigma 2}} \quad (\text{A-30})$$

となるように設定すれば、 $V_{\sigma}$  の時間微分は結局

$$\begin{aligned}
\dot{V}_{\sigma} &\leq -\left(k_{\sigma 1}^* - \rho_{\sigma 1} - \frac{1}{cg_2 c_{\sigma 2}}\right) z_{\sigma 1}^2 - \frac{cg_2 c_{\sigma 2}}{2} z_{\sigma 2}^2 \\
&\quad - \frac{\sigma_1}{2\gamma_{\sigma 1}} (\hat{k}_{\sigma 1} - k_{\sigma 1}^*)^2 + R_{\sigma 2} \quad (\text{A-31})
\end{aligned}$$

$$\leq -\alpha_n V_{\sigma} + R_{\sigma 2} \quad (\text{A-32})$$

$$\alpha_n = \min \left[ 2 \left( k_{\sigma 1}^* - \rho_{\sigma 1} - \frac{1}{cg_2 c_{\sigma 2}} \right), cg_2 c_{\sigma 2}, \sigma_1 \right] \quad (\text{A-33})$$

と評価できる。よって、式 (A-32) より、システムの全信号は有界となることがわかる。さらに式 (A-32) から、

$$\lim_{t \rightarrow \infty} V_{\sigma} \leq \frac{R_{\sigma 2}}{\alpha_n} \quad (\text{A-34})$$

が得られる。また  $V_{\sigma}$  の定義より、

$$z_{\sigma 1}^2 \leq 2V_{\sigma} \quad (\text{A-35})$$

であることから、結局

$$\lim_{t \rightarrow \infty} z_{\sigma 1}^2 \leq \frac{2R_{\sigma 2}}{\alpha_n} \quad (\text{A-36})$$

と評価できる。すなわち、 $\delta^2 \geq 2R_{\sigma 2}/\alpha_n$  となる  $\delta$  に対して、制御目的 (11) を満足する。よって、設計パラメータ  $\gamma_{\sigma 1}, c_{\sigma 2}, \gamma_{\sigma 21} \sim \gamma_{\sigma 24}$  を適切に設定することにより、任意の  $\delta$  に対し、制御目的 (11) を満足することができる<sup>(10)</sup>。

上記に従って制御系を構成したとき、次の定理が得られる。

[定理]

仮定 (1), (2) を満足するシステム (4) に対し、ステップ 1, ステップ 2 に従い制御入力  $u$  を式 (19) で構成する。このとき、構成された制御系内の全信号は有界であり、さらに追従誤差は、任意の与えられた正定数  $\delta$  に対し、制御目的 (11) を満足する適切な設計パラメータ  $\gamma_{\sigma 1}, c_{\sigma 2}, \gamma_{\sigma 21} \sim \gamma_{\sigma 24}$  が必ず存在する。

$$\begin{aligned}
&\leq -(k_{\sigma 1}^* - \rho_{\sigma 1}) z_{\sigma 1}^2 - \frac{\sigma_1}{2\gamma_{\sigma 1}} (\hat{k}_{\sigma 1} - k_{\sigma 1}^*)^2 \\
&\quad + |z_{\sigma 1}| |z_{\sigma 2}| + R_{\sigma 1} + cf_{02} |f_{M2}| |z_{\sigma 2}| + cf_{12} |z_{\sigma 2}| \\
&\quad + cg_2 z_{\sigma 2} u_{\sigma} + \left| \frac{\partial \alpha_{\sigma 1}}{\partial x_1} \right| |x_2| |z_{\sigma 2}| + d_1 \left| \frac{\partial \alpha_{\sigma 1}}{\partial y_r} \right| |z_{\sigma 2}| \\
&\quad + \left| \frac{\partial \alpha_{\sigma 1}}{\partial \hat{k}_{\sigma 1}} \right| |\gamma_{\sigma 1} z_{\sigma 1}^2 - \sigma_1 \hat{k}_{\sigma 1}| |z_{\sigma 2}| \quad (\text{A-20})
\end{aligned}$$

と評価でき、さらに仮定 (2) および入力 (19) を考慮すれば、

$$\begin{aligned}
\dot{V}_{\sigma} &\leq -(k_{\sigma 1}^* - \rho_{\sigma 1}) z_{\sigma 1}^2 - \frac{\sigma_1}{2\gamma_{\sigma 1}} (\hat{k}_{\sigma 1} - k_{\sigma 1}^*)^2 \\
&\quad + |z_{\sigma 1}| |z_{\sigma 2}| + R_{\sigma 1} + cf_{02} |f_{M2}| |z_{\sigma 2}| + cf_{12} |z_{\sigma 2}| \\
&\quad - cg_2 z_{\sigma 2}^2 \left[ c_{\sigma 2} + \gamma_{\sigma 21} f_{M2}^2 + \gamma_{\sigma 22} \left| \frac{\partial \alpha_{\sigma 1}}{\partial x_1} \right|^2 x_2^2 \right. \\
&\quad \left. + \gamma_{\sigma 23} \left| \frac{\partial \alpha_{\sigma 1}}{\partial y_r} \right|^2 + \gamma_{\sigma 24} \left| \frac{\partial \alpha_{\sigma 1}}{\partial \hat{k}_{\sigma 1}} \right|^2 (\gamma_{\sigma 1} z_{\sigma 1}^2 - \sigma_1 \hat{k}_{\sigma 1})^2 \right] \\
&\quad + \left| \frac{\partial \alpha_{\sigma 1}}{\partial x_1} \right| |x_2| |z_{\sigma 2}| + d_1 \left| \frac{\partial \alpha_{\sigma 1}}{\partial y_r} \right| |z_{\sigma 2}| \\
&\quad + \left| \frac{\partial \alpha_{\sigma 1}}{\partial \hat{k}_{\sigma 1}} \right| |\gamma_{\sigma 1} z_{\sigma 1}^2 - \sigma_1 \hat{k}_{\sigma 1}| |z_{\sigma 2}| \quad (\text{A-21})
\end{aligned}$$

となる。ここで、

$$-cg_2 \gamma_{\sigma 21} f_{M2}^2 z_{\sigma 2}^2 + cf_{02} |f_{M2}| |z_{\sigma 2}| \leq \frac{cf_{02}^2}{4\gamma_{\sigma 21} g_{m2}} \quad (\text{A-22})$$

$$\begin{aligned}
-cg_2 \gamma_{\sigma 22} \left| \frac{\partial \alpha_{\sigma 1}}{\partial x_1} \right|^2 x_2^2 z_{\sigma 2}^2 + \left| \frac{\partial \alpha_{\sigma 1}}{\partial x_1} \right| |x_2| |z_{\sigma 2}| \\
\leq \frac{1}{4c\gamma_{\sigma 22} g_{m2}} \quad (\text{A-23})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-cg_2 \gamma_{\sigma 23} \left| \frac{\partial \alpha_{\sigma 1}}{\partial y_r} \right|^2 z_{\sigma 2}^2 + d_1 \left| \frac{\partial \alpha_{\sigma 1}}{\partial y_r} \right| |z_{\sigma 2}| \\
\leq \frac{d_1^2}{4c\gamma_{\sigma 23} g_{m2}} \quad (\text{A-24})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-cg_2 \gamma_{\sigma 24} \left| \frac{\partial \alpha_{\sigma 1}}{\partial \hat{k}_{\sigma 1}} \right|^2 (\gamma_{\sigma 1} z_{\sigma 1}^2 - \sigma_1 \hat{k}_{\sigma 1})^2 z_{\sigma 2}^2 \\
+ \left| \frac{\partial \alpha_{\sigma 1}}{\partial \hat{k}_{\sigma 1}} \right| |\gamma_{\sigma 1} z_{\sigma 1}^2 - \sigma_1 \hat{k}_{\sigma 1}| |z_{\sigma 2}| \leq \frac{1}{4c\gamma_{\sigma 24} g_{m2}} \quad (\text{A-25})
\end{aligned}$$

であること、また、任意正定数  $\rho_{\sigma 2}, \rho_{\sigma 3}$  を用いて

$$-\rho_{\sigma 2} z_{\sigma 2}^2 + cf_{12} |z_{\sigma 2}| \leq \frac{c^2 f_{12}^2}{4\rho_{\sigma 2}} \quad (\text{A-26})$$

$$-\rho_{\sigma 3} z_{\sigma 2}^2 + |z_{\sigma 1}| |z_{\sigma 2}| \leq \frac{z_{\sigma 1}^2}{4\rho_{\sigma 3}} \quad (\text{A-27})$$

であることを考慮すれば、 $V_{\sigma}$  の時間微分は、

$$\dot{V}_{\sigma} \leq -\left(k_{\sigma 1}^* - \rho_{\sigma 1} - \frac{1}{4\rho_{\sigma 3}}\right) z_{\sigma 1}^2$$