様式C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成　２１年　５月　２９日現在

研究種目：若手研究(B)
研究期間：　2006　～　2008
課題番号：18749008
研究課題名（和文）　四元数離散系列表現を生成する保型形式の解析的及び数論的研究

研究課題名（英文）　Research of analysis and arithmetic on automorphic forms generating quaternionic discrete series
研究代表者
成田　宏秋（NARITA HIROAKI）
熊本大学・大学院自然科学研究科・准教授
研究者番号：70433315

研究成果の概要：
私は数学の中でも整数論という分野を専攻している。前世期末のフェルマーの最終定理の解決以来、最近の整数論研究の進展は目覚ましいものがあり、難解と思われていた大予想が解かれ始めている。多様な整数論の研究対象の中で私は「保型形式」という豊富な対称性を持つ関数について研究している。この保型形式は昨今の大予想の解決に尽く寄与している。私は研究期間において、研究課題名にある通りの保型形式について整数論的ないしは解析学的な研究結果を得た。

交付額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
2006年度	1,000,000	0	1,000,000
2007年度	1,000,000	0	1,000,000
2008年度	1,200,000	360,000	1,560,000
年度			
年度			
総　計	3,200,000	360,000	3,560,000

研究分野：数物系科学
科研費の分科・細目：数学・代数学
キーワード：保型形式、四元数離散系列表現、テーターリフト、テータ級数、フーリエ係数、保型Ｌ関数の中心値

１．研究開始当初の背景

(1)保型形式論において、主な研究対象は正則保型形式である。しかし実際は、保型形式全体の中で正則保型形式はその極一部を占めるに過ぎず、保型形式の大半は非正則なものである。したがって、研究領域を正則保型形式のみならず非正則保型形式に広げる問題意識は自然と考えられる。
　しかし、そのための研究基盤は正則の場合に比べるとまだ脆弱と言わざるを得ない状況である。実際、非正則保型形式の研究の難しい理由の一つとして、正則の場合と違い複素関数論が使えないことがある。したがって詳しく研究しようとしても、しばしば困難が伴う。このような現状のもと非正則保型形式の詳しい研究に基礎を与えるため、様々な半単純リー群上の球関数が精力的に計算されているが、依然正則保型形式ほど詳しい研究ができる状況にあるとは言えない。

(2) 一方で、「四元数離散系列表現を生成する」という表現論的特徴付けを持つ非正則保型形式については、１９８０年代の荒川恒男氏の研究により、四元数ユニタリー群の場合での保型形式の次元公式の仕事を出発点として研究が始まった。そしてその後、荒川氏の研究を引き継いだ形となった私は、テータリフトやアイゼンシュタイン級数そしてポアンカレ級数などの具体的構成を、この研究期間以前までの研究で得ていた。したがって、この保型形式は非正則保型形式の中でも、比較的詳しい研究を進めやすい状況にあったと言える。

２．研究の目的

四元数離散系列表現を生成する保型形式について、これまで主に研究してきた四元数ユニタリー群の場合の研究を更に深めつつ、それ以外へ場合への研究対象の拡張を目指す。より詳しくは、以下の通りである。
(1)フーリエ展開の理論を既に得た四元数ユニタリー群の場合以外への拡張を試みる。保型形式のフーリエ展開は、保型形式の解析的性質を反映する。そしてフーリエ展開に現れるフーリエ係数は、例えば正則ジーゲルテータ級数のそれは２次形式の整数解を数えるなど、数論的に意義のある情報を持つと期待される。フーリエ展開の理論の構築は保型形式の解析的及び数論的研究の重要な基礎を与えると考えられる。
(2)保型形式の多様な具体的構成を与え、それらについて数論的研究を深める。より詳しくは、既に構成されているものの数論的研究を深めることはもちろん、新しい具体的構成も探り数論的研究の幅を広げる。上の「研究開始当初の背景」(2)で述べたように、四元数ユニタリー群の場合についていくつかの保型形式の具体的構成は与えていたが、そのＬ関数やフーリエ係数の数論的意義などについての数論的研究が十分深まっているとは言えない状況である。したがって、既に具体的に与えられた保型形式についてより詳細な数論的研究を進めることは当然行うべきと言える。また、既に構成されたものに限定せず新しい具体的構成を貪欲に探り、数論的研究の更なる発展を目指す努力も必要と考える。四元数ユニタリー群の場合で研究を深め、可能であれば四元数ユニタリー群以外の場合に研究対象を広げようという目論みである。

３．研究の方法

(1)解析的研究については、保型形式のフーリエ展開の理論を作るべく、一般化ホウィッタカー関数という(一般化された)球関数を知られた特殊関数で記述するという研究が要となる。われわれの考えている場合のように離散系列表現を生成する保型形式のフーリエ展開に現れる一般化ホウィッタカー関数は、シュミッド作用素と呼ばれる微分作用素で消えるという条件で特徴付けられる。この条件は正則保型形式の場合は複素関数論でいうところの「コーシー・リーマン条件」に他ならない。このシュミッド作用素で消えるという条件から導かれる微分方程式を解くことにより、この一般化ホウィッタカー関数を知られている特殊関数で明示的に記述することが可能となる。
(2)半単純リー群の表現論の言葉を用いた、保型形式の特徴付けもここに挙げておく。表現論を保型形式論に応用することは、保型形式をより一般的且つ広い視野で捉える視点を与える。わたくしの研究スタイルは保型形式の具体例を沢山つくり、具体的に与えた個々の保型形式の詳しい研究を蓄積することで研究を充実させるというアプローチである。
　一方、表現論は保型形式全般に共通する一般的な原理を見やすくするものと言える。実際、四元数離散系列表現に注目している理由は、それが非正則離散系列表現の中で正則離散系列表現(それを生成する保型形式は正則保型形式)に振舞が近いことが表現論から分かり、比較的扱いやすと見当が付けられることから来ている。具体的な個々の対象を扱うという問題意識を抱えつつ、それが単なる散発的なものの積み上げにならないよう、表現論的視点も重要と考える。
(3)数論的研究については保型形式をアデール群上の関数として取り扱うことである。これは保型形式が持つ数論的情報を取り出す困難を「素数毎に分割する」というものである。
　これは岩澤-テイトの方法という、リーマンゼータ関数やディリクレ指標に付随するディリクレのＬ関数を、アデール群上の調和解析の観点から解析する手法に端を発し、やがてジャッケ-ラングランズ理論等を経由して、今では保型形式の便利な整数論的記述方法を与えている。これは保型形式が実数体や複素数体などの「無限素点」上の表現論とｐ進体(ｐは素数)のような「有限素点」上の表現論の観点から理解できることを意味する。このような視点に立つと、フーリエ係数やＬ関数などの保型形式に付随する数論的不変量は、無限素点や有限素点上の球関数の研究にしばしば帰着されることが分かる。実際(1)で述べた一般化ホウィッタカー関数というのはフーリエ係数の無限素点と言えるが、フーリエ係数は無限素点及び有限素点のホウィッタカー関数の積として理解できる。

４．研究成果

(1)①「荒川リフト」という楕円カスプ形式と定符号四元数環上の保型形式の組からのテータリフトで与えられる符号(1,1)の四元数ユニタリー群上の保型形式について、そのフーリエ係数をトーラス積分という保型形式に付随する周期積分で明示的に記述する公式を与えた。これは「３．研究の手法」(3)で述べたようにフーリエ係数を無限素点と有限素点の情報に分割するという手法で研究したものである。

我々の得た公式に現れるトーラス積分は、例えば保型形式として所謂「j関数」を取ったときは「singular moduli」として知られているもので、古くからその数論的意義は注目されてきた。そして現在では楕円保型形式を含む一般の四元数環上の保型形式に対するトーラス積分について、その２乗ノルムが保型Ｌ関数の中心値という保型形式の整数論において重要な数論的不変量とが密接に関係することが分っており、それについての詳しい研究はかなり精力的行われている。つまり我々の得た結果は、荒川リフトのフーリエ係数が保型Ｌ関数の中心値との関係から、その数論的意義が理解できることを意味している。

また、この結果の応用として、トーラス積分の非消滅の例を与えることにより荒川リフトの非消滅の例を与えることに成功した。一般にテータリフトの非消滅は「テーターリフトの内積公式」というもので示されると期待される。これはテータリフトの内積をリフトされる保型形式に付随する標準Ｌ関数の特殊値と関係させる公式であり、テータリフトの非消滅を標準Ｌ関数のある特殊値が０にならないことに帰着させる手法である。しかし残念ながら荒川リフトの場合、内積公式に現れるＬ関数の特殊値は発散してしまい応用できない。つまり我々は内積公式が通用しないところでテータリフトの非消滅の例を与えたことになり、ここにこの応用の一つの意義があると言える。そしてこの非消滅の結果はこれまでの荒川リフトについての研究が空でないことを厳密に保証するものであると言うことができる。

②その後問題意識は自然に、荒川リフトのフーリエ係数の２乗ノルムと保型Ｌ関数の中心値との関係を調べる方向に進んだ。そのためにまず荒川リフトに現れる楕円カスプ形式と定符号四元数環上の保型形式に対するトーラス積分と、この２つの保型形式に付随するランキン-セルバーグＬ関数(ベースチェンジの L 関数)の中心値との関係を調べることから始めた。楕円カスプ形式の場合は共同研究者の村瀬篤氏による結果が既にありそれを応用すればよい。定符号四元数環の場合は、ヴァルズプルジェによるトーラス積分の２乗ノルムとランキン-セルバーグ L 関数の中心値を関連させる比例定数についての公式を使って、比例定数を具体的に計算することを試みた。

その結果、楕円保型形式のレベルが１で且つトーラス積分を定義するヘッケ指標がすべての有限素点で不分岐のときに、荒川リフトのフーリエ係数の公式に現れるトーラス積分の２乗ノルムをランキン-セルバーグ L 関数の中心値の積と関連させる比例定数を具体的に決定することができた。これにより、上述と同じ設定の下、荒川リフトのフーリエ係数の２乗ノルムとランキン-セルバーグＬ関数の中心値の積を、関連させる比例定数を明示的に決定するに到った。

そしてその後、結果を更に発展させるために、このフーリエ係数の２乗ノルムを荒川リフトそのものに付随する次数８の保型Ｌ関数の中心値と関係することを期待して研究を更に推し進めた。このようなフーリエ係数の２乗ノルムとＬ関数の中心値との関係は、最初にベヘラー氏がいくつかの具体例に基づいて種数２の正則ジーゲル保型形式の場合において予想し，後に古澤-シャライカ両氏が彼らによって定式化された想的相対跡公式に基づいて、種数２のジーゲル保型形式つまり次数２のシンプレクティック群上の保型形式のみならず、我々の扱っている符号(1,1)の四元数ユニタリー群のような、シンプレクティック群の内部形式上の保型形式一般に成り立つと予想した。しかしこの予想が正しい例は、非正則保型形式でこれまで見つかっていないものと思われる。即ち我々は、この予想の証拠を荒川リフトという非正則保型形式の場合で与えることを試みたのである。

そしてその結果、楕円保型形式がレベル１の場合の荒川リフトと不分岐なヘッケ指標に付随して決まるある次数８の保型Ｌ関数の中心値が、既に得た公式に現れるランキン-セルバーグＬ関数の積と一致することを突き止めた。つまり、荒川リフトの２乗ノルムを荒川リフトに付随する(正確にはヘッケ指標にも依存する)次数８の L 関数と関連させることができたのである。我々が得た公式はベヘラー-古澤-シャライカの予想と両立する形をしている。(村瀬篤氏との共同研究による。)

(2) 既に与えた荒川リフトやアイゼンシュタイン級数及びポアンカレ級数による四元数離散系列表現を生成する保型形式の構成に加えて、符号(1,1)の四元数ユニタリー群の場合で、テータ級数による新しい構成方法を与えた。この構成はこれまでに得られたも

のと全く違うものである。
　これはある符号(2,2)の複素係数のユニタリー群上のベクトル値の特異テータ級数を、符号(1,1)の四元数ユニタリー群に制限して得たものである。このような大きな群上の保型形式を制限して考える方法を思いついた背景には、グロス-プラサド両氏や小林俊之氏等による半単純リー群の許容表現を、その半単純な部分群に制限したときの表現の分岐則に関する仕事がある(つまり、「３．研究手法」(2)が暗にこの結果に生きている)。実際、符号(2,2)の複素ユニタリー群とその部分群と見なせる符合(1,1)の四元数ユニタリー群は、グロス-プラサド予想や小林氏の研究で扱われている典型例の一つである。
　この研究で得たテータ級数の特徴は、これまでに得られた保型形式の構成に比べ比較的シンプルで扱い易いものだということである。またこのテータ級数は無限個の線形独立な四元数離散系列表現を生成する保型形式の族を与えることも確かめることができた。そしてこのテータ級数については、フーリエ係数の代数性などの数論的結果も得た。保型形式の整数論において、フーリエ係数の数論的意義を探るべく、その代数性を示すことは基本的な問題意識である。この我々が与えたテータ級数は四元数離散系列表現を生成するという非正則保型形式でフーリエ係数の代数性が最初に示された例である。
　最後に我々のテータ級数は４次元双曲空間上の保型関数も与えていることを注意する。つまり４次元双曲空間上の実解析的関数で、余体積有限な離散群に関して不変なものを与えている。実際、４次元双曲空間は符号(1,1)の四元数ユニタリー群に対応するリーマン対称空間である。実は３次元双曲空間の場合で、同様の方法により、余体積有限な離散群に関する保型関数が松本圭司氏や吉田正章氏により得られている。彼らは彼ら自身が構成した保型関数を用いて、いくつかの３次元双曲多様体に具体的な幾何学的模型を与えている。我々が与えた４次元双曲空間上の保型関数は、この３次元の場合の幾何学的研究の拡張を与えるのではないかと自然に期待するところである。(山内淳生氏との共同研究による。)

(3) 解析的研究については、この研究期間以前にすでに得た四元数ユニタリー群の場合の四元数離散系列表現に対する一般化ホウィッタカー関数の明示公式を、他の半単純リー群の場合でも与えることを試みた。結果、複素係数のユニタリー群と直交群に対して、極大ユニポテント部分群のユニタリー指標に関するホウィッタカー関数について成果を上げることができた。
　この結果のうち、いわゆる非退化なユニタリー指標の場合はホウィッタカー関数が消えることが既に知られている。我々の結果は極大ユニポテント部分群のすべての退化指標も扱っている。この結果のうち自明な指標の場合は離散系列表現の主系列表現への一意的埋め込み問題という表現論的な応用が考えられる。しかし、フーリエ展開の理論という最終目標からすると、更に研究を要すると判断し引き続き研究を行っている。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔学会発表〕（計５件）
① 成田宏秋、「四元数ユニタリー群上のある実解析的保型形式について」、第５３回代数学シンポジウム、２００８年８月７日、いわて県民情報交流センター
② 成田宏秋、「Fourier expansion of Arakawa lifting」、日本数学会秋季総合分科会一般講演、２００７年９月２４日、東北大学
③ 成田宏秋、「四元数双曲空間上のある実解析的保型形式の具体的構成と数論」、大阪市大ＣＯＥ・京大ＣＯＥ若手合同発表会、２００７年７月１４日、大阪駅前第２ビル大阪市立大学文化交流センター・ホール
④ 成田宏秋、「四元数ユニタリー群 Sp(1,q)上の保型形式の具体的構成とその数論的考察」、談話会、２００７年３月１日、京都産業大学理学部数理科学科
⑤ 成田宏秋、「Automorphic forms on Sp(1,q) generating certain discrete series」, 談話会、２００６年１０月２５日、大阪市立大学理学部数学教室

〔その他〕
ホームページ等
http://www.sci.kumamoto-u.ac.jp/math/index-j.html

６．研究組織
(1)研究代表者
成田　宏秋（NARITA　HIROAKI　）
熊本大学・大学院自然科学研究科・准教授
研究者番号：70433315

(2)研究分担者
（　　）

研究者番号：

(3)連携研究者
（　　）

研究者番号：