

安定性を考慮した周波数領域での部分的モデルマッチング手法による多変数 PID 制御系設計*

岩井 善太^{*1}, 島田 陽平^{*2}
水本 郁朗^{*3}, 江口 和樹^{*4}

Multivariable PID Control Systems Design by Stable Partial Model Matching on Frequency Domain

Zenta IWAI^{*5}, Yohei SHIMADA,
Ikuro MIZUMOTO and Kazuki EGUCHI

^{*5} Department of Mechanical Engineering and Materials Science, Kumamoto University,
2-39-1 Kurokami, Kumamoto-shi, Kumamoto, 860-8555 Japan

In this paper, a tuning method of multivariable PID controllers based on partial model matching on frequency domain is proposed. Different from the previous methods which were considered by authors, in this case, determination of multivariable PID controller parameters is defined as a nonlinear optimization problem with inequality constraints. In this procedure, the objective function is constructed so as to minimize the relative frequency model error between the loop transfer function of the control system and that of reference model system at finite frequency points. Inequality constraints are introduced so as to guarantee the stability criteria of multivariable control system given in Rosenbrock's stability theorem. The effectiveness of the method is illustrated through a simulation of 2-input 2-output system.

Key Words: Partial Model Matching, Frequency Domain, PID Control, Multivariable Control, Gershgorin Theorem

1. 緒 言

PID 制御はプロセス制御を中心に多くの工業分野において最も実用されている制御手法である⁽¹⁾⁽²⁾。PID コントローラパラメータの調整に関しては、Ziegler-Nichols の調整則⁽³⁾を始めとし、現在までに多種多様な調整則が発表されている。また PID パラメータを制御対象の変化に応じて可変とする制御系構成法も提案されている⁽⁴⁾⁽⁵⁾。

さて、PID 制御系設計手法に関しては 1 入出力系 (SISO System) を中心に多く考察されており、多入出力系 (MIMO System) に対する PID コントローラ設計手法については比較的新しい最近の研究が多い^{(6)~(11)}。しかし、それらのほとんどは対象とする MIMO 系の動特性が既知であることを前提としている。しかしながら、実際の多入出力系において数多くの伝達関数を正確に同定することはかなり面倒である

と同時に、それを用いる多数の PID パラメータの同時調整は一般に非常に複雑な手順で定式化されていた。その点を改善するため著者らは伝達関数の代わりにプロセスの周波数応答を有限個の周波数応答点で代表させ、それに基づいて多入出力系の PID 制御器パラメータを制御系の一巡周波数伝達関数応答と多入出力規範モデルの一巡周波数伝達関数応答が、有限個の周波数点上で適合するように定める手法を提案した^{(12)~(14)}。上記手法はプラントの数学モデルを必ずしも正確に同定する必要がなく、制御性能も規範モデルという形で与えることができ、いくつかの周波数点でプラントの周波数応答を求めるだけで(例: 2 入出力の場合は各伝達関数要素に対応して各 3 点以上)有効な PID 制御系設計が可能となるという点で実用であった⁽¹⁵⁾。ただし PID パラメータ調整自体をモデルマッチングのみで行っているため、閉ループ系の安定性が間接的にしか考慮されていない点が問題であった。

そこで本論文では上記手法の問題点を改善する周波数領域上での部分的モデルマッチングに基づく安定性を考慮した多入出力 PID コントローラパラメータ調整法を提案する。この調整法ではこれまで^{(12)~(14)}のアルゴリズムに Rosenbrock の安定定理⁽¹⁷⁾⁽¹⁸⁾に基づ

* 原稿受付 2004 年 4 月 23 日。

^{*1} 正員, フェロー, 熊本大学工学部 (☎ 860-8555 熊本市黒髪 2-39-1)。

^{*2} 日揮(株)エンジニアリング本部 (☎ 220-6001 横浜市西区みなとみらい 2-3-1)。

^{*3} 正員, 熊本大学工学部。

^{*4} 学生員, 熊本大学大学院。

E-mail: iwai@gpo.kumamoto-u.ac.jp

く不等式制約条件を導入している。その結果 PID コントローラパラメータ調整アルゴリズムは有限個の周波数点上での不等式制約条件付非線形最適化問題に帰着される。提案手法は周波数点上でのマッチングで PID 制御器パラメータを決定することには変わりはなく、また提案アルゴリズムで厳密に安定性が満足されるわけではないが、制御を考えている周波数帯においてなるべく少ない周波数点で規範モデルとのマッチングを達成し良い制御性能を実現するとともに、安定性を実用上問題ない程度に保証しようとするものであり、その意味で実際の多入出力 PID 制御系における実用上有効な設計法となるものと考えられる。

以下、2章で提案手法の問題設定を行い、3~6章では本論文で提案する PID パラメータ調整法について説明を行う。最後に提案手法の有効性を検証するために7章で2入出力系に対する数値シミュレーションを示す。

2. 問題の記述

図1に示す m 入出力フィードバック制御系を考える。

ここに

$$G(s) = [g_{ij}(s)]_{i,j=1,\dots,m} \dots\dots\dots (1)$$

は $m \times m$ プラント伝達関数行列で、その各要素は安定かつプロパであるとする。また

$$C(s) = [c_{ij}(s)]_{i,j=1,\dots,m} \dots\dots\dots (2)$$

は $m \times m$ PID コントローラ行列であり、その各要素は

$$c_{ij}(s) = k_{p_{ij}} + \frac{k_{I_{ij}}}{s} + \frac{k_{D_{ij}}s}{1 + \gamma_{ij}s} \dots\dots\dots (3)$$

で与えられる。微分器に関しては、ここでは実装上の問題を考え、不完全微分器を導入している。 $u_M(t)$ は設定入力であるとする。 $u(t)$, $y(t)$ はそれぞれプラントの入出力とする。また閉ループ系の一巡伝達関数行列を

$$\begin{aligned} Q(s) &= G(s)C(s) \\ &= [q_{ij}(s)]_{i,j=1,\dots,m} \\ &= \left[\sum_{p=1}^m g_{ip}(s)c_{pj}(s) \right]_{i,j=1,\dots,m} \dots\dots\dots (4) \end{aligned}$$

と定義する。

次に図2のような設計者にとって望ましい特性を示しかつ閉ループが安定となる規範モデルを考える。

ここでは $G_M(s)$ として

$$G_M(s) = [g_{Mij}(s)]_{i,j=1,\dots,m} \dots\dots\dots (5)$$

なる閉ループ系が安定となる $m \times m$ 対角行列を考える。

上記のように制御系と規範モデル系を構成したときの周波数領域上でのモデルマッチング問題を考える。この場合、 $C(s)$ を PID コントローラ行列に限定しているため、物理的実現可能性から当然のことながら完全なモデルマッチングは達成されない。そこで以下では、この問題に対する一つの現実的な接近方法として、ある周波数領域上の有限周波数点上で両者の差を示す周波数ノルムが最小となる意味で PID 制御系の制御性能が保証され、かつ、閉ループ系に関する周波数領域上の安定条件が有限周波数応答点上では少なくとも満たされるという意味で安定性条件も満たされる手法を提案する。準備として以下にここで考える規範モデルと適合周波数の集合についての説明を行う。

(1) 対角形規範モデル：

以下では式(5)の $G_M(s)$ を対角形

$$G_M(s) = \text{diag}[g_{Mi}(s)], i=1, \dots, m \dots\dots\dots (6)$$

とおく。これは、議論の簡便化と同時に規範モデルの選定を容易にするためである。

(2) 適合周波数集合 Ω_i ：

ある周波数領域 Ω に属する有限個の周波数点集合

$$\Omega_i = [\omega_{i1}, \dots, \omega_{in_i}], i=1, \dots, m \dots\dots\dots (7)$$

で定義される。

3. 損失関数と最小二乗解⁽¹²⁾

Ω_i 上で定義される閉ループ周波数誤差関数

$$\varepsilon_{ij}(j\omega_{ik}) = \frac{g_{Mi}(j\omega_{ik}) - \sum_{p=1}^m g_{ip}(j\omega_{ik})c_{pj}(j\omega_{ik})}{g_{Mi}(j\omega_{ik})} \dots\dots\dots (8)$$

$$\varepsilon_{qi}(j\omega_{ik}) = \frac{\sum_{p=1}^m g_{qp}(j\omega_{ik})c_{pi}(j\omega_{ik})}{g_{Mi}(j\omega_{ik})} \dots\dots\dots (9)$$

$\omega_{ik} \in \Omega_i$
 $i=1, \dots, m$
 $q=1, \dots, m, q \neq i$

を導入する。ここに式(8)は対角成分に対応するものであり、式(9)は非対角成分に対応するものである。

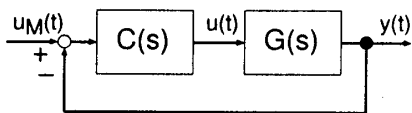


Fig. 1 Block diagram of control system

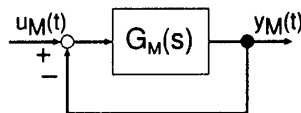


Fig. 2 Block diagram of reference model system

ここでは数値計算における精度を一定に保つため、対角成分で正規化している。式(8), (9)は以下のように書き直すことができる。

$$\varepsilon_{ii}(j\omega_{ik}) = 1 - \phi_{ii}^T(j\omega_{ik})\theta_i \dots\dots\dots (10)$$

$$\varepsilon_{qi}(j\omega_{ik}) = \phi_{qi}^T(j\omega_{ik})\theta_i \dots\dots\dots (11)$$

ただし

$$\phi_{ii}^T(j\omega_{ik}) = \left[A_{i1}(j\omega_{ik}), \frac{A_{i1}(j\omega_{ik})}{j\omega_{ik}}, \frac{j\omega_{ik}A_{i1}(j\omega_{ik})}{1+j\omega_{ik}\gamma_i}, \dots, A_{im}(j\omega_{ik}), \frac{A_{im}(j\omega_{ik})}{j\omega_{ik}}, \frac{j\omega_{ik}A_{im}(j\omega_{ik})}{1+j\omega_{ik}\gamma_i} \right]^T \dots\dots\dots (12)$$

$$A_{ip}(j\omega_{ik}) = \frac{g_{ip}(j\omega_{ik})}{g_{M_i}(j\omega_{ik})}, p=1, \dots, m$$

$$\phi_{qi}^T(j\omega_{ik}) = \left[A_{q1}(j\omega_{ik}), \frac{A_{q1}(j\omega_{ik})}{j\omega_{ik}}, \frac{j\omega_{ik}A_{q1}(j\omega_{ik})}{1+j\omega_{ik}\gamma_i}, \dots, A_{qm}(j\omega_{ik}), \frac{A_{qm}(j\omega_{ik})}{j\omega_{ik}}, \frac{j\omega_{ik}A_{qm}(j\omega_{ik})}{1+j\omega_{ik}\gamma_i} \right]^T \dots\dots\dots (13)$$

$$A_{qp}(j\omega_{ik}) = \frac{g_{qp}(j\omega_{ik})}{g_{M_i}(j\omega_{ik})}, p=1, \dots, m$$

$$\theta_i = [k_{P_{i1}}, k_{I_{i1}}, k_{D_{i1}}, \dots, k_{P_{im}}, k_{I_{im}}, k_{D_{im}}]^T \in \mathbf{R}^{3m}, i=1, \dots, m \dots\dots\dots (14)$$

いま、次の損失関数(lossness function)⁽¹⁶⁾を導入する。

$$J_i(\theta_i) = 2 \sum_{k=1}^{N_i} |\varepsilon_{ii}(j\omega_k)|^2 + 2\beta_i \sum_{q=1}^m \sum_{k=1}^{N_i} |\varepsilon_{qi}(j\omega_k)|^2 = \sum_{k=1}^{N_i} |\varepsilon_{ii}(j\omega_k)|^2 + \sum_{k=1}^{N_i} |\varepsilon_{ii}(-j\omega_k)|^2 + \beta_i \sum_{q=1}^m \left(\sum_{k=1}^{N_i} |\varepsilon_{qi}(j\omega_k)|^2 + \sum_{k=1}^{N_i} |\varepsilon_{qi}(-j\omega_k)|^2 \right) \dots\dots\dots (15)$$

ここに β_i は非対角成分に関する重み係数、 N_i はマッチングを行わせる周波数の個数である。上記損失関数を式(15)の後半部に示したように書換えているのは、そのような表現のもとで式(15)を式(16)のように書き改めることができ、それより θ_i が実数解の形で導けることによる。なお、以下では制約条件式(20), (24)を導く場合においても同様の表現を用いている。さて、式(10), (11)を用いると式(15)は

$$J_i(\theta_i) = (\Psi_c - \Phi_{c_{ii}}\theta_i)^*(\Psi_c - \Phi_{c_{ii}}\theta_i) + \beta_i \sum_{q=1}^m (\Phi_{c_{qi}}\theta_i)^*(\Phi_{c_{qi}}\theta_i) \dots\dots\dots (16)$$

と書き直せる。ここで

$$\begin{aligned} \Psi_c &= [1, \dots, 1]^T \in \mathbf{R}^{N_i}, \Phi_{c_{ii}} = [\phi_{ii}(j\omega_{i1}), \dots, \phi_{ii}(j\omega_{iN_i}), \phi_{ii}(-j\omega_{i1}), \dots, \phi_{ii}(-j\omega_{iN_i})]^T, \\ \Phi_{c_{qi}} &= [\phi_{qi}(j\omega_{i1}), \dots, \phi_{qi}(j\omega_{iN_i}), \phi_{qi}(-j\omega_{i1}), \dots, \phi_{qi}(-j\omega_{iN_i})]^T \end{aligned} \dots\dots\dots (17)$$

である。ただし(*)は共役転置を表す。

全体の損失関数を $\mathbf{J}(\theta)$, $\theta = [\theta_1, \dots, \theta_m]$ とするとき、

$$\mathbf{J}(\theta) = \sum_{i=1}^m J_i(\theta_i) \dots\dots\dots (18)$$

となる。したがって $\mathbf{J}(\theta)$ の最小化は $J_i(\theta_i)$ の最小化にほかならない。式(16)より、 θ_i の最適調整値 $\hat{\theta}_i$ は式(16)の最小二乗解として以下のように定められる。

$$\hat{\theta}_i = \left(\Phi_{c_{ii}}^* \Phi_{c_{ii}} + \beta_i \sum_{q=1}^m \Phi_{c_{qi}}^* \Phi_{c_{qi}} \right)^{-1} \Phi_{c_{ii}}^* \Psi_c \dots\dots (19)$$

と与えられる。上式においてパラメータベクトル θ_i が実数となることは文献(16)と同じ方法により示すことができる。

4. 制御系の安定性を考慮した最小化

3章ではある周波数領域上の有限個の周波数点上で式(15)で定義した損失関数を最小化する意味でPIDコントローラパラメータを、式(19)の形で決定する従

来の方法について述べた⁽¹²⁾。しかし、この方法では、得られるPID制御系が安定であるかどうかは必ずしも保証されない。そこで以下では、図2に示す規範モデル系が安定系に選ばれているとき、閉ループ系のNyquist軌跡が適合周波数点上では少なくともRosenbrock安定定理を満たす。すなわち閉ループ系の非対角要素系からなるGershgorin帯(disks)が常に安定条件を満たすようにPIDコントローラパラメータを決定する問題として定式化する。

4・1 パラメータ調整方針 さて $\mathbf{Q}(s) = \mathbf{G}(s)\mathbf{C}(s)$ は、非対角成分を含むので、安定条件として以下のような条件を考える。

4・1・1 条件1 $\mathbf{Q}(s)$ の対角成分 $q_{ii}(s)$, $i=1, \dots, m$ のNyquist軌跡が、すべての $i, i=1, \dots, m$ で点 $(-1, j0)$ を左に見る。

4・1・2 条件2 $\mathbf{Q}(s)$ の第 i 行、もしくは列Gershgorin帯が、すべての $i, i=1, \dots, m$ で点 $(-1, j0)$ を含まない。

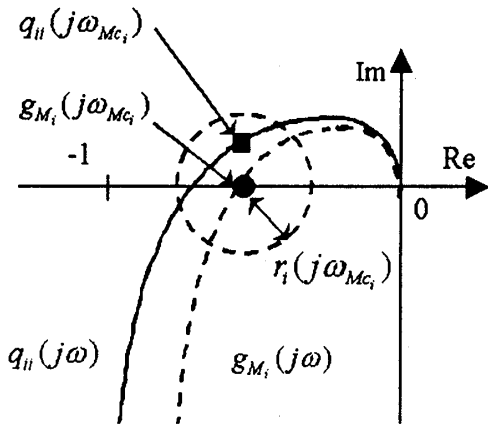


Fig. 3 Determination of diagonal constants near crossover frequency of $g_{M_i}(j\omega)$

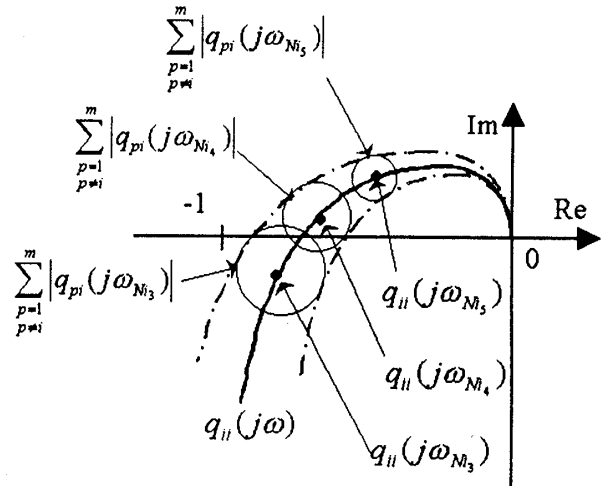


Fig. 4 Explanation of nondiagonal constraints

もし $Q(s)$ と条件を満たす $G_M(s)$ との完全なマッチングが実現できれば上記条件は満足される(その場合 Gershgorin 帯は考えなくてよい)が実際にはそれは実現できない. そこで実際には Ω_i 上で $Q(s)$ の対角成分の Nyquist 軌跡と $G_M(s)$ のそれとがなるべく一致し, かつ対応する Gershgorin 帯(実際には有限個の Gershgorin disks)が条件 2 を満たすようにすることを考える.

4.2 対角成分に関する制約条件について 条件

1 は $g_{ii}(j\omega)$ について Nyquist 軌跡がその位相交さ周波数 ω_{Mci} について, 点 $(-1, j0)$ を左に見ることで満足される. したがって $q_{ii}(j\omega)$ の ω_{Mci} 付近での周波数特性と $g_{M_i}(j\omega)$ のそれとが近ければ条件 1 の満たされる可能性は高くなる. $Q(s)$ の対角成分に関する制約条件はこのような考えに基づいて構成される. 具体的には $g_{M_i}(j\omega)$ の Nyquist 軌跡において $q_{ii}(j\omega_{Mci})$ が $g_{M_i}(j\omega_{Mci})$ を中心とした点 $(-1, j0)$ を含まない半径 $r_i(j\omega_{Mci})$ の円内に存在するように制約条件式を構成する.

4.3 非対角成分に関する制約条件について 条件

2 は還送差行列 $I_m + Q(s)$ が対角優勢であれば満たされる. もし $Q(j\omega)$ の i 番目の対角成分が満たすならば, これは多くの場合, i 番目対角成分の位相交さ周波数付近の周波数特性に支配される場合が多い. したがって $Q(j\omega)$ の第 i 列における Gershgorin 帯を考えたとき, 対角成分 $q_{ii}(j\omega)$ の位相交さ周波数付近の周波数特性が対角優勢を達成しておれば条件 2 の満たされる可能性が高くなる. $Q(s)$ の非対角成分に関する制約条件式は以上の考えに基づいて構成される. 具体的には $Q(j\omega)$ の第 i 列における Gershgorin 帯にお

いて ω_{Mci} を中心に分布する周波数点集合 $\Omega_{ni} = [\omega_{ni1}, \dots, \omega_{nicp}], 0 < \omega_{nicp} < \infty, i = 1, \dots, m$ 上で $|1 + q_{ii}(j\omega_{nik})|$ を中心とした半径 $\sum_{r=1, r \neq i}^m |q_{ri}(j\omega_{nik})|$ の円が点 $(-1, j0)$ を含まないように制約条件式を構成する.

以上の制約条件は, 安定のための条件 1, 2 が満足される可能性が高くなるという意味で決定されるものであることに注意しておく. 図 3, 4 は条件に関し図的な説明を行ったものである.

5. 制約条件の記述と最適化問題

4 章で述べた方針に基づき制約条件を具体的に記述する.

5.1 対角成分に関する制約条件 条件は次式で記述される.

$$\begin{aligned} & \left| g_{M_i}(j\omega_{Mci}) - \sum_{p=1}^m g_{ip}(j\omega_{Mci}) c_{pi}(j\omega_{Mci}) \right|^2 \\ & + \left| g_{M_i}(-j\omega_{Mci}) - \sum_{p=1}^m g_{ip}(-j\omega_{Mci}) c_{pi}(-j\omega_{Mci}) \right|^2 \\ & \leq |r_i(j\omega_{Mci})|^2 + |r_i(-j\omega_{Mci})|^2, i = 1, \dots, m \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (20)$$

この表現は制約条件式を実数内で表現し, θ_i が実数解となることを保証するために用いている⁽¹⁶⁾. 半径 r_i は

$$\begin{aligned} r_i(j\omega_{Mci}) &= \delta_i |g_{M_i}(j\omega_{Mci})| \\ 0 < \delta_i < & \left| 1 + \frac{1}{g_{M_i}(j\omega_{Mci})} \right|, i = 1, \dots, m \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (21)$$

と選ぶ. 式(12)~(14)を用いるように変形すると $|1 - \phi_{ii}^T(j\omega_{Mci})\theta_i|^2 + |1 - \phi_{ii}^T(-j\omega_{Mci})\theta_i|^2 \leq 2\delta_i^2$ $\dots\dots\dots (22)$

となり, さらに書き改めると制約条件は θ_i に関して

$$c_{ai}(\theta_i) = 1 - \delta_i^2 - 2\text{Re}[\phi_{ii}^T(j\omega_{Mci})]\theta_i + \theta_i^T \text{Re}[\phi_{ii}(j\omega_{Mci})\phi_{ii}^*(j\omega_{Mci})]\theta_i \leq 0, i = 1, \dots, m \quad \dots\dots\dots (23)$$

となる。ここに(*)は共役転置を示す。なお δ_i は小さく選ぶとより安定な制御系が実現できるが、制約が厳しくなるため $J_i(\theta_i)$ の最小値が増大する恐れがあるので、選定には注意が必要である。

5.2 非対角成分に対する制約条件 Ω_{ni} で $Q(j\omega) = G(j\omega)C(j\omega)$ の第 i 列における列 Gershgorin 帯が点 $(-1, j_0)$ を含まないように制約条件式をそれぞれの $\omega_{nik}, k=1, \dots, P$ について、対角成分における場合と同様次のように定義する。

$$\left| 1 + \sum_{p=1}^m g_{ip}(j\omega_{nik})c_{pi}(j\omega_{nik}) \right|^2 + \left| 1 + \sum_{p=1}^m g_{ip}(-j\omega_{nik})c_{pi}(-j\omega_{nik}) \right|^2 \geq \alpha_i \left\{ \left| \sum_{q=1}^m \sum_{p=1, p \neq i}^m g_{qp}(j\omega_{nik})c_{pi}(j\omega_{nik}) \right|^2 + \left| \sum_{q=1}^m \sum_{p=1, p \neq i}^m g_{qp}(-j\omega_{nik})c_{pi}(-j\omega_{nik}) \right|^2 \right\}, \alpha_i > 1, i=1, \dots, m, \omega_{nik} \in \Omega_{ni} \quad (24)$$

ただし係数 α_i は Ω_{ni} で点 $(-1, j_0)$ が列 Gershgorin 帯を構成する円板の境界円上に含まれないようにする目的で導入されている。いま

$$\Psi_{ii}(j\omega) = \left[g_{i1}(j\omega), \frac{g_{i1}(j\omega)}{j\omega}, \frac{j\omega g_{i1}(j\omega)}{1+j\omega\gamma_i}, \dots, g_{im}(j\omega), \frac{g_{im}(j\omega)}{j\omega}, \frac{j\omega g_{im}(j\omega)}{1+j\omega\gamma_i} \right]^T \quad (25)$$

$$\Psi_{qi}(j\omega) = \left[g_{q1}(j\omega), \frac{g_{q1}(j\omega)}{j\omega}, \frac{j\omega g_{q1}(j\omega)}{1+j\omega\gamma_i}, \dots, g_{qm}(j\omega), \frac{g_{qm}(j\omega)}{j\omega}, \frac{j\omega g_{qm}(j\omega)}{1+j\omega\gamma_i} \right]^T \quad (26)$$

を定義すると式(24)は

$$\left| 1 + \Psi_{ii}^T(j\omega_{nik})\theta_i \right|^2 + \left| 1 + \Psi_{ii}^T(-j\omega_{nik})\theta_i \right|^2 \geq \alpha_i \left\{ \left| \sum_{q=1}^m \Psi_{qi}^T(j\omega_{nik})\theta_i \right|^2 + \left| \sum_{q=1}^m \Psi_{qi}^T(-j\omega_{nik})\theta_i \right|^2 \right\} \quad (27)$$

のような形に変換でき、これをさらに整理すると以下のような実二次形式で記述することができる。

$$\mathbf{c}_{ni}(\theta_i) \leq \mathbf{0} \quad (28)$$

$$\mathbf{c}_{ni}(\theta_i) = [c_{ni1}(\theta_i), \dots, c_{nip}(\theta_i)]^T \quad (29)$$

$$-c_{nik}(\theta_i) = 1 + 2\text{Re}[\Psi_{ii}^T(j\omega_{nik})\theta_i] + \theta_i^T \left\{ \text{Re}[\Psi_{ii}(j\omega_{nik})\Psi_{ii}^*(j\omega_{nik})] - \alpha_i \left(\sum_{q=1, q \neq i}^m \text{Re}[\Psi_{qi}(j\omega_{nik})\Psi_{qi}^*(j\omega_{nik})] \right) + 2 \text{diag} \left[\sum_{q=1}^{m-1} \sum_{r=q+1}^m \|\Psi_{qi}^T(j\omega_{nik})\|_2 \|\Psi_{ri}^T(j\omega_{nik})\|_2 \right] \right\} \theta_i \quad (30)$$

ただし、 $\|\cdot\|_2$ はユークリッドノルム、 $\text{diag}[\cdot]$ は対角行列を表す。

5.3 最適化アルゴリズム 以上をまとめると、 m 入出力 PID 制御系のコントローラパラメータ $\theta_i, i=1, \dots, m$, は以下の手順で定めることができる。

1. 適合周波数領域を定め、 Ω_i を選ぶ。
2. 制約条件に関する適合周波数集合 Ω_{di}, Ω_{ni} を選ぶ。
3. 適当なパラメータ δ_i, α_i を選定する。
4. 次の不等式制約条件付最適問題を数値的に解く。

目的関数 $J_i(\theta_i) \rightarrow \text{最小}$

制約条件 $c_{di}(\theta_i) \leq 0, \mathbf{c}_{ni}(\theta_i) \leq \mathbf{0}$
 $i=1, \dots, m$

6. $G_M(s)$ と Ω_i の選定等に関する考察

6.1 $G_M(s)$ の選定 $G_M(s)$ (またはその閉ループ伝達関数 $G_{Mc}(s)$) は安定性はもとよりそれ以外の設計条件(ロバスト性, 定常特性など)をすべて含んだものとして一般には与える。したがって設計条件を満たしておれば原則としてはどのように与えてもよい。しか

しながら、PID 調整則では調整パラメータ数が限定されているため $Q(j\omega)$ の特性変化には限界がある。すなわち、規範モデルと現実のプラント伝達関数との間に大きな差があると $G_M(j\omega)$ と $Q(j\omega)$ との間で良好なマッチングを行うことが難しくなる。ここでは、規範モデルの一例として、3次規範モデルをパワーモデル、あるいは2項係数モデルとして与える場合を示す。このモデルの利点は、プラント伝達関数行列要素の位相交さ周波数の概略値がわかっているとき幅広い周波数帯域で適合を行うことができ、また、ゲイン余裕、位相余裕というわかりやすい指標でロバスト性も確認できることにある。以下の三次規範モデルを考える。

$$G_{Mc}(s) = \text{diag}[g_{Mc}(s)]_{i=1, \dots, m} = \text{diag} \left[\frac{\omega_{Moi}^3}{s^3 + \zeta_i \omega_{Moi} s^2 + \zeta_i \omega_{Moi}^2 s + \omega_{Moi}^3} \right]_{i=1, \dots, m} \quad (31)$$

このとき対応する $G_M(s)$ は

$$G_M(s) = \text{diag}[g_{Mi}(s)]_{i=1, \dots, m}$$

$$= \text{diag} \left[\frac{\omega_{M_{0i}}^3}{s^3 + \zeta_i \omega_{M_{0i}} s^2 + \zeta_i \omega_{M_{0i}}^2 s} \right]_{i=1, \dots, m} \dots \dots \dots (32)$$

となる。\$g_{M_i}(j\omega)\$ の位相交さ周波数 \$\omega_{M_{ci}}\$ は

$$\omega_{M_{ci}} = \sqrt{\zeta_i} \omega_{M_{0i}} \dots \dots \dots (33)$$

となる。

良好な制御結果を得るためには \$Q(s)\$ と \$G_M(s)\$ の対角成分が幅広い周波数帯域で適合することが望ましい。そこで \$\omega_{M_{0i}}\$ を

$$\frac{1}{\sqrt{\zeta_i}} \min \{ \omega_{c_{ij}} | j=1, \dots, m \} \leq \omega_{M_{0i}} \leq \frac{1}{\sqrt{\zeta_i}} \max \{ \omega_{c_{ij}} | j=1, \dots, m \} \dots \dots \dots (34)$$

を満たす範囲で与える。ここで \$\omega_{c_{ij}}\$ は \$g_{ij}(j\omega)\$ の位相交さ周波数を表す。上式は \$q_{ii}(j\omega)\$ を構成する \$g_{ij}(j\omega)\$ の位相交さ周波数付近における特性と \$g_{M_i}(j\omega)\$ のそれとを比較し、\$q_{ii}(j\omega)\$ と \$g_{M_i}(j\omega)\$ の位相交さ周波数付近の特性が近くなるように規範モデルを与えることを意味する。なお、\$\zeta_i=2\$ の場合、\$g_{M_i}(s)\$ はバターワースモデルとなり、\$\zeta_i=3\$ の場合は 2 項係数モデルとなる。

6.2 適合周波数

\$m\$ 入出力 PID コントローラパラメータが調節可能なための適合周波数の個数 \$N_i\$ に関してはすでに必要条件として

$$N_i \geq \frac{3m}{2} \dots \dots \dots (35)$$

でなければならないことがわかっている⁽¹⁶⁾。制御効果に関しては適合帯域の選択のほうが周波数点数 \$N_i\$ よりも大きく影響する。シミュレーション結果を見ると帯域が広いと全体としては誤差は小さくても局所的に大きな適合誤差が生じる場合が多い。PID コントローラが多く用いられるプロセス制御の場合には、プロセスの定常特性は低周波帯域における特性に大きく

支配されるため、制御性能の良否は低周波域での適合精度による場合が多い。したがってプロセス制御においては低周波帯域でのモデルマッチングを重視し、\$g_{ii}(s)\$ の位相交さ周波数 \$\omega_{ci}\$ と比較して低周波帯域に \$\Omega_i\$ を選び、かつその分布を対数スケールで等しく取ると、良好な追従結果の得られることが多い。

6.3 \$\theta_i\$ の初期値について

計算上の効率を考えると、3章で述べた最小二乗解を \$\theta_i\$ の初期値とすることが効果的である。

7. 数値シミュレーション

以下の 2 入出系について検討した。

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{0.5}{(0.1s+1)^2(0.2s+1)^2} & \\ & \frac{1}{(0.1s+1)(0.2s+1)^2} \\ & & \frac{4}{(0.1s+1)^2(0.2s+1)^2} \\ & & & \frac{2.4}{(0.1s+1)(0.2s+1)(0.5s+1)} \end{bmatrix} \dots \dots \dots (36)$$

この制御対象要素の位相交さ周波数 [rad/s] は

$$\omega_{c_{11}}=7.07, \omega_{c_{12}}=\omega_{c_{21}}=11.18, \omega_{c_{22}}=4.77 \dots \dots \dots (37)$$

である。規範モデルとしては、式(32)を用い

$$G_M(s) = \begin{bmatrix} \frac{125}{s^3+15s^2+75s} & 0 \\ 0 & \frac{64}{s^3+12s^2+48s} \end{bmatrix} \dots \dots \dots (38)$$

\$\zeta_1=\zeta_2=3.0\$ (2 項係数モデル)

とした。ただし、制御対象の位相交さ周波数式(37)より、\$\omega_{M_{0i}}, \omega_{M_{ci}}(i=1, 2)\$ [rad/s] を式(33), (34)に基づき

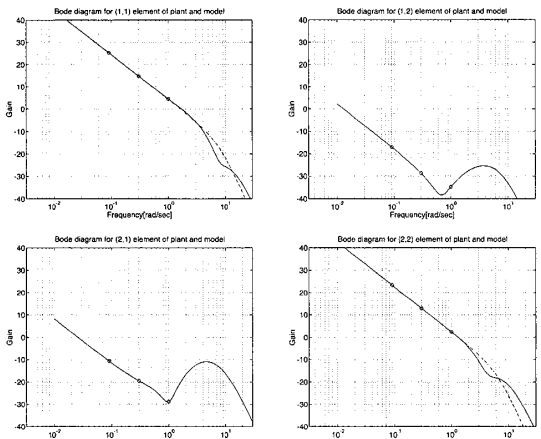


Fig. 5 Matching of loop transfer function between \$G(s)C(s)\$ and \$G_M(s)\$ (gain)

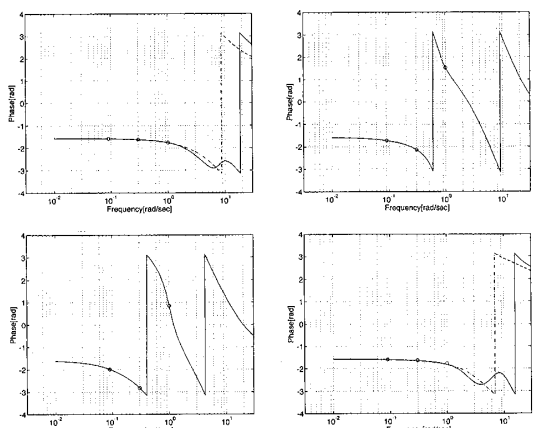


Fig. 6 Matching of loop transfer function between \$G(s)C(s)\$ and \$G_M(s)\$ (phase)

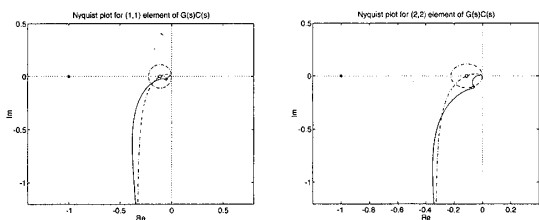


Fig. 7 Nyquist plots of diagonal elements of $G(s)C(s)$

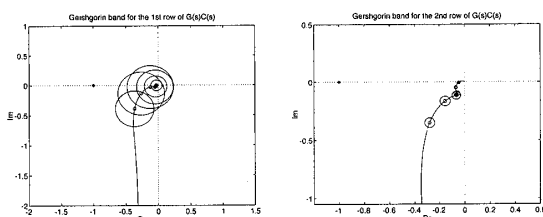


Fig. 8 Gershgorin disks for 1st and 2nd rows of $G(s)C(s)$

$$\begin{aligned} \omega_{M01} &= 5.0, \quad \omega_{M02} = 4.0 \\ \omega_{Mc1} &= 8.66, \quad \omega_{Mc2} = 6.93 \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (39)$$

と決定している。適合周波数を与える式(7)については、式(35)より最小個数3点に取り、また、その範囲は位相交さ周波数よりも低い周波数領域に取って⁽¹⁹⁾

$$\Omega_1 = \Omega_2 = [0.09, 0.3, 1.0] [\text{rad/s}] \quad \dots\dots\dots (40)$$

とした。対角成分に関する制約条件のパラメータは式(39)を参照して

$$\omega_{d1} = 8.7, \quad \omega_{d2} = 6.9, \quad \delta_1 = 1.0, \quad \delta_2 = 1.0 \quad \dots (41)$$

とした。また、非対角成分の制約条件に関するパラメータは次のように決定した。このときの周波数は規範モデルの位相交さ周波数を中心に以下のように6点を選んだ。

$$\begin{aligned} \Omega_{n1} &= [2.98, 4.26, 6.09, 8.7, 12.43, 17.76] \\ \Omega_{n2} &= [2.37, 3.38, 4.83, 6.9, 9.86, 14.09] \\ \alpha_1 &= 1.1, \quad \alpha_2 = 1.1 \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (42)$$

これらの選定は5章で述べた安定性を確保するためのものである。なお、規範入力

$$\begin{cases} u_{M1}(t) = 1, & t \geq 0 \\ u_{M2}(t) = 0, & t < 30[s], 1, & t \geq 30[s] \end{cases} \quad \dots\dots\dots (43)$$

とし、入力側に規範入力の $\pm 20\%$ に値するステップ状外乱⁽²⁰⁾を

$$\begin{cases} d_1(t) = 0.2, & 10 \leq t \leq 20[s], 0, & \text{それ以外} \\ d_2(t) = -0.2, & 40 \leq t \leq 50[s], 0, & \text{それ以外} \end{cases} \quad \dots\dots\dots (44)$$

のように加えた。また式(3)の不完全微分パラメータは、 $\gamma_1 = \gamma_2 = 0.1$ とした。

以上のパラメータと既述のアルゴリズムを用いて

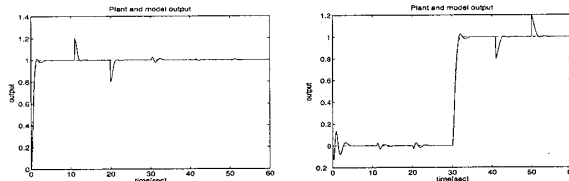


Fig. 9 Outputs of the plant with disturbance

PID パラメータを導出した結果、以下の結果が得られた。

$$\begin{aligned} [k_{P11}, k_{I11}, k_{D11}] &= [0.45, -1.37, -0.20] \\ [k_{P12}, k_{I12}, k_{D12}] &= [0.09, 1.87, 0.09] \\ [k_{P21}, k_{I21}, k_{D21}] &= [0.06, 0.58, 0.02] \\ [k_{P22}, k_{I22}, k_{D22}] &= [0.008, -0.23, -0.005] \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (45)$$

図5, 6は規範モデルとの適合度合いを、一巡伝達関数の周波数応答で表示したものである。実際には、適合周波数(○印)のみでの計算であるが、ここでは理解の便のためそれら以外についても示している。低周波領域での一致はよく、また非対角成分のゲインが小さくなっており、非干渉化が達成されていることがわかる。図7, 8は安定条件について見たものであり、対角成分については規範モデルの位相交さ周波数の周波数応答近傍にプラントのそれが位置していること、非対角成分に関しては、Gershgorin 円板が安定条件を満たしていることがわかる。図9はプラントに外乱が印加されているときの出力を示したものであるが、規範モデル出力によく追従していることがわかる。本例では制約条件付逐次二次計画法⁽²¹⁾を用いて計算を行った。その際の初期条件としては式(19)で示した最小二乗解を用いた。式(38)に示した最適解は約10ステップの計算で得られた。なお、最小二乗解では閉ループ系は本例に関しては不安定となった。

8. 結 言

本論文ではこれまでに著者らが提案した周波数領域における部分的モデルマッチング手法に基づく多変数 PID 制御系設計手法を改善し、制御性能の実現と同時に、得られる制御系の安定性も保証されるアルゴリズムを、不等式制約条件付非線形最適化問題として定式化した。本手法は多入出力制御対象の有限個の周波数応答を求めるだけで、PID パラメータを定めることができる。特に共振ピーク等をあまり持たないプロセス系等に関しては低周波領域での数点の周波数応答 [その決定については文献(12), (13)参照] のみで PID 制御系が設計できるなどの実用性に富んだ特徴を有している。

文 献

- (1) Åström, K. and Hägglund, T., *PID Controllers-Theory, Design and Tuning*, (1995), 1-4, ISA.
- (2) 須田信英・ほか 16 名, PID 制御, (1992), 7-8, 朝倉書店.
- (3) Ziegler, J. G. and Nichols, N. B., Optimum Setting for Automatic Controllers, *Trans. ASME*, **64** (1942), 759-768.
- (4) Åström, K. and Hägglund, T., Automatic Tuning of Simple Regulators with Specifications on Phase and Amplitude Margins, *Automatica*, **20**-5 (1984), 645-651.
- (5) Yusef, R., Omatu, S. and Khalid, M., Self-tuning PID Control: A Multivariable Derivation and Application, *Automatica*, **30**-12 (1994), 1975-1981.
- (6) Luyben, W. L., Simple Method for SISO Controllers in Multivariable Systems, *Ind. Eng. Chem. Process Des. Dev.*, **25** (1986), 654-660.
- (7) Seraji, H. and Tarokh, M., Design of PID Controllers for Multivariable System, *Int. J. Control*, **32**-4 (1980), 661-668.
- (8) Koivo, H. N. and Tanntu, J. T., Tuning of PID Controllers: Survey of SISO and MIMO Techniques, *Preprints of IFAC Symp. on Intelligent Tuning and Adaptive Control*, Session 1 (1990), 75-81, Singapore.
- (9) Ho., H. K., Lee, T. H. and Gan, O. P., Tuning of Multiloop PID Controllers based on Gain and Phase Margin Specifications, *Proc. 13th IFAC World Congress*, M (1996), 211-216.
- (10) Wang, Q. G., Hang, C. C. and Zhou, B., A Frequency Response Approach to Auto-tuning of Multivariable PID controllers, *Proc. 13th Triennial World Congress*, K (1996), 295-300, San Francisco, USA.
- (11) Wang, Q. G., Biao, Z., Lee, T. H. and Bi, Q., Auto-tuning of Multivariable PID Controllers from Decentralized Relay Feedback, *Automatica*, **33**-3 (1997), 319-330.
- (12) 江頭豊一・岩井善太, 周波数領域での多入出力 PID 制御器調整とその応用, *機論*, **63**-616, C (1997), 4264-4271.
- (13) 江頭豊一・岩井善太・竹山嘉和, 周波数領域上での適応 PID コントローラ構成法, *機論*, **63**-613, C (1997), 3082-3087.
- (14) Mizumoto, I., Iwai, Z. and Egashira, T., Decentralized PID Control Systems Design on Frequency Domain and Their Stability, *JSME Int. J.*, Ser. C, **42**-1 (1999), 93-101.
- (15) 岩井善太・王建坤・鄧明聡・永田正伸・神澤龍市, 周波数領域での部分的モデルマッチングによる倉庫内搬送車のアクティブ振動制御, *機論*, **65**-640, C (1999), 4677-4683.
- (16) Källén, P. O., Frequency Domain Adaptive Control, Licensed thesis TFRT-3211, *Department of Automatic Control, Lund Institute of Technology*, (1992), 15-67, Lund, Sweden.
- (17) Sinha, P. K., *Multivariable Control*, (1984), 360, Marcel Dekker.
- (18) Rosenbrock, H. H., *Computer-Aided Control System Design*, (1972), 145-147, Academic Press.
- (19) Iwai, Z., Shimada, Y., Mizumoto, I. and Mingcong, D., Design of Multivariable PID Controllers on Frequency Domain Based on Partial Model Matching, *Proc. 14th IFAC World Congress*, C (1999), 295-300.
- (20) Fisher, D. G. and Seborg, D. E., Multivariable Computer Control (a case study), (1976), 98-107, North-Holland.
- (21) Branch, M. A. and Grace, A., *MATLAB Optimization Toolbox User's Guide*, (1996), 3.19-3.24, The Mathworks Inc.