

## プロセス系の3パラメータモデル近似における同定精度と制御性能\*

### (Prony法による同定とモデル駆動PID制御系での検討)

岩井善太<sup>\*1</sup>, 水本郁朗<sup>\*2</sup>, 永田正伸<sup>\*3</sup>  
公文誠<sup>\*2</sup>, 久保佳寛<sup>\*4</sup>

## Accuracy of Identification and Control Performance in 3 Parameter Process Model Approximations (Identification by Prony's Method and Examination through Model-Driven PID Control System Design)

Zenta IWAI<sup>\*5</sup>, Ikuro MIZUMOTO, Masanobu NAGATA,  
Makoto KUMON and Yoshihiro KUBO

<sup>\*5</sup>Department of Mechanical Engineering and Materials Science, Kumamoto University,  
2-39-1 Kurokami, Kumamoto-shi, Kumamoto, 860-8555 Japan

In this paper, very simple method based on Prony method, which is known as one of the most representative methods in the exponential analysis method, is presented by which transfer function models for processes can easily be obtained. Here, the method is reformed and applied to obtain the so-called 3 parameter model (first-order transfer function with pure time delay model) from the data of the step response of the process system. The method gives different process models by changing the identification interval. Here the relation between the accuracy of identification and identification interval is considered from the viewpoint of integrated absolute error and integrated squared error. The obtained results are examined by applying it to the design of model-driven PID control of a typical test batch process model.

**Key Words:** Exponential Analysis, Prony Method, Process Control, Time Delay, Model-Driven PID, Step Response

### 1. 緒 論

プロセス系の伝達関数を低次モデル+むだ時間系として近似し, それに基づいて制御系設計を行うことはよく知られている<sup>(1)-(3)</sup>. PID制御系構成に関しては, Ziegler and Nicholsの調整則, Chien, Hrones and Reswickの調整則, Cohen and Coonの調整則などの代表的なPIDパラメータ調整則<sup>(3)</sup>は, プロセスの一次遅れ+むだ時間近似モデル [呼称が長いので以下文献(2)に基づき3パラメータモデルと呼ぶ]に基づいて決定されている. さて, 内外のPID制御に関する上記の代表的な文献を参照すると, このモデルは基本的にはステップ応答から図式的に導出されている<sup>(2)-(5)</sup>. これは, プロセス系は一般に遅れを含む高次非線形系とみなされることが多いので, 線形系に対する一般的同定手法を用いても必ずしも良い結果が得られるとは限らないことや, ステップ応答が単調である

場合には上述の3パラメータモデルや, その他の低次近似モデルを用いて制御系を設計しても実用上十分な制御効果の期待できることが多いことによる. また, ステップ応答による同定は例えばセットポイント変化で行えるので同定のための特別な入力が必要とせず操業途中でも適用でき, 現場向きであるともいえる. しかしながら, ステップ応答から図式解法をベースに良い近似伝達関数を求めることは実際にはかなり難しい. ところが上述したPIDパラメータ調整則は3パラメータモデルのパラメータ値から直接決定されるので, モデル精度は制御性能に大きく影響する. しかしながら, これまでの実際のステップ応答データからの3パラメータモデル導出法に関しては, その同定精度およびそれが制御性能に及ぼす影響についてあまり考察されていなかった. それは導出法の多くが定量的な同定精度と関連づけるには不向きな手法だったことによる.

本論文では, まず, 指数解析法的一种であるProny法を用いて, ステップ応答から伝達関数を一般的に求める方法を提案し, その応用として3パラメータモデルが求められることを示す. Prony法は, 物理計測やモード解析で以前から用いられている解析手法であるが<sup>(6)(7)</sup>, それが制御系の伝達関数導出に応用できる

\* 原稿受付 2004年3月17日.

<sup>\*1</sup> 正員, フェロー, 熊本大学工学部(☎860-8555 熊本市黒髪2-39-1).

<sup>\*2</sup> 正員, 熊本大学工学部.

<sup>\*3</sup> 正員, 熊本電波工業高等専門学校(☎861-1112 熊本県菊池郡西合志町須屋2659-2).

<sup>\*4</sup> 学生員, 熊本大学大学院自然科学研究科.

E-mail: iwai@gpo.kumamoto-u.ac.jp

ことを示した報告は著者らを除いてはまだない。ここでは上記提案手法が実際にプロセス制御問題で最もよく用いられる3パラメータモデル導出にも適用できることを示し、良い近似を与える3パラメータモデルとそれを制御系設計に用いた場合の制御性能についてテストバッチ(典型的とみなされるいくつかのプロセスモデル)で検討する。制御系設計適用例としては、最近注目を集めているモデル駆動形PID制御法を用いる。なぜならこの手法はプロセスの3パラメータモデルに依存した制御系設計手法であり、モデルの精度が制御結果に直接影響すると思われるからである。

2. Prony 法によるステップ応答からの伝達関数の決定

対象とする  $n$  次1入力線形時不変系は、相異なる  $n$  個の特性根  $-\lambda_1 \cdots -\lambda_n$  を持つと仮定する。以下では簡単のためそれらは負の実数とする(負の実部を持つとしても以下の議論の一般性は失われない)。このときプラントのステップ応答は一般に

$$\tilde{y}(t) = \sum_{i=1}^n a_i e^{-\lambda_i t} + \gamma, \quad t \geq 0 \quad (1)$$

と与えられる。あるいは、 $y(t) = \tilde{y}(t) - \gamma$  とおけば、

$$y(t) = \tilde{y}(t) - \gamma = \sum_{i=1}^n a_i e^{-\lambda_i t}, \quad t \geq 0 \quad (2)$$

となる。これを指数解析形式といい、これに基づき  $(a_i, \lambda_i)$  を同定する手法を指数解析法という。以下プラントの応答がこの形式を取るものとして議論を進める。ただし、次数  $n$  と定数  $\gamma$  は既知とする。

いま、出力  $y(t)$  をサンプリング時間  $T$  でサンプルしたとする。そして  $2n$  個のサンプル点における出力値、例えば  $y(0), y(T), \dots, y((2n-1)T)$  が測定できるものとする。このとき

$$e^{-\lambda_i T} = x_i, \quad y_j = y_j(jT), \quad i=1, \dots, n, \quad j=0, 1, \dots, 2n-1 \quad (3)$$

とおけば、式(2)、(3)より

$$\begin{aligned} y_0 &= a_1 + \dots + a_n \\ y_1 &= a_1 x_1 + \dots + a_n x_n \\ &\vdots \\ y_k &= a_1 x_1^k + \dots + a_n x_n^k \\ &\vdots \\ y_{2n-1} &= a_1 x_1^{2n-1} + \dots + a_n x_n^{2n-1} \end{aligned} \quad (4)$$

なる  $2n$  個の未知数  $a_i, x_i, i=1, \dots, n$  に対する  $2n$  個の方程式を得る。上式は非線形代数方程式であり、直接解くことは難しいが、Prony は以下のような解法を提案している<sup>(6)</sup>。いま  $x_1, \dots, x_n$  を

$$(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)=0 \quad (5)$$

あるいはそれと等価な

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0, \quad a_n = 1 \quad (6)$$

の根とする。上式で  $a_0, \dots, a_{n-1}$  を決定できれば、式(6)の  $n$  個の根  $x_i$  から

$$\lambda_i = -\frac{1}{T} \log x_i, \quad i=1, \dots, n \quad (7)$$

と決定できる。以下では Prony の最初の提案を修正し、 $y$  に関し  $2n$  個以上の点が取れるものとして一般化する。いま、式(4)の  $k$  番めの式に  $a_0$  を乗じ、 $k+1$  番めに  $a_1$  を乗じる。以下  $k+2, \dots, k+n$  の式に順に  $a_2, \dots, a_n$  を乗じ各辺を加え合わせると

$$a_0 y_k + a_1 y_{k+1} + \dots + a_n y_{k+n} = \sum_{i=1}^n a_i x_i^k (a_0 + a_1 x_i + \dots + a_n x_i^n) \quad (8)$$

を得る。 $x_i$  は式(6)の根と仮定しているので、

$$a_0 y_k + a_1 y_{k+1} + \dots + a_n y_{k+n} = 0 \quad (9)$$

を得る。以下出発点を  $k+1, k+2, \dots$  とずらして同様の操作を行うことにより

$$a_0 y_j + a_1 y_{j+1} + \dots + a_n y_{j+n} = 0, \quad j=k, k+1, \dots, k+n, \dots \quad (10)$$

を得る。したがって、パラメータ  $a_i$  は

$$\bar{\beta} = -(\bar{N}^T \bar{N})^{-1} \bar{N}^T \bar{y} \quad (11)$$

$$\bar{\beta} = \begin{bmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{bmatrix}, \quad \bar{y} = \begin{bmatrix} y_{k+n} \\ \vdots \\ y_{k+2n} \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$\bar{N} = \begin{bmatrix} y_k & y_{k+1} & \dots & y_{k+n-1} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ y_{k+n-1} & y_{k+n} & \dots & y_{k+2n-1} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \end{bmatrix}$$

なる最小二乗解として定められる。ただし、 $\bar{N}^T \bar{N}$  の正則性は仮定している。これより、式(7)の  $n$  個の根  $x_i$  を定めることができ、それを式(4)に代入して式(10)~(12)と同様にして  $a_i$  を定めることができる。ただし、 $\bar{X}^T \bar{X}$  の正則性は仮定している。

$$\bar{\alpha} = (\bar{X}^T \bar{X})^{-1} \bar{X}^T \bar{y} \quad (13)$$

$$\bar{\alpha} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}, \quad \bar{y} = \begin{bmatrix} y_k \\ \vdots \\ y_{k+n} \\ \vdots \end{bmatrix}, \quad \bar{X} = \begin{bmatrix} x_1^k & x_2^k & \dots & x_n^k \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ x_1^{k+n} & x_2^{k+n} & \dots & x_n^{k+n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \end{bmatrix} \quad (14)$$

なお、Prony は、式(4)の前半の  $n$  個の関係式のみを用いてパラメータを決定しているが、実際には測定データにはノイズが含まれるので、ここでは最小二乗解

を用いる手法に拡張して記述している。また、得られた結果から伝達関数は容易に求めることができる。例えば二次系として求めた場合、

$$G(s) = \frac{-(a_1\lambda_1 + a_2\lambda_2)s + \gamma\lambda_1\lambda_2}{(s + \lambda_1)(s + \lambda_2)}$$

となる。数値例による基本的な検討の一部はすでに文献(10)でなされている。3章以降では、本手法の3パラメータモデル導出への適用について論じる。

なお、実システムが正確にモデル(2)で近似される場合には、上述の  $\bar{N}^T \bar{N}$ ,  $\bar{X}^T \bar{X}$  の正則性は  $n$  点以上の測定で満たされる(付録参照)。

また、同定に用いた有限時間区間を  $T_i$  とするとき、サンプリング時間  $T$  は少なくとも  $T \leq T_i/n$  を満たしていなければならない。実際の適用においては、 $T$  が小さいとノイズの影響が出るのでフィルタを使用した定常値でのデータ使用を避けるなどの注意が必要である<sup>(10)</sup>。

### 3. 3パラメータモデル近似

プロセス系を、ゲイン  $K$ 、時定数  $\bar{T}$ 、むだ時間  $L$  よりなる3パラメータモデル

$$G(s) = \frac{K}{1 + \bar{T}s} e^{-Ls} \quad \dots\dots\dots (15)$$

で近似し、各パラメータ値から例えばPID制御系パラメータを決定することは、よく知られている<sup>(1)~(5)</sup>。このモデル導出に、2章で述べた手法を適用する。

いま

$$\begin{aligned} \hat{y}(t) &= ae^{-\lambda(t-\tau)} + \gamma, \quad t \geq \tau \\ y(t) &= \hat{y}(t) - \gamma = \bar{a}e^{-\lambda t}, \quad t \geq \tau \quad \dots\dots\dots (16) \\ \bar{a} &= ae^{\lambda\tau} \end{aligned}$$

なるモデルを考える。ここに、 $\gamma$  はステップ応答の定常値、 $\tau$  はむだ時間、 $\lambda > 0$  は指数減衰を示す。問題は、ステップ入力に対する出力  $y_k$  から  $\tau, \lambda$  を求めることに帰着される。ただし、 $\gamma$  は既知とする。

(1)  $\lambda, \bar{a}$  の決定。

$e^{-\lambda T} = x$  とおく。このとき

$$y_k = \bar{a}x^k, \quad k = k_0, k_0 + 1, \dots \quad \dots\dots\dots (17)$$

ただし、 $k_0 T \geq \tau > 0$  となる  $k_0$  は存在するものとする。ここで

$$a_0 + a_1 x = 0, \quad a_1 = 1 \quad \dots\dots\dots (18)$$

が成立するように  $a_0$  を定める。式(10)に対応させて

$$a_0 y_k + y_{k+1} = 0, \quad k = k_0, k_0 + 1, \dots, k_0 + k_1, \quad k_1 \geq 1 \quad \dots\dots\dots (19)$$

を導く。上式で  $y_k$  の代わりに測定値  $\hat{y}_k$  を用い、式(11)で、 $a_0$  の最小二乗推定値を求め、式(18)に代入することで

$$\lambda = -\frac{1}{T} \log(-a_0) \quad \dots\dots\dots (20)$$

を得る。また、式(17)と式(18)より、 $\bar{a}$  を得る。

(2)  $\alpha, \tau$  の決定

仮定より、 $\hat{y}(\tau) = 0$  なので、式(16)から

$$\alpha = -\gamma, \quad \tau = \frac{1}{\lambda} \log \frac{\bar{a}}{\alpha} \quad \dots\dots\dots (21)$$

と定まる。

(3) 3パラメータモデルとの対応

$$\bar{T} = \frac{1}{\lambda}, \quad L = \tau, \quad K = \gamma \quad \dots\dots\dots (22)$$

となる。

## 4. 同定精度の検討

さて、システムのステップ応答が、非振動的でかつ単調増加であるならば(monotone response)、そのシステムは3パラメータモデルで近似できる。しかし、2章での方法を用いるとき、式(19)で同定開始時刻  $k_0 T$  と終了時刻  $(k_0 + k_1) T$  をどのように取るかで、時定数  $\bar{T}$  とむだ時間  $L$  の値は大きく変化する。ところがこれらの値はPID制御パラメータ選定に直接影響を与えるため制御性能が大きく変化する。ところがこれまで多くの3パラメータモデル導出法が提案され、実用されているにもかかわらず、この点に関して考察した例はほとんどない。よく知られている、ステップ応答の最大こう配の接線から  $\bar{T}, L$  を定める方法にしても<sup>(5)</sup>、雑音を含む実データから最大こう配を求めることの難しさはさておいても、それがなんらかの意味で“良い”近似モデルであるということを一般的に論じるのは難しい。Astromらは、同定区間を時間軸で設定するのではなく、初期値と定常値の間を100%とし、33~66%区間でカーブフィッティングを行うことを提案している<sup>(2)</sup>。3パラメータモデル導出をオンラインで行う必要性はあまりないのでこのような方法のほうが時間軸上で同定区間を設定するよりわかりやすく実用的である。ただ、彼らの提示した区間での同定が“良い”モデルを与えるかどうかについての言及はなされていない。

以下では、初期値-定常値区間のどの部分に対応した時間区間で同定を行ったらいかにについて、テストバッチを用いて検討する。近似モデルは3パラメータモデルであっても、それに対応するもとのシステムはさまざまな高次(非線形)系であり、同定誤差を解析的に論じるにはあまりにも問題設定が複雑になることがテストバッチを用いる理由である。

4-1 テストバッチと評価基準 ここでは、対象

とする高次系を、以下の四つとする。

$$\text{モデル A: } \frac{1}{(s+1)^8}$$

$$\text{モデル B: } \frac{1}{(s+1)(0.2s+1)(0.04s+1)(0.008s+1)}$$

$$\text{モデル C: } \frac{-0.1s+1}{(s+1)^3}$$

$$\text{モデル D: } \frac{1}{(1+1.0925s)(1+0.2114s)^5}$$

ここに、モデル A, B, C は文献(2)においてテストバッチとして、モデル D は、文献(3)の共通例題として例示されているものであり、種々の比較を行うに都合がよい例である。また、評価規範としては、誤差二乗積分(ISE)

$$\int_0^{\infty} \{e(t)\}^2 dt$$

と誤差絶対値積分(IAE)

$$\int_0^{\infty} |e(t)| dt$$

の2種類で検討する。

**4.2 同定区間** ここでの同定区間とは、応答の初期値を0%、定常値を100%とし、その間の割合で示すものとする。例えば図1の場合を20~80%同定区間といい、この間のデータを用いて3パラメータモデルの同定を行うことを意味する。考察の対象とした同

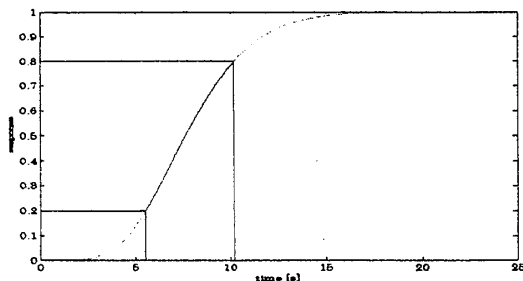


Fig. 1 Interval of identification

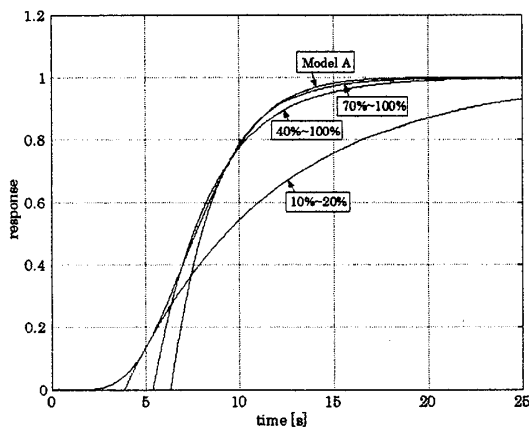


Fig. 2 Step responses of model A and 3 parameter models

定区間は以下のように設定した。初期点を、10%から100%まで9点、最終点を同じく10%から100%まで9点選び、重複を考慮して、計45の同定区間を設定した。図2にモデルAのステップ応答といくつかの同定区間に対応する3パラメータモデルのステップ応答を示す。得られるモデルが、同定区間の影響を大きく受けていることがわかる。なお、サンプリング時間は0.01秒としている。

**4.3 IAEによる検討** 最初にモデルAについての検討を行う。このモデルは、Astromら<sup>(2)</sup>, Ljung<sup>(11)</sup>によって用いられているものである。

図3は、45区間上でのIAEを示したものである。図3からもわかるが、データを比較すると、終点が定常値(100%)となる場合が、各始点の変化に対し最小値を与えている。したがって、同定区間の終点は定常値に選ばばよい。図4は、終点を定常値とした場合の9区間のIAEを示したものである。ただし比較のため、全体での最大値を与える10~20%区間の値も示している。この結果から、40~100%区間での同定結果がIAEの最小値を与えていることがわかる。

さて、モデルB, C, Dについても同様な検討を行っ

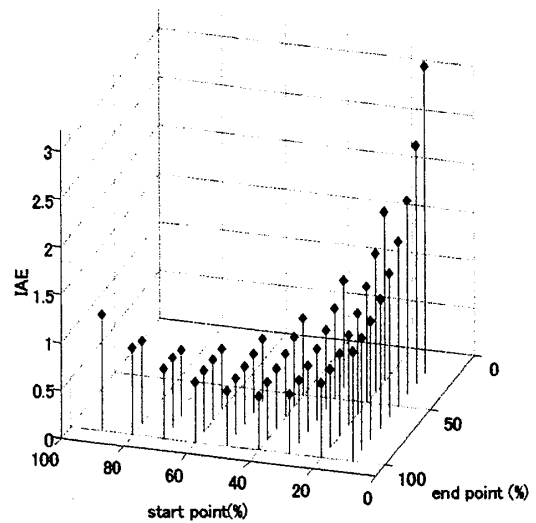


Fig. 3 Variation of IAE at 45 intervals (model A)

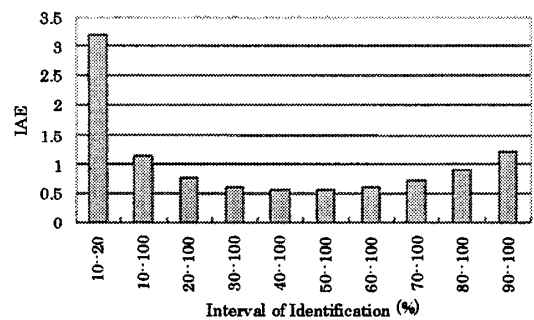


Fig. 4 Variation of IAE at 10 intervals (model A)

だが、図3におけると同様、終点が定常値(100%)となる場合が、各始点の変化に対し最小値を与えていることがわかった。

図4~7から、これらの場合も数値を正確に比較することにより、40~100%同定区間でIAEの最小値が与えられることがわかる。

**4・4 ISEによる検討** ISEに関してもIAEと同様45同定区間で比較すると終点が定常値(100%)となる場合が、各始点の変化に対し最小値を与えている。したがって、同定区間の終点は定常値に選ばばよい。図8~11は図4~7に対応するものである。これらの最小値はIAEの場合とわずかに異なっており、30~100%同定区間で最小値を取っている。

**4・5 良好な3パラメータモデル近似** モデルAの場合について得られた3パラメータモデルとステップ応答を示す。

$$IAE \text{ 最小} : \frac{1}{3.1055s+1} e^{-5.3879s}$$

$$ISE \text{ 最小} : \frac{1}{3.4569s+1} e^{-5.0512s}$$

時定数、むだ時間もやや異なっているが、ステップ応答自体にあまり差はない。モデルB, C, Dに関し

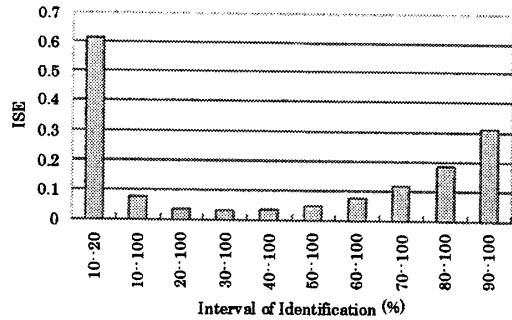


Fig. 8 Variation of ISE at 10 intervals (model A)

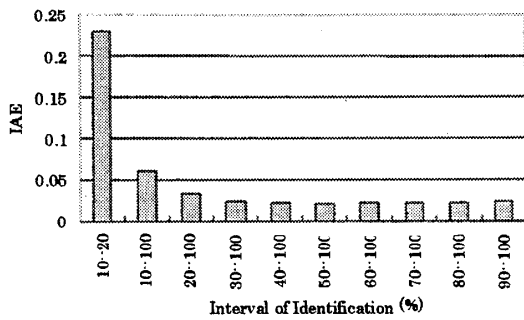


Fig. 5 Variation of IAE at 10 intervals (model B)

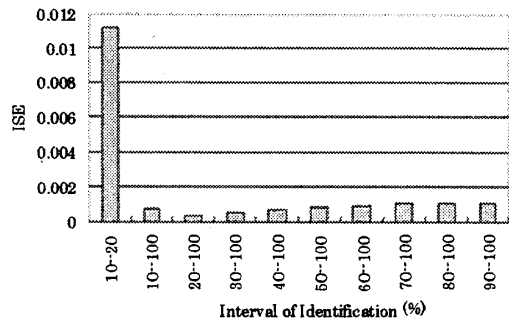


Fig. 9 Variation of ISE at 10 intervals (model B)

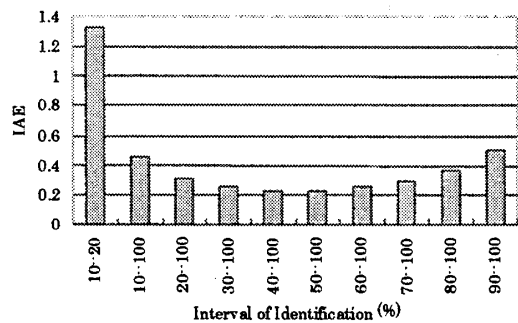


Fig. 6 Variation of IAE at 10 intervals (model C)

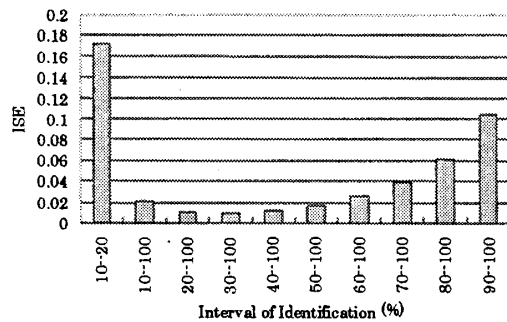


Fig. 10 Variation of ISE at 10 intervals (model C)

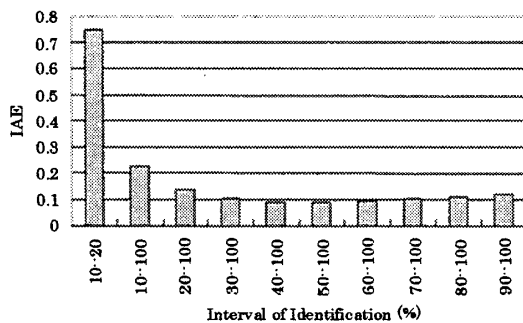


Fig. 7 Variation of IAE at 10 intervals (model D)

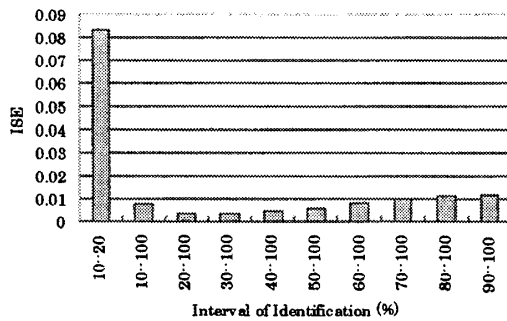


Fig. 11 Variation of ISE at 10 intervals (model D)

でも同様の結果を得ている。以上より、ここで考察の対象としたテストバッチに関しては、同定区間を始点を40%(ISE重視の場合には30%)、終点を100%に取ってProny法を適用すれば、良好な3パラメータモデルが得られると結論できる。

5. 同定精度と制御性能に関する検討  
(モデル駆動PID制御の場合)

制御対象のモデルに基づく制御系設計法では同定精度の良いモデルがより良好な制御結果を当然与えるであろう。3パラメータモデルの場合もそのことは当然予測されるが、これまで、3パラメータモデル導出法とそのモデル精度の関係についてあまり検討されていなかったこともあり、定量的な検討はほとんどなされていなかった。しかしながら、制御性能が3パラメータモデルに依存するPIDなどの制御系設計法ではこの点を無視できないと考えられる。ここでは、プラントが3パラメータモデルで近似できることを前提として構成されているモデル駆動PID(MDPID)制御に関して検討を行う<sup>(12)(13)</sup>。MDPIDはIMCやPID $\tau_d$ 制御の概念を拡張した形で含んでおり<sup>(8)(9)</sup>、効果的なプロセス制御手法として最近注目されている。図13に一般的な構成を示す。以下に検討手順を示す。まず、

制御対象にPDフィードバックを付加し、制御対象が3パラメータモデルで近似しやすい応答(単調な応答)を示すような見かけの制御対象 $G(s)$ に変更する(最初から単調な応答であれば手順は特に必要ない)。次に $G(s)$ に対し、提案手法を適用して、3パラメータモデル:

$$G_p(s) = \frac{Ke^{-Ls}}{1+Ts} \dots\dots\dots (23)$$

を求める。ここではIMCの設計手順と同様

$$K_c = 1/K, T_c = \bar{T}, L_c = L \dots\dots\dots (24)$$

と定める。この場合、伝達特性は

$$y = \frac{e^{-Lcs}}{1+\lambda T_{cs}} r + \frac{e^{-Lcs}}{K_c(1+T_{cs})} \left( 1 - \frac{(1+\alpha T_{cs})e^{-Lcs}}{(1+\lambda T_{cs})^2} \right) d \dots\dots\dots (25)$$

となる。即応性と外乱抑制は $\lambda, \alpha$ を調整することにより達成できる。以下では、 $G(s)$ としてモデルA(対応する3パラメータモデルとしてはIAE最小モデル)を用い検討を行う。ここでは単位ステップ目標入力に加え、十分整定したのち単位ステップ外乱を印加している。制御性能の評価は応答と目標値との誤差 $e(t)$ に対するIAE(120秒間の積分)で行っている。ここでは、 $\lambda=1, \alpha=1$ の場合を示す。これは、PID $\tau_d$ 制御の場合に当たる<sup>(13)</sup>。

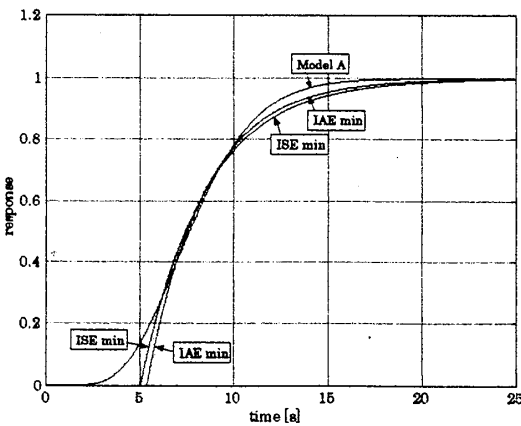


Fig. 12 Step responses of well-approximated 3-parameter models

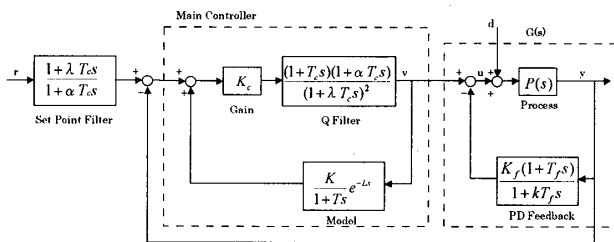


Fig. 13 2-DOF model driven PID control system

図14では、同定精度のIAEと制御性能のIAEをそれぞれ(0,1)区間で正規化して表示しているが、この関係で見ると、4章での結論である同定精度の良い、すなわち、40~100%同定区間における3パラメータモデルがIAEに関し良い制御結果を与えているといえる。次に、 $\alpha=1$ は固定し、 $\lambda=0.5, 1, 1.5, 2$ と即応性を変化させて図14と同様の検討を行った。その結果、制御性能のIAEは $\lambda=0.5$ では変化はほとんどないが、 $\lambda=1.5$ では50~100%同定区間で、 $\lambda=2$ では60~100%同定区間でそれぞれ最小となった。

ところで、プロセス制御では、IAE以外の評価、例

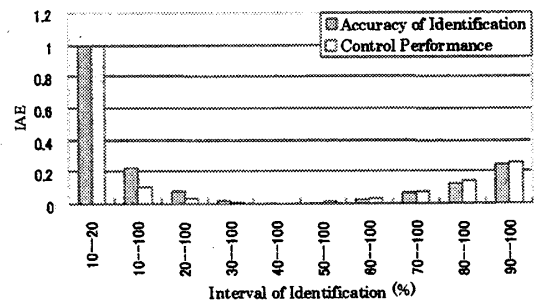


Fig. 14 Control performance and accuracy of identification ( $\lambda=\alpha=1$ )

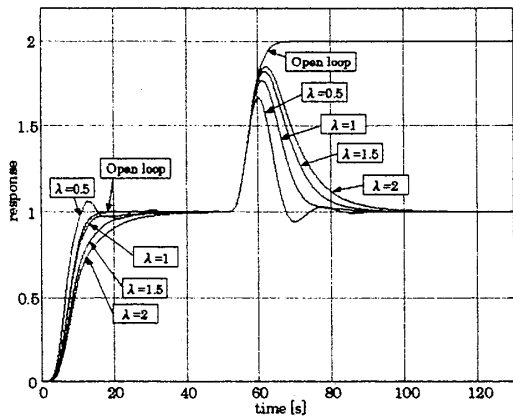


Fig. 15 Time responses of the control system with respect to the variation of  $\lambda$

例えば立上り時間, オーバシュート, 整定時間といった時間応答からの評価のほうが実際にはよく用いられる。図 15 は上記のそれぞれの場合の時間応答を示したものであるが, 立上り特性, 外乱抑制などを総合すれば, 良好な結果を示しているのは, やはり 40~100%同定区間の場合であるといえる。このように本数値例に関しては最適な同定区間での 3 パラメータモデルは, 制御パラメータを PID 制御の場合に調整した基本的なモデル駆動 PID 制御においては, 良い制御結果を与えていることが示された。以上の考察を, モデル B, C, D についても行った。それらは,  $L/\bar{T}$  が比較的小さいのでモデル同定の制御性能に及ぼす効果はさほど顕著ではないが, 上述と同様の傾向は確認できた。なお, コントローラパラメータの調整でモデル精度の低下をどの程度カバーできるかについては, 今後の検討課題である。

## 6. 結 言

本報告は, 最初に Prony 法に基づくステップ応答からプラントの伝達関数を求める基本的な手法について述べ, それが 3 パラメータモデル導出に応用できることを示した。次に, どのような区間で同定を行ったらよいかをテストバッチで考察し, 定常値に対し 30, 40~100%の範囲で同定を行ったとき ISE あるいは IAE の意味で良い 3 パラメータモデルの得られることを示した。また, 同定モデルの精度が制御系設計に及ぼす影響について, モデル駆動 PID 制御を例にとって検討した。3 パラメータモデルの導出法はこれまでも多く提案されてきたが, 同定モデルの精度とその制御系設計に及ぼす影響についてこれまであまり考察されていなかった。しかし, 提案した Prony 法を用いた 3 パラメータモデル決定法を用いることでテスト

バッチについてはあるが定量的に検討することができた。ここでは, 3 パラメータモデルに限定して考察してきたが, 提案した一般的な同定手法をより広範なプロセス制御系設計へ適用するべく現在検討中である。最後に本研究遂行における本学学生, 谷口智寛君の助力に対し謝意を表す。

## 付 録

モデル式(2)に基づいて考える。式(10)において,  $k=0$  においても証明の一般性は失われない。 $a_0, \dots, a_{n-1}$  ( $a_n=1$ )なる  $n$  個の未知数が一意に定まるためには, 少なくとも式(10)の  $n$  個の式が必要となる。いま, 式(4)から

$$\bar{y}_0 = \bar{A}\bar{a}, \dots, \bar{y}_{n-1} = \bar{A}\bar{Z}^{n-1}\bar{a} \dots \dots \dots (26)$$

を得る。ただし,

$$\bar{y}_i = \begin{bmatrix} y_i \\ y_{i+1} \\ \vdots \\ y_{i+n-1} \end{bmatrix}, \quad \bar{A} = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & \cdots & x_n \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ x_1^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{bmatrix}$$

$$\bar{Z} = \begin{bmatrix} x_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & x_n \end{bmatrix}, \quad i=0, \dots, n-1$$

$$\bar{a} = [a_1 \quad \cdots \quad a_n]^T \dots \dots \dots (27)$$

これを用いると, 式(10)は  $\bar{\beta} = [a_0 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_{n-1}]^T$  において

$$\begin{bmatrix} \bar{a}^T \bar{A}^T \\ \bar{a}^T \bar{Z}^T \bar{A}^T \\ \vdots \\ \bar{a}^T (\bar{Z}^{n-1})^T \bar{A}^T \end{bmatrix} \bar{\beta} = \bar{D} \bar{\beta} = \begin{bmatrix} -y_n \\ -y_{n+1} \\ \vdots \\ -y_{2n} \end{bmatrix} \dots \dots \dots (28)$$

となる。この係数行列  $\bar{D}$  の行列式は

$$|\bar{D}| = a_1 a_2 \cdots a_n \cdot (\det \bar{A})^2 \dots \dots \dots (29)$$

となる。仮定により, モデル(2)は  $n$  次, したがって  $a_i \neq 0$  である。また,  $\lambda_i$  は相異なるとしているので  $x_i$  も相異なり,  $\bar{A}$  はファンデルモンド行列となり正則となる。よって,  $|\bar{D}|$  は非零であり, 式(28)は一意な解を持つ。 $n$  個以上の観測については, 式(11)の  $\bar{N}$  は  $\bar{D}$  を必ず含むので  $\text{rank}(\bar{N}) = n$  である。これより,  $\text{rank}(\bar{N}^T \bar{N}) = n$  は容易に証明できる。

## 文 献

- (1) Ziegler, J.G. and Nichols, N.B., Optimal Settings for Automatic Controllers, *Trans. ASME*, **64** (1942), 759-768.
- (2) Astrom, K. and Hagglund, T., PID Controllers—Theory, *Design and Tuning*, (1995), 1-33, ISA.
- (3) 須田信英・ほか 16 名, PID 制御, (1995), 19-28, 朝倉書

- 店.
- (4) Ordenburg, R. C. and Sartorius, H. (高橋安人・伊沢計介訳), 自動制御の力学, (1954), 21-24, 誠文堂新光社.
- (5) 榎木義一・砂原善文, 自動制御工学 I, (1965), 32-85, 養賢堂.
- (6) Istratov, A. A. and Vyvko, O. F., Exponential Analysis in Physical Phenomena, *Rev. Sci. Instrum.*, **70**-2 (1999), 1233-1257.
- (7) 長松昭男, モード解析, (1985), 11-82, 培風館.
- (8) Morari, M. and Zafriou, E., *Robust Process Control*, (1998), 11-38, Prentice-Hall.
- (9) Shinskey, F. G., *Process Control Systems*, (1996), 130-139, MacGraw-Hill.
- (10) Iwai, Z., Mizumoto, I., ほか2名, Modelling of Time-delay Systems using Exponential Analysis Method, *Proc. 2003 ICCAS*, (2003), 2298-2303.
- (11) Ljung, L., System Identification and Simple Process Models, *Proc. AdCONIP '02*, (2002), 13-24.
- (12) 馬場泰・重政隆・小島文夫, モデル駆動PID制御, 東芝レビュー, **58**-10(2003), 38-41.
- (13) 重政隆・行友雅徳・ほか2名, モデル駆動PID制御とそのチューニング法, 46回自動制御連合講演会予稿集, (2003-11), 549-552.