論　文

境界適合座標系を用いたぜん動管路内流れの数値解析（べき乗則非ニュートン流体の場合）

程　咏　華[*1]・松　崎　和　愛[*2]
大　庭　英　樹[*3]・宗　像　瑞　恵[*2]

A Numerical Analysis of Peristaltic Flow Using Boundary Fitted Coordinate (A Case of Non-Newtonian Flow of Power Law Fluid)

Yonghua CHENG, Kazuyoshi MATSUZAKI,
Hideki OHBA and Mizue MUNEKATA

1. 緒　言

工業の発展に伴い，非ニュートン流体が扱われることも多くなってきた．非ニュートン流体としてこれまで多く用いられてきたものは血液や薬品であるが，このような流体の輸送に用いられているものがぜん動運動を利用したぜん動ポンプである．

ぜん動ポンプ内の流動特性はこれまで実験的，解析的に研究が行われてきている[1)-3)]．とくにこの流れは実験的な観察が難しいため，数値解析による研究が多く見られる．鮎川らは斜方格子を用いた差分法による解析を行い，低レイノルズ数領域の流動状態を解明している[4),5)]．川橋らは直交格子を用い，ぜん動流路を階段状に近似し解析を行っている[6),7)]．また，髙畠らは，有限要素法を用いた解析により，高振幅流路の解析を行っている[8)]．しかしながら，これらの解析では，ニュートン流体が対象とされており，血液や薬品のような非ニュートン流体の輸送に多く用いられているぜん動ポンプの内部流動が解明されたとは言い難い．また，これらの解析の多くは，高振幅時，高レイノルズ数時に計算不可能となっており，他の解法を取り入れる必要性があるように思われる．

このような問題を解決するために，川橋らは非ニュートン流体を対象とした解析を行っている[9)]．しかしながら，計算格子数が少なく，流路形状を階段状に近似しているため，必ずしも精度のよい解析とはいえないと思われる．さらに彼らの計算は低振幅低レイノルズ数に限られている．ぜん動輸送の工業応用の観点から見ると，レイノルズ数が高く，ぜん動波の振幅が大きく，かつ，波長が短い（高周波数）場合の解析が必要であると考えられる．

そこで，本研究では境界適合座標系によって境界近似度を改善した高解像度格子を用い，高精度差分法により，高振幅高周波数のぜん動流路内のべき乗則非ニュートン流体流れの数値解析を行った．その結果，べき乗指数による流れ状態の違いが明らかとなった．

平成11年10月15日受付

*1 大学院生，自然科学研究科
*2 助手，知能生産システム工学科
*3 教授，知能生産システム工学科

2. 数値解析法

2.1 計算流路

図1に本研究で用いたぜん動流路の概略図を示す．流路は波長λの周期を持ち，位相速度cで移動している．流路は次式で示される波形を用いた[4)]．

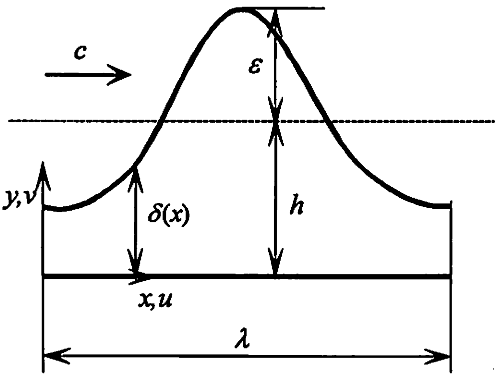


Fig. 1　Schematic figure of peristaltic flow

$$H(X,T)=h-\varepsilon\cos\frac{2\pi(X-cT)}{\lambda} \tag{1}$$

本研究では，解析を簡単にするため，解析においては流路とともに動く座標系を導入する．この座標系では，流路は時間経過によって変形せず，以下の式で表される．

$$\delta(x)=h-\varepsilon\cos\frac{2\pi x}{\lambda} \tag{2}$$

ぜん動流路の形状係数は，以下のように定義した．

$$\Phi=\frac{\varepsilon}{h},\quad \alpha=\frac{h}{\lambda} \tag{3}$$

だたし，h は平均流路高さを示す．

2.2 計算方法

非圧縮性非ニュートン流体に対する基礎式は次式で与えられる．

$$\rho\frac{\partial\vec{V}}{\partial t}+\rho(\vec{V}\cdot\nabla)\vec{V}=-\nabla p+\nabla\cdot\tau \tag{4a}$$

$$div\vec{V}=0 \tag{4b}$$

式の中で，τ は応力テンソルで，べき乗則非ニュートン流体に対しては，以下のように表される．

$$\tau_{ij}=\mu_0\left(\frac{\dot{\gamma}_{mk}\dot{\gamma}_{km}}{2}\right)^{\frac{n-1}{2}}\dot{\gamma}_{ij} \tag{5}$$

式中：$\dot{\gamma}_{ij}=\left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j}+\frac{\partial V_j}{\partial x_i}\right)$

ここで，$\dot{\gamma}$ は変形速度テンソルである．したがって，二次元非圧縮べき乗則非ニュートン流体の支配方程式は次の無次元化された運動方程式で表される．

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{1}{\mathrm{Re}}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(2\theta\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left\{\theta\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right\}\right] \tag{6}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{1}{\mathrm{Re}}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left\{\theta\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right\}+\frac{\partial}{\partial y}\left(2\theta\frac{\partial v}{\partial y}\right)\right] \tag{7}$$

$$\theta=\left[2\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right\}+\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2\right]^{\frac{n-1}{2}} \tag{8}$$

上式において，u，v は流速，p は圧力，Re は以下のような式で定義されるレイノルズ数である．

$$\mathrm{Re}=\frac{\rho c^{2-n}h^n}{\mu_0} \tag{9}$$

n は非ニュートン性を表す指数である．流体は，$n=1.0$ の場合ニュートン流体となり，$n<1.0$ なら shear-thinning 粘性を示し，擬塑性流体と呼ばれ，$n>1.0$ ならば shear-thickening 粘性を示し，ダイラタント流体と呼ばれる．上式において，ρ は流体密度で，μ_0 は流体のゼロせん断粘度係数であり，$n=1.0$ ならばニュートン流体の粘度係数になる．

圧力の解法には MAC 法[10] を用いる．上述した運動方程式の発散をとって，以下に示す圧力のポアソン方程式が得られる．

$$\nabla^2 p=\frac{D_m}{\Delta t}-div(\vec{V}\cdot\nabla)\vec{V}+R \tag{10}$$

上式において R，D は以下のように与えられ，m は時間ステップを表す．

$$R=\frac{1}{\mathrm{Re}}\left\{2\frac{\partial\theta}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)+2\frac{\partial\theta}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)+2\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2\theta}{\partial y^2}\frac{\partial v}{\partial y}\right)+2\frac{\partial^2\theta}{\partial x\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right\} \tag{11}$$

$$D=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y} \tag{12}$$

式(6)，(7)および式(10)を連立させて解くことにより流速と圧力を求めることができるが，デカルト座標系のままでは曲線境界の近似が悪化してしまう．そのため，境界適合座標系を導入する[11]．(x,y) から (ξ,η) で表される境界適合座標系へ変数変換を行う関係式は以下のように与えられる．

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial x}=\xi_x\frac{\partial f}{\partial\xi}+\eta_x\frac{\partial f}{\partial\eta}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y}=\xi_y\frac{\partial f}{\partial \xi}+\eta_y\frac{\partial f}{\partial \eta} \tag{13}$$

ここで，f は u，v，p，θを示し，ξ_x，ξ_y，η_x，η_y は以下の式で与えられる．

$$\xi_x=y_\eta/J,\quad \xi_y=-x_\eta/J,\quad \eta_x=-y_\xi/J,$$
$$\eta_y=x_\xi/J,\quad J=x_\xi y_\eta-x_\eta y_\xi \tag{14}$$

添え字はその変数で微分することを表す．同様な手続きで2階偏微分の変数変換式も導出できる．

計算格子は流れ方向に251，高さ方向に81点とした．計算格子は Thompson ら[12] の方法で上下壁で密になるように数値的に生成し，最小格子幅は0.0024である．運動方程式の時間積分にはオイラーの陰スキームを用い，運動方程式，圧力のポアソン方程式の解法には SLOR 法を用いた．収束判定には平均自乗残差を用い，それぞれ10^{-6}，10^{-4}とした．

対流項以外の空間微分項は二次精度中心差分，対流項には以下に示す三次精度風上差分スキームである河村スキーム[13] を用いた．

$$\left(u\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i=u_i\frac{-u_{i+2}+8(u_{i+1}-u_{i-1})+u_{i-2}}{12\Delta x}$$
$$+|u_i|\frac{u_{i+2}-4u_{i+1}+6u_i-4u_{i-1}+u_{i-2}}{4\Delta x} \tag{15}$$

2.3 境界条件

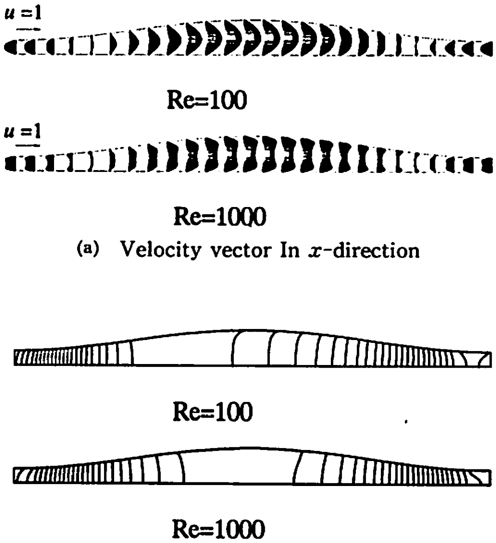
上下の壁面は移動座標系から見ると移動壁となるため，速度の境界条件は以下の条件とした．

$$u=-1,\quad v=-2\pi\alpha\Phi\sin 2\pi\alpha x \quad \text{(upper wall)}$$
$$u=-1,\quad v=0 \quad \text{(lower wall)} \tag{16}$$

入口，出口 ($x=0,\lambda$) での境界については周期境界条件 ($u,v|_{x=0}=u,v|_{x=\lambda}$) を与えた．圧力については，壁面で法線方向こう配を0，流れ方向には平均圧力こう配を一定値で与えた[14]．本論文では，大部分の計算は，平均圧力こう配0とした．

2.4 計算精度の検証

本計算の精度を検証するために，ニュートン流体 ($n=1$) について，文献6) 7) と同様な条件で計算を行った．図2に $\Phi=0.429$，$\alpha=0.053$ の場合の解析結果を示す．レイノルズ数 Re=100 では速度分布が二次元ポアズユ流れに近く，最大速度は流路中央に現れている．この結果は川橋ら[6] のものと同様である．レイノルズ数 Re=1000 の場合も，川橋らの実験結果 (Re=714)[7] の傾向とよく一致している．また等圧線の分布はレイ



(a) Velocity vector In x-direction

(b) Pressure contour ($\delta p\approx 0.04$)

Fig. 2 Velocity vector and pressure contours ($n=1$, $\Phi=0.429$, $\alpha=0.053$, $\Delta P_\lambda=0$)

ノルズ数の増加とともに左右対称に近づき，わずかに傾いていく傾向を示している．このことは川橋らの結果と一致している．以上のことから，本計算法は十分な精度を有すると考えられる．

2.5 計算条件

高振幅，高周波数 $\Phi=0.6$，$\alpha=0.4$ のぜん動流路の数値計算を行った．計算は，レイノルズ数100〜10000の範囲で行い，無次元化時間刻み Δt は0.001とした．初期条件は，$u=v=p=0$ とし，流れが十分発達するまで計算を進め，その後無次元時間80の時間平均を結果とした．より高レイノルズ数の場合には，低レイノルズ数の結果を初期値に用い，同様な計算を行った．

べき乗指数の値については，生体内の血液や消化物や，多くの高分子流体などは $n<1.0$ の特徴を示し，適当な配合の砂と水の混合物は $n>1.0$ のものを示す．本計算では，n の値は，shear-thinning 粘性の $n=0.9$ および $n=0.75$ と shear-thickening 粘性の $n=1.1$ を用い，$n=1.0$ のニュートン流体と比較を行う．

なお，本計算では対流項に三次風上差分を用いているため，その数値粘性の解に与える影響が問題となるが，本計算の格子解像度では，数値粘性の大きさは，真の粘性に比較して充分小さいことを確認している．

3. 解析結果および考察

3.1 速度分布

図3にレイノルズ数の違いにおけるぜん動流路の山部（Crest）および谷部（Trough）の x 方向速度分布に及ぼすべき乗指数 n の影響を示す．上下壁のごく近傍では，n の値による速度分布の差はあまり見られない．流路中央部では，Re=300，1000の場合，n の増加にしたがって，山部，谷部で速度が大きくなる傾向を示している．山部の上下壁および谷部の上壁近くでは，n の増加とともに速度が小さくなり，中央部と逆の傾向が現れている．高レイノルズ数Re=10000の場合では，低レイノルズ数の場合と比べて，n の違いにより速度分布にはかなりの差が見られる．

3.2 圧力分布

図4にRe=1000のぜん動流路の上壁（ぜん動壁）の圧力分布を示す．分布は流路の山部で高く，谷部で低くなっており，その前後で対称となっている．n の増加に伴い，圧力が高くなっている．Shear-thinning粘性流体が低い圧力を示しているのに対して，ニュートン流体は圧力が高く，shear-thickening粘性流体が最も高くなっていることがわかる．最大，最小圧力値で $(p-p_{min})/(p_{max}-p_{min})$ のように無次元化した圧力の等

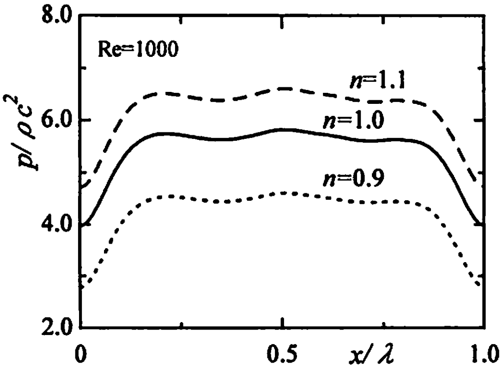
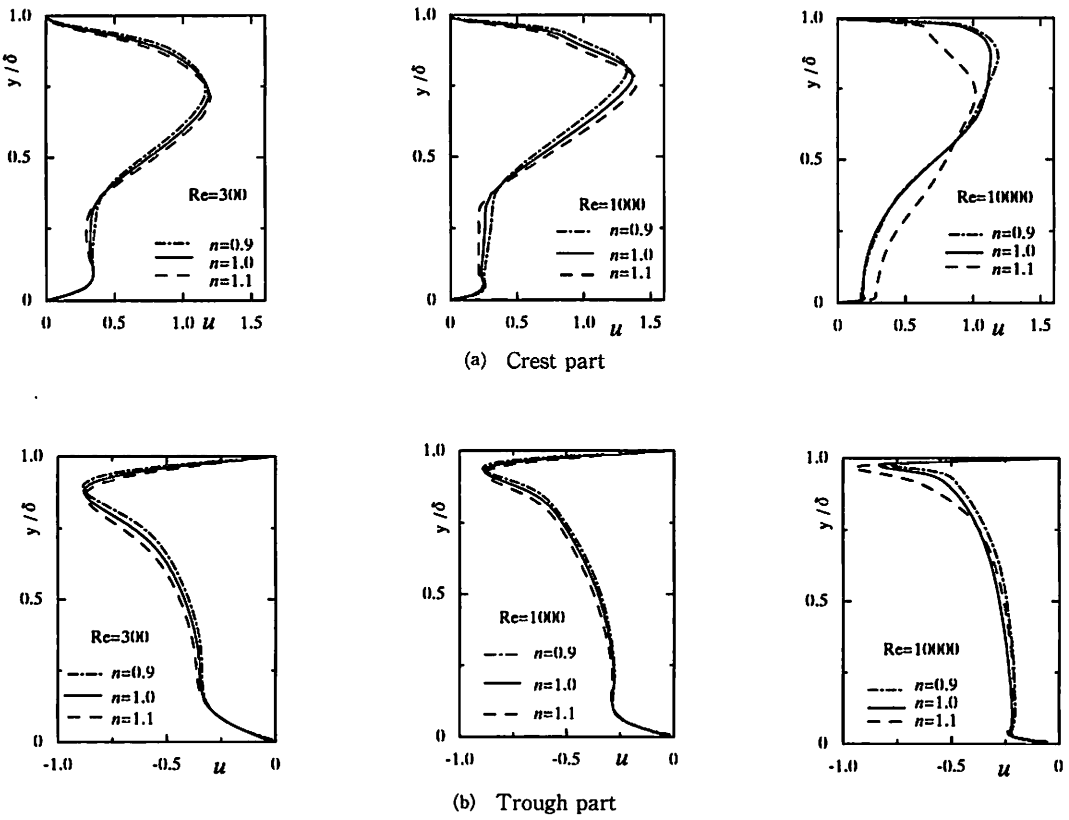


Fig. 4　Pressure distributions on the upper wall ($\Phi=0.6$, $\alpha=0.4$, $\Delta P_\lambda=0$)

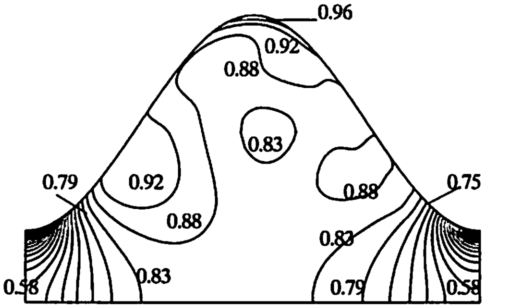


(a)　Crest part

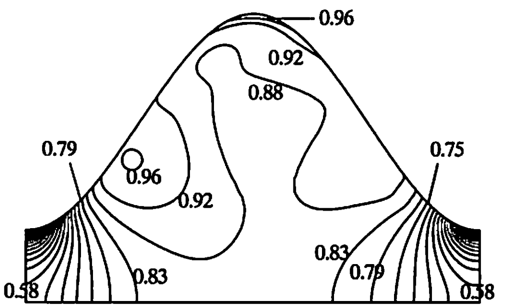
(b)　Trough part

Fig. 3　Velocity profile of x-direction ($\Phi=0.6$, $\alpha=0.4$, $\Delta P_\lambda=0$)

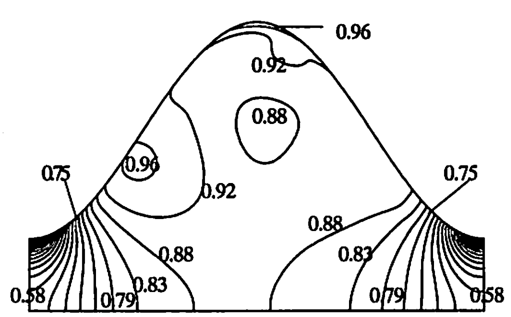
値線を図5に示す．この等圧線より，各 n の谷部の等圧線分布は類似しているが，中央部では，分布の違いが現れ，n の減少に伴って，圧力値が高くなり，高圧力領域が谷部へ広がっていることがわかる．Shear-thickening 流体では中央部の圧力の増加が抑えられたものと考えられる．



(a)　$n=1.1$



(b)　$n=1.0$



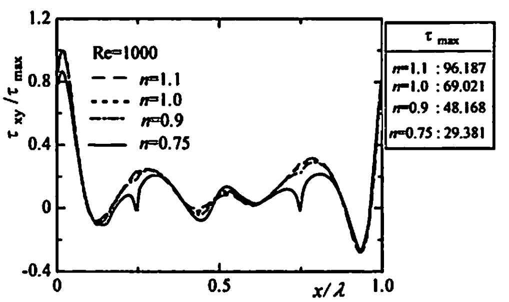
(c)　$n=0.9$

Fig. 5　Pressure contours
($\delta p \approx 0.04$, $\Phi=0.6$, $\alpha=0.4$, $\Delta P_\lambda=0$)

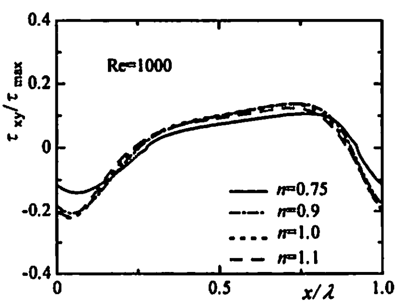
3.3　せん断応力分布

$\mu_0 c/h$ で無次元化した二次元べき乗則流体のせん断応力は式(5), (8)にしたがって，$\tau_{xy}=\theta\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)$ のように算出できる．最大せん断応力 τ_{max} で無次元化した上下壁のせん断応力分布を図6に示す．図中の表に各 n に対応する τ_{max} が示されている．ニュートン流体 ($n=1.0$) およびわずかな shear-thinning 粘性流体 ($n=0.9$) とわずかな shear-thickening 粘性流体 ($n=1.1$) の応力分布の違いはあまり現れていないのに対して，大きな shear-thinning 粘性流体 ($n=0.75$) の方では応力分布に差がはっきりと見られた．また，n の違いによって，かなり τ_{max} が異なっている．図示していないが，数値計算を行うと τ_{max} をとる上壁近傍では，n が小さくなると見かけの粘性が小さくなった．そのために，摩擦抵抗が減少して，最大せん断応力もかなり減少すると考えられる．

次に，レイノルズ数がせん断応力に及ぼす影響を調べるため，図7と図8にそれぞれレイノルズ数に対するせん断応力の最大値，最小値を示す．これらをみると，レイノルズ数の増加にしたがって，ニュートン流



(a)　On the upper wall



(b)　On the lower wall

Fig. 6　Shearing stress distributions on the upper and lower walls ($\Phi=0.6$, $\alpha=0.4$, $\Delta P_\lambda=0$)

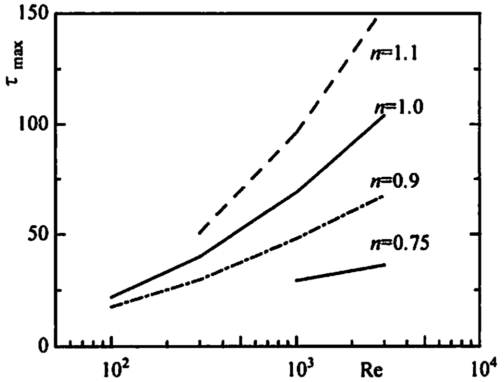


Fig. 7　Maximum value of shearing stress

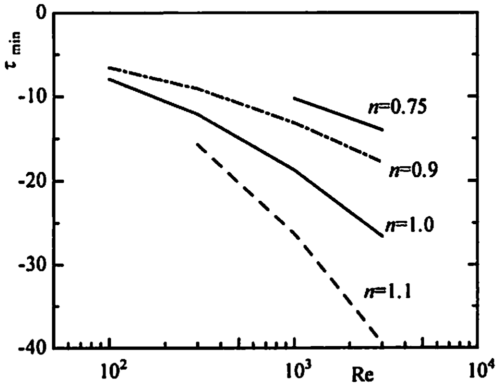


Fig. 8　Minimum value of shearing stress

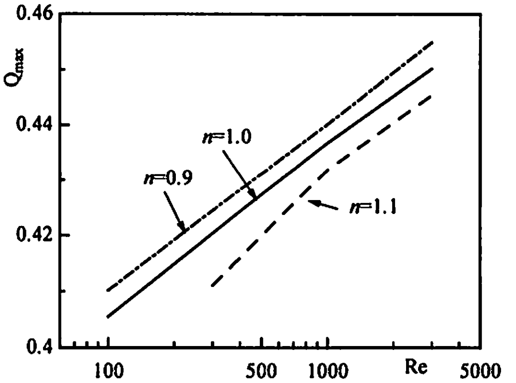


Fig. 9　Maximum of time-average flow rate (Φ=0.6, α=0.4, ΔP_λ=0)

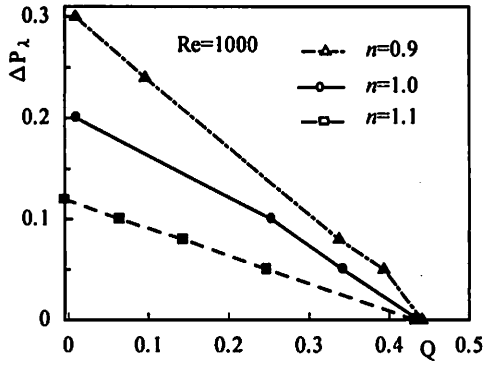


Fig. 10　Pressure-flow rate characteristics (Re=1000, Φ=0.6, α=0.4)

体と非ニュートン流体の応力の差が徐々に大きくなっていることがわかる．Re=3000では，非ニュートン流体(n=0.75)はニュートン流体(n=1.0)の場合と比べ，かなりの差が見られた．

3.4 流量および圧力特性

図9にぜん動流路の最大輸送流量を示す．どのレイノルズ数においても，shear-thinning粘性流体の方はニュートン流体およびshear-thickening粘性流体と比べて，図示していないが，数値計算を行うと上下壁近傍の大部分で，見かけの粘度が小さいため摩擦抵抗が減少して，輸送流量が上昇したと考えられる

実際のぜん動流路における流れ方向の平均圧力差は常に零であると限らない．そこで，Re=1000の場合，流路の一波長当たりの圧力上昇ΔP_λと輸送流量Qの関係特性を図10に示す．これを見ると，平均圧力の上昇とともに，流量がほぼ一定のこう配で減少することがわかる．nの増加にしたがい，特性の傾きは小さくなっていることから，同じ圧力差が与えられると，nが小さい方は，輸送流量が大きくなると考えられる．

4. 結　言

非ニュートン流体の高レイノルズ数流れを解析するために，高振幅高周波数のぜん動流路で境界適合座標系を導入したべき乗則非ニュートン流体に対する数値解析法を提案し，以下の結論を得た．

(1) 本解析法により，高振幅，高周波数のぜん動流路で，非ニュートン流体の高レイノルズ数の解析が可能となった．

(2) Shear-thinningとShear-thickening粘性非ニュートン流体とニュートン流体ぜん動流路内の挙動の違いが明らかとなった．

実際のぜん動流路では，流れの三次元性が現れるので[16]，今後は，非ニュートン流体の三次元解析を行う予定である．

本研究に関しては本田逸郎元熊本大学助教授に助言を頂いた．記して感謝の意を表する．

文　献

1) Shapiro, A. H. et al., Peristaltic Pumping with Long Wavelengths at Low Reynolds Number, J. Fluid Mech., 37-4 (1969), pp. 799-825.

2) Yin, F. C. And Fung, Y. C., Comparison of Theory and Experiment in Peristaltic Transport, J. Fluid Mech., 47-1 (1971), pp. 93-112.

3) Thomas, D. B. And Hung, T. K., Computational and experimental investigations of two-dimensional nonlinear Peristaltic flows, J. Fluid Mech., 83-2 (1977), pp. 249-272.

4) 鮎川恭三，髙畠　伸，ぜん動流路内の流れの数値解析（第1報，フローパターン），日本機械学会論文集，47-423，B（1981），pp. 2120-2130.

5) 髙畠　伸，鮎川恭三，ぜん動流路内の流れの数値解析（第2報，圧力，応力の分布および圧力・流量特性），日本機械学会論文集，48-428，B（1982），pp. 619-627.

6) 川橋正昭，ほか3名，有限波列ぜん動流路内流れの数値解析（第1報，解析方法および計算例），日本機械学会論文集，48-427，B（1982），pp. 473-479.

7) 川橋正昭，ほか2名，有限波列ぜん動流路内流れの数値解析（第2報，実測値との比較検討），日本機械学会論文集，49-442，B（1983），pp. 1125-1133.

8) 髙畠　伸，ほか2名，有限要素法による大振幅ぜん動流れの解析（第1報，解析手法および解の検討）日本機械学会論文集，53-488，B(1988)，pp. 1207-1212.

(9) 川橋正昭，ほか2名，有限波列ぜん動流路内流れの数値解析（第3報，べき乗則非ニュートン流体の場合），日本機械学会論文集，52-484，B（1986），pp. 3925-3929.

10) Harlow, F. H. and Welch, J. E., Numerical Calculation of Time-dependent Viscous Incompressible Flow of Fluid with Free Surface, Phys. Fluids, 8-12 (1965), pp. 2182-2189.

11) 本田逸郎，ほか4名，境界適合座標系を用いたぜん動流路内の流れ解析（第1報，ニュートン流体の場合），日本機械学会論文集，56-529，B（1990），pp. 2535-2639.

12) Thompson, J. F. et al., Automatic Numerical Grid Generation of Body-fitted Curvilinear Coordinate System for Field Containing any Number of Arbitrary Two-dimensional Bodies. J. Comput. Phys., 15 (1974), pp. 299-319.

13) Kawamura, T. and Kuwahara, K., Computation of High Reynolds Number Flow around a Circular Cylinder with Surface Roughness, AIAA Paper, 84-0340 (1984).

14) Moin, P. and Kim, J., Numerical Investigation of Turbulent Channel Flow, J. Fluid Mech. (1982), vol. 118, pp. 341-377.

15) 程　咏華，ほか4名，ぜん動流路内流れの三次元流れ解析，日本機械学会論文集，64-626，B（1998），pp. 3228-3233.