論　文

トンネル掘削時における変位計測結果のFEM逆解析手法の開発

程　　　樺*
大 津 政 康**

FEM Inverse Analysis of Displacement Measurments in Tunneling

Chen HUA*
Masayasu OHTSU**

1．まえがき

トンネルなどの地下空洞の設計においては，地山の初期応力及び材料特性が大切な設計データとなっている．従来の調査方法では，岩盤の局部初期応力と岩石の材料特性だけを求めてきたに過ぎない．しかしながら，地下構造物の寸法及び形状は，岩盤としての材料特性に影響を受けるため，従来の設計データを設計に直接に用いることは問題があると考えられている．このような背景のもとに，最近，トンネルなどの地下空洞の施工において掘削中の地山の挙動を計測し，その結果から設計当初に用いた初期応力や力学的定数などの設計データの見直しを行い，それと同時に掘削方法の妥当性を検討しながら施工していく方法がとられるようになっている[1]．

この考え方に基づいて地下空洞掘削時に行う現場計測の結果から，地山の初期応力，力学的定数などを推定する解析方法が提案されている[2]．これは"逆解析"と呼ばれ，桜井らは，地山を等方等質弾性体とみなし，有限要素法（以下，FEM）による定式化を提案している[3]．本論文は，この逆解析手法を実際の岩盤計測データに適用し，地山の力学的定数を現場において決定できる事を目的として，マイクロコンピュータにおいて実行可能な逆解析計算プログラムの開発を行ったものである．手法の確認としては，数値シミュレーションによる解の安定性，精度について検討を行った．

2．基礎式の誘導

逆解析の目的は，地下空洞掘削時の岩盤変位を観測値として，初期応力と岩盤の弾性係数を求めることである．この解析では次の仮定をもうける[3]．

- 地山の力学モデルは等方等質弾性体とする．
- トンネルの周辺地山においては，解析範囲に作用している初期応力は等しいものとする．

トンネル掘削の問題をFEMで解析する場合は，まず掘削面に作用させる掘削相当外力を求めなくてはならない．これは，仮想仕事の原理によって，トンネル掘削前の地山に作用している初期応力を用い，各要素について次式で与えられる．

平成2年7月31日受付
*　講　師　工修　中国淮南鉱業学院
　　　　　　　　地下構造物研究所
**　助教授　工博　複合材料研究室

$$\{P\} = \int_V [B]\{\sigma_0\}\,dV \tag{1}$$

ここで，{P}：掘削面上の節点に作用させる掘削相当外力（節点力），[B]：節点変位－ひずみ関係マトリックス，$\{\sigma_0\}$：地山の初期応力，V：要素の体積である．

式(1)へ次式(2)を代入すれば式(3)を得る．

$$\{\sigma\} = (\sigma_{x0},\ \sigma_{y0},\ \tau_{xy0})^T \tag{2}$$

$$\{P\} = \sigma_{x0}\{P_1\} + \sigma_{y0}\{P_2\} + \tau_{xy0}\{P_3\} \tag{3}$$

ここで，$P_i\,(i=1, 2, 3)$ は，初期応力成分σ_{x0}, σ_{y0}, τ_{xy0}を単位としたときの外力ベクトルの成分を表す．

全解析範囲の節点における釣合方程式は，一般に，次の剛性方程式よって表される[4]．

$$\{P\} = [K]\{u\} \tag{4}$$

ここで，{P}，{u} は，それぞれ節点に作用する外力および節点変位である．

[K]は解析範囲全体にわたる剛性マトリックスである．

一方，外部境界は空洞から十分に遠い距離に設定する必要があると考えられる．すなわち，空洞掘削の影響が外部境界まで及ばない距離とすべきである．このとき，外部境界上の節点変位は，0という条件がつけられる．

いま，地山の弾性係数およびポアソン比を E_R, ν_R および覆工のそれらをそれぞれ E_L, ν_L とすれば，解析範囲全体の剛性マトリックス[K]は次のようになる．

$$[K] = E_R[K_R] + E_L[K_L] \tag{5}$$

ここで，$[K_R]$は$E_R=1$に対する地山モデルの剛性マトリックス，$[K_L]$は$E_L=1$に対する地山モデルの剛性マトリックスである．

式(3)，(4)および(5)より次式を得る．

$$\sigma_{x0}\{P_1\} + \sigma_{y0}\{P_2\} + \tau_{xy0}\{P_3\} = (E_R[K_R] + E_L[K_L])\{u\} \tag{6}$$

いま，次のように定義するパラメータRを導入する．

$$R = E_L/E_R \tag{7}$$

このパラメータを用いると，式(6)は次のように書ける．

$$\sigma_{x0}\{P_1\} + \sigma_{y0}\{P_2\} + \tau_{xy0}\{P_3\} = E_R[K^*]\{u\} \tag{8}$$

ここで，$[K^*] = [K_R] + R[K_L]$

式(8)の節点変位{u}は，測定変位と測定されない節点変位に分けられる．未知の節点変位は，さらに，有限要素モデルの境界上の節点の変位とモデル内部の節点の変位に分けられる．したがって，式(8)は次のように表される．

$$\sigma_{x0}\begin{Bmatrix} P_{11} \\ P_{12} \\ P_{13} \end{Bmatrix} + \sigma_{y0}\begin{Bmatrix} P_{21} \\ P_{22} \\ P_{23} \end{Bmatrix} + \tau_{xy0}\begin{Bmatrix} P_{31} \\ P_{32} \\ P_{33} \end{Bmatrix} = E_R\begin{bmatrix} K_{11}^* & K_{12}^* & K_{13}^* \\ K_{21}^* & K_{22}^* & K_{13}^* \\ K_{31}^* & K_{32}^* & K_{33}^* \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \tag{9}$$

ここで，$\{u_1\}$は測定される節点の変位，$\{u_2\}$は有限要素モデル内部の測定点以外の節点の変位，$\{u_3\}$はモデルの境界上の節点変位である．

式(9)において，境界条件を導入して，未知変位$\{u_2\}$を消去すると次式を得る．

$$\{u_1\} = [A]\{C\} \tag{10}$$

ここで，

$$[A] = [\{A_1\}\ \{A_2\}\ \{A_3\}] \tag{11}$$

$$\{C\} = \left(\frac{\sigma_{x0}}{E_R},\ \frac{\sigma_{y0}}{E_R},\ \frac{\tau_{xy0}}{E_R}\right)^T \tag{12}$$

であり，また，

$$[A_1] = [K_N^*]^{-1}\{P_a\}$$
$$[A_2] = [K_N^*]^{-1}\{P_b\}$$
$$[A_3] = [K_N^*]^{-1}\{P_c\}$$
$$\{P_a\} = \{P_{11}\} - [K_{12}^*][K_{22}^*]^{-1}\{P_{12}\}$$
$$\{P_b\} = \{P_{21}\} - [K_{12}^*][K_{22}^*]^{-1}\{P_{22}\}$$
$$\{P_c\} = \{P_{31}\} - [K_{12}^*][K_{22}^*]^{-1}\{P_{32}\}$$
$$[K_N^*] = [K_{11}^*] - [K_{12}^*][K_{22}^*]^{-1}[K_{21}^*]$$

式(10)は3個の未知量を含むため，測定変位は3個あれば良い．一般には，測定変位の数は，未知量の数より多く取り得るので，求めるべき{C}は最小二乗法を用いて，式(10)から次式を得る．

$$\{C\} = [[A]^T[A]]^{-1}[A]^T\{u_1\} \tag{13}$$

式(13)によって，測定変位$\{u_1\}$から一意的に{C}が求められる．また，2点P，Q間のPQ方向の相対変位Δuは，図-1を参考にして，ベクトルPQがx軸となす角をθとして，

$$\{\Delta u\} = \begin{pmatrix} -\cos\theta & -\sin\theta & \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \cdot (u_P\ V_P\ u_Q\ V_Q)^T \tag{14}$$

で与えられる．

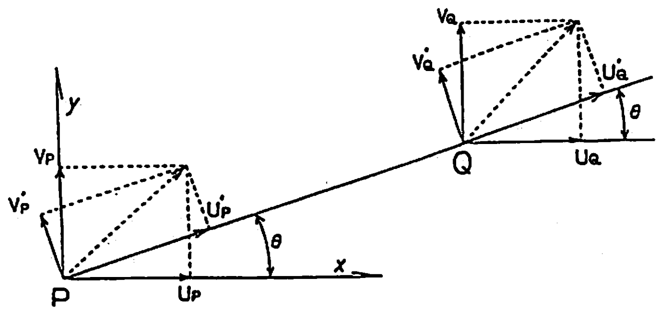


図-1　2点PQ間の相体変位

したがって，式(10)を式(14)へ代入すると，{Δu}を測定値，{C}を未知量として，次の線形方程式が得られる．

$$\{\Delta u_1\}=[A]\{C\} \tag{15}$$

式(15)を最小二乗法によって解けば，未知量{C}を求めることができる．

3．逆解析プログラムの作成

変位が計測されるならば地山のポアソン比を仮定することにより剛性マトリックスが決定できるので，式(10)あるいは(15)により σ_{x0}/E_R, σ_{y0}/E_R, τ_{xy0}/E_R を求めることができる．しかしながら，この場合，弾性係数の値は一意的には定まらず，両者の比として表されることになる．ところで，鉛直応力 σ_{y0} は自重のみによるものと考えることができるならば，土被り圧

$$\sigma_{y0}=\gamma H \tag{16}$$

γ：平均的に単位体積重量
H：土被り厚さ

に等しいとして，その他の初期応力成分および弾性係数の値はすべて求められることがわかる．

素掘りトンネルの場合（覆工のない場合），パラメータRは[A]と関係がないから，式(13)により初期応力と弾性係数はただちに求められる．覆工トンネルの場合は，Rは[A]と関係があるため，初期応力および弾性係数は逐次代入法を用いて繰り返し計算により求めることになる[5]．

覆工のある場合には，逆解析のフローチャートは図-2のようになる．

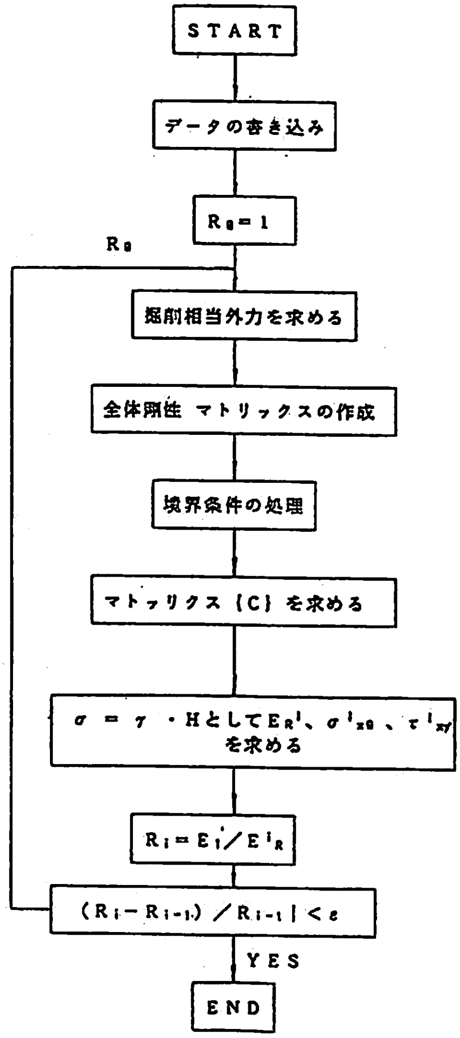


図-2　逆解析のフローチャート

4．解析結果の検討

開発された逆解析プログラムを使用して得られる結果の精度および有効性について，数値シミュレーションによって検討する．検討の方法を図-3に示す．

シミュレーションに用いた解析モデル（平面ひずみ状態）を図-4に示す．トンネルは馬蹄形で，アーチ部は半径2m，覆工はトンネル内壁全周一様に30cmとする．解析モデルの外側境界では，変位をすべて0とした．測定点は図-4に○印で示す20箇所である．

使用する要素は2次元8節点アイソパラメトリック要素である．地山および覆工材料の初期応力と弾性係数は次のように仮定した．

初期応力　$\sigma_{x0}=-0.490$MPa

$\sigma_{y0}=-1.029$MPa

$\tau_{xy0}=-0.196$MPa

（ただし，圧縮を負とする）

地山の弾性係数

$E_R=980$MPa

$\nu_R=0.3$

覆工材料の弾性係数

$E_1=9{,}800$MPa

$\nu_1=0.3$

トンネルまわりの実際の測定値は種々の要因によってばらつきがあるため，シミュレーションにおいてもそのばらつきを考慮する必要がある．本研究では，結果の精度を調べるため，入力データは2種類に分けた．すなわち，ばらつきを考慮する場合とばらつきを考慮しない場合である．ばらつきを考慮しない場合には，順解析にて得られた節点変位をそのまま測定変位として入力した．一方，ばらつきを考慮する場合においては，順解析で得られた節点変位を平均値とし，次式で与えられた変動係数によってばらつきをもたせたものを測定変位として入力した．

$$\text{変動係数}：K\nu=\sigma/\mu \tag{17}$$

ここで，σはデータの標準偏差であり，μはデータの平均値である．

さらに，自事の発生確率は，

$$P\{\mu-2\sigma\leqq x\leqq\mu+2\sigma\}=0.9544$$

であり，測定変位xは，

$$x=(1\pm2K\nu)\mu \tag{18}$$

である．

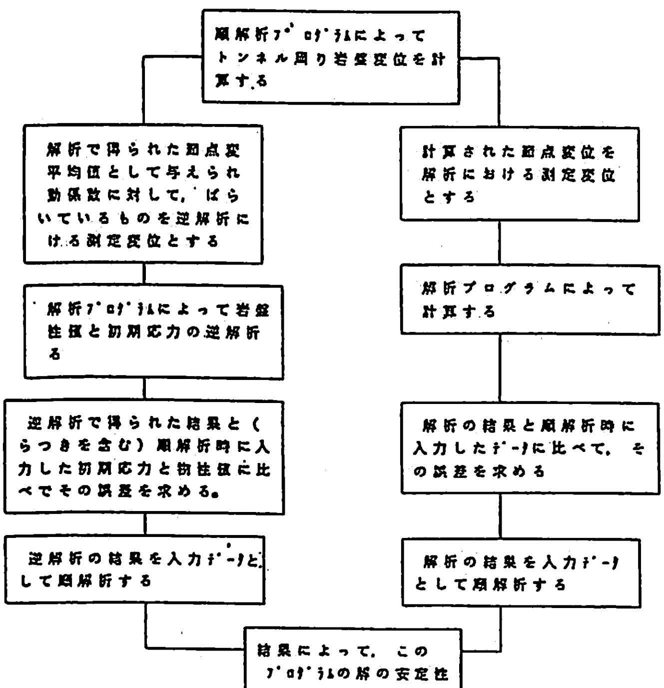


図-3　検討の方法

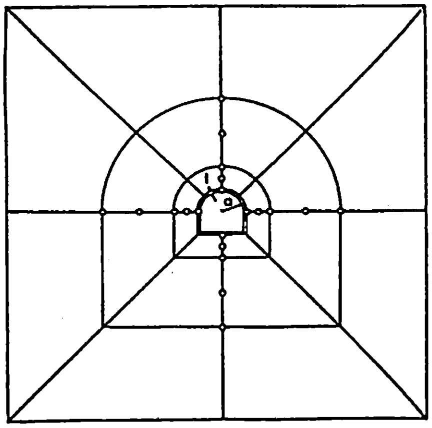


図-4 シミュレーションに用いる解析モデル

これらのデータを入力値として標準的な 16 ビット CPU を持つマイクロコンピュータにて演算させた．その際の数値演算精度（図-2の ε）を 0.01 としたが，演算時間は 40min. であった．

4．1 初期応力と地山の弾性係数

a．素掘りの場合 素掘りの場合における地山の初期応力と弾性係数の逆解析の結果を，Table-1a および Table-1b に示す．

Table-1a 逆解析結果（ばらつきを考慮しない場合）

初期応力と地山の弾性定数	正解値	逆解析値	誤差%（相対）
σ_{x0}	−0.49	−0.49	0
σ_{y0}	−0.1029	−0.1029	−
τ_{xy0}	−0.196	−0.195	0.5
E_{R0}	980	980	0
E_{R0}−地山弾性定数			

Table-1b 逆解析結果（ばらつきを考慮する場合 $K\nu$=0.3）

初期応力と地山の弾性定数	正解値	逆解析値	誤差%（相対）
σ_{x0}	−0.49	−0.415	15.3
σ_{y0}	−0.1029	−0.1029	−
τ_{xy0}	−0.196	−0.106	45.9
E_{R0}	980	778	20.6
E_{R0}−地山弾性定数			

これによれば，測定変位のばらつきを考慮しない場合では正解値と逆解析の結果とは非常によく一致している．一方，ばらつきを考慮した場合においては，σ_x，E_R の逆解析結果と正解値との相対誤差は 21% 程度であるが，τ_{xy} の誤差はインプットデータのばらつきによるため 46% 程度とやや大きくなっている．

b．覆工のある場合 地山の初期応力と弾性係数の逆解析の結果を，Table-2a および Table-2b に示す．

これによれば，測定変位のばらつきを考慮しない場合では正解値と逆解析の結果とは，素掘りの場合と同様，非常によく一致している．一方，ばらつきを考慮した場合においては，σ_x，E_R の逆解析結果と正解値との相対誤差は 26% 程度であるが，やはり τ_{xy} の誤差はインプットデータのばらつきによるため 49% 程度と大きくなっている．

Table-2a 逆解析結果（ばらつきを考慮しない場合）

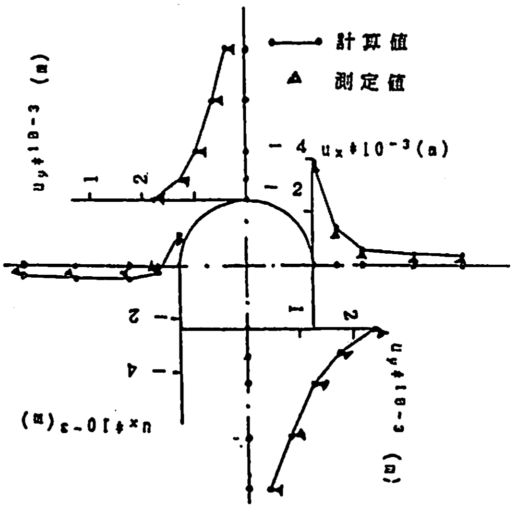
初期応力と地山の弾性定数	正解値	逆解析値	誤差%（相対）
σ_{x0}	−0.49	−0.49	0
σ_{y0}	−0.1029	−0.1029	−
τ_{xy0}	−0.196	−0.195	0.5
E_{R0}	980	980.6	0.6
E_{R0}−地山弾性定数			

Table-2b 逆解析結果（ばらつきを考慮する場合 $K\nu$=0.3）

初期応力と地山の弾性定数	正解値	逆解析値	誤差%（相対）
σ_{x0}	−0.49	−0.53	8.2
σ_{y0}	−0.1029	−0.1029	−
τ_{xy0}	−0.196	−0.0994	49
E_{R0}	980	723.15	26
E_{R0}−地山弾性定数			

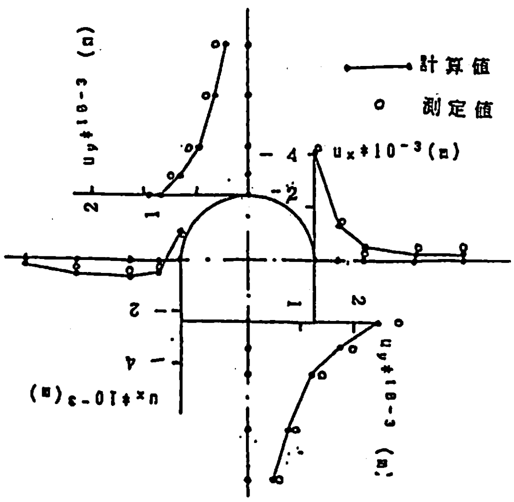
4．2 変 位

図-5および図-6によると，測定変位のばらつきを考慮しない場合は変位の逆解析においても正解値とよく一致した．一方，ばらつきを考慮する場合では，変位の逆解析結果と正解値との相対誤差は30%前後であった．



(覆工がある，ばらつきなし)

図-5　変位の計算値と測定変位



(覆工がある，ばらつきを考慮する)

図-6　変位の計算値と測定変位

5．結　論

本論文では，FEMを用いたトンネル掘削時において計測される変位計測結果から地山の初期応力および弾性係数を求める逆解析プログラムの開発とその検討を行った．これより，以下の結果が導かれた．

(1) 等方等質性の弾性体を仮定した簡単な力学モデルに対し，開発した逆解析プログラムは，解の精度および計算の安定性が優れていることが確かめられた．

(2) 本プログラムによると，素掘りトンネルの場合ではただちに解が得られるという利点がある．また，覆工のあるトンネルの場合では繰り返し計算を行うことにより良い結果を得ることができた．

(3) 数値シミュレーションの結果，測定変位のデータのばらつきが計算結果に影響を与えることが確認された．したがって，現場計測によって得られた計測データの取扱いには，このことを念頭にいれる必要があるものと考えられる．

謝　辞

本FEM逆解析手法のプログラム開発にあたって，熊本大学院修士課程2年重石光弘氏の協力を頂きました．ここに記して感謝致します．

参考文献

1) 陶振宇：「岩石力学的理論与実践」，中国水利出版社
2) 桜井春輔：「トンネル工事における変位測結果の評価法」，土木学会論文報告集，317号，1982年
3) 桜井春輔：「トンネル掘削時における変位計測結果の逆解析法」，土木学会論文報告集，第337号，1983年9月
4) 于学馥，鄭穎人：「地下工程囲岩穏定分析」，中国煤炭出版社，1983年12月
5) E. Hinton and D.R.J. Owen : FINITE ELEMENT PROGRAMMING, A Subsidiary of Harcourt Brace Jovanovich Publishers, 1977