

回転運動におけるエネルギーと角運動量

桃井 凡夫*

Rotational Kinetic Energy and Angular Momentum

Tsuneo MOMOI

(Received September 30, 1992)

There are some interesting phenomena associated with an object which is not rigid, but which changes from one rigid condition with a definite moment of inertia, to another rigid condition.

はじめに

最も基本的な物理量である運動量と、より高次元かつ高度の物理量であるエネルギー量の双方を物理現象として観測することは物理学的にも教育的にも意義あり興味深いことである。これらを実験的に観測対象とするには、直進運動より回転運動において行うのがより効果的である。このための方策として始めに次のような手順がなされるのが適切であると考えられている。運動量とエネルギーとは直進運動においては質量と速度によって決定されるが、回転運動の場合には、直進運動における質量を慣性モーメントに、速度を角速度にそれぞれ置き換えて角運動量と回転エネルギーを導くのである。このような対比が有効となるのは回転運動そのものが直線運動の延長上にあるからである。唯ここでは実験的要請から置き換えが必要となるのである。確かに直進運動の最中に質量を増減させながら、運動量保存とかエネルギー保存という物理量を観測することは極めて困難である。しかるに回転運動ではこれらの観測が、以下の理由により極めて容易なものとなるのである。それは質量に相当する慣性モーメントが、回転軸からの質量の位置を変えることだけで可能となるからである。このような身近な事例は回転している人が腕を伸び縮めする場合や、本報で取り扱うおらんこの乗り手が体を上下に動かす運動がこれに相当する。このような状態を簡単な実験器具で教示¹⁾することは回転台を用いるなどいたって容易なものである。しかもこのような状態は物理的には一つの

剛体状態から他の剛体状態に移行することであり、極めて興味ある力学的現象の実験観測を容易にしているものである。本研究もおらんこの運動解析そのものが目的ではなく、剛体状態の移行により生じる力学的現象の解明が真の目的である。このために誰しもが経験するおらんこの運動をもとに、回転する物体の運動の解析手段として取り扱うものである。当然これまでにもこの点に着目したいくつかの報告²⁻³⁾があるが、本報の成果は、当然これらの報告とは異なる解析の方法と結果により特徴づけられているものである。

回転運動での保存の法則

ある軸の回りに回転する一つの物体が軸からの距離が変わる場合と、おらんこ上の乗り手が自ら体の重心を移動させる場合の力学的類似性をもとに保存の法則を考えてみる。これらの状態をより適確に理解するために Fig.1 が示してある。左右の図共に物体が位置 a にあるとき回転軸 O の回りの慣性モーメントを I_a 、位置 b にあるときのそれを I_b とし、これ

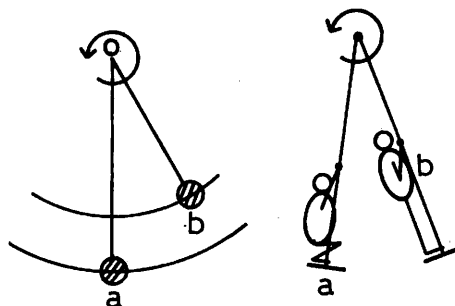


Fig. 1 回転運動

* 理科教育

らに対応する角速度を ω_a, ω_b とする。いま回転しているとき外力が加わらなければ、角運動量は保存されるので慣性モーメントと角速度の関係は、 $I_a \dot{\omega}_a > I_b \dot{\omega}_b, \omega_a < \omega_b$ であり、

$$I_a \omega_a = I_b \omega_b \quad (1)$$

となり角運動量保存の法則が成り立つ。

回転運動エネルギーに関しては、(1)式と $\omega_a < \omega_b$ の関係から

$$\frac{1}{2} I_a \omega_a^2 < \frac{1}{2} I_b \omega_b^2 \quad (2)$$

となることは明らかである。即ち a の位置から b の位置まで物体を移動させたことで b の位置ではエネルギーが増加したものと考えられる。

このことは一見して外力が加わって無いにもかかわらず、どうしてエネルギー保存の法則は成り立っていないのか疑問を生じさせるところでもある。しかし、このところに物理的に極めて興味ある事実が内在されているのである。それは回転している物体に働いている遠心力に抗して、a の位置から b の位置までの移動距離だけの仕事回転エネルギーとして増加することによるものである。

この事実に関連させてぶらんこの運動を考えてみる。ぶらんこの場合は円弧の一部という部分的な回転ではあるが、ぶらんこに乗った人物が最下点近傍で腰を落として重心を低くしていたものが回転すると共に立ち上がって重心を高くすれば回転運動エネルギーを増して行くことになることが予想される。果たしてぶらんこの乗り手の動きがこのようなものであるのか、この事決定は次の運動の軌跡の観測によらねばならない。いずれにしろぶらんこの場合、乗っている者は外力の助けを得なくても、自らの振幅を増大させることができるのであるが、このことを物理的にどのように考えるかという興味深い問題が提起されているのである。角運動量は保存されて変わらないが、回転エネルギーが増大していくところにこの解決のための糸口がある。

軌跡の観測

ぶらんこ自体の運動のメカニズムを解析する手段として次の3種の実験を行い、運動する物体について軌跡の実験的観測を行った。いずれの実験においても始めにビデオカメラで撮影した録画を再生時には一定時間ごとにコマ送りし、あらかじめ用意した座標軸と撮影画像を重ねて平面での座標を読み取って行った。

ぶらんこのモデル実験によるシミュレーションのでも、実際のぶらんこで乗り手が振幅を増大させる

場合であっても、振幅増大の物理的要因としては、次の示す2通りが考えられる。ひとつは遠心力に逆らってなされた仕事ぶらんこに回転エネルギーとして蓄えられて振幅を大きくして行く。遠心力の最大になる機会は1周期に2回あるので、そのたびに仕事をするように乗り手が動作する。いまひとつには1周期に2回身体重心を上下させることは、錘をつけた糸の長さを変えることであり、パラメータ励振が振幅を増大させるのと同じであるという考え方である。前者の原理に基づくモデル実験の試作機は、ぶらんこに搭載した比較的重量のある錘、電池、モーターそれに簡単な錘の上下移動装置から構成されている。この錘を上下に移動させて、全体の運動の様子をビデオカメラにより撮影しその軌跡を求める。

次に実際ぶらんこ上の人物の動きを観測するために、校庭に設置されているぶらんこに小学生に乗ってもらい、腰に目印を付けてその動きを撮影する。この印しの移動する様子を軌跡として求めるのである。

パラメータ励振の錘の軌跡を観測するのに使用した装置の概略図が Fig. 2 に示してある。このような装置により振り子の糸を1周期に2回動かして、その錘の動きを撮影し軌跡を観測するのである。これら3つの方法により得られ運動について以下解析考察する。図中の ω は角振動数である。

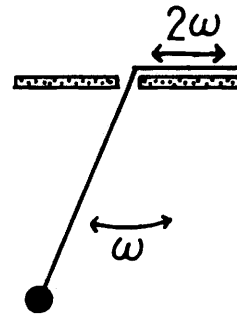


Fig. 2 パラメータ励振の装置概略

運動の解析と考察

モデル実験によるシミュレーションにおいて、ぶらんこの左右の振れである振幅が錘の上下運動により増大していく様子が実験では明確に観測できる⁴⁾。このときの錘の動きの軌跡を示したものが Fig. 3-a である。次の軌跡 Fig. 3-b は実際のぶらんこの乗り

手である小学生がぶらんこの振れを大きくしようとしている場合のものであり、Fig. 3-cはパラメータ励振の軌跡である。これら a, b, c の軌跡が同一傾向を示しているのが一見して認められる。これら軌跡に関して実際のぶらんこの乗り手のものが、モデル実験とパラメータ励振のものと同じであることが明確に示されている。さらに詳細に観測結果をみれば a, c のような機器的な運動軌跡より、b の場合の人の乗ったぶらんこの軌跡の方がやや複雑な動きであることが判る。このあたりが人の運動の特徴でもあり、個人の運動技能の差異にもよるものと推察される。また一方、人がどのようにして、このような物理的根拠に基づく運動を体得するのかを含めて興味ある点でもある。

ぶらんこの運動ではモデル実験であれ、実際の人が乗っている場合であれ最大振幅である両端で重心を高くして、最下点近傍で重心を低くしている。この高低の状態を自ら作り出すことが、初めは小さな振幅で振れているぶらんこや励振の振幅を大きくするという先の推論はここで確証を得たことになる。力学的には、遠心力の最大であるぶらんこの最下点

で物体を常に持ち上げるようにすれば、Fig. 1 のところで述べたように遠心力に逆らってなされた仕事が増大することとなるのである。角速度を増し回転エネルギーを増大させることで1周期で2回、回転エネルギーを増大させる機会を得てぶらんこは静止する両端での位置エネルギーを大きくしていく、言い換えると振幅を大きくするのである。

パラメータ励振であっても、振幅増大の根拠は同様のものである。違いはパラメータ励振では長さを、ぶらんこでは重心の位置を上下させて見かけ上の振り子の長さを変化させているためである。しかし、ぶらんこことパラメータ励振の決定的相違点はパラメータ励振では外からエネルギーが加えられている点であり、ぶらんこでは乗り手が仕事をして、モデル実験では物体を上下させる動力源(ここでは乾電池)が振幅の増大に寄与している点である。

以上はモデル実験機、実際のぶらんこ、パラメータ励振により得られた結果と考察を行ったものであるが、パラメータ励振の場合、コンピュータにより運動方程式を解くことによりこれらの結果を考察することも当然可能である。本報告でもその結果を

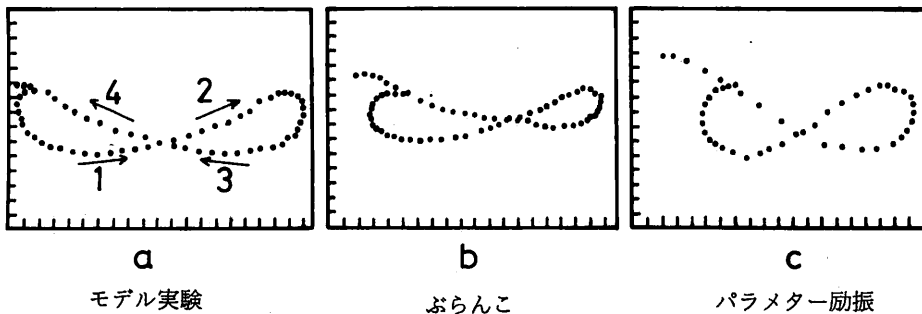


Fig. 3 運動の軌跡

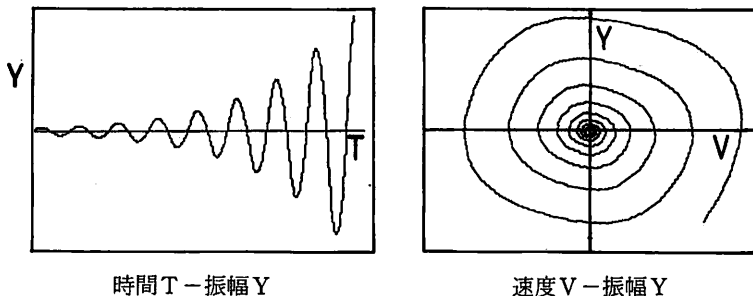


Fig. 4 コンピューターシミュレーション

Fig. 4 に示しておく。(a)図では時間 T の経過と共に振幅 Y が次第に増加しているのが判る。また(b)においては、位相空間内で速度 V の増加と共に振幅 Y が増大する様子が明らかである。

ま と め

人の乗るぶらんこが外力なしに振幅を増大させる力学的根拠を、ぶらんこ・モデル実験・パラメータ励振の運動の軌跡の同一性を示すことで明らかにすることができた。

この結果、回転運動に関する保存の法則の理解を、より効果的なものとする事が可能となった。

謝 辞

本研究に当たり、ビデオカメラの撮影に協力して頂いた熊本大学大学院教育学研究科理科教育専修の日吉邦宏君に心から感謝致します。

文 献

- 1) 第19回日本理科教育学会九州支部大会発表要項 (1991)
- 2) 穴戸てる子：応用物理教育, 12, 27 (1987)
- 3) Guy Moore : Phys. Educ., 26, 254 (1991)
- 4) 第20回日本理科教育学会九州支部大会発表要項 (1992)