熊本大学教育学部紀要，人文科学
第60号，221－235，2011

数学教育の基礎としての数学観：数学＝パターンの科学

ドイツ・ノルドラインベストファーレン州における数学教育への具体化と可能性

山 本 信 也

On the Significance of a View of Mathematics: Mathematics as a Science of Patterns in Mathematics Education

Shinya YAMAMOTO

（Received October 3, 2011）

Key words : 教育スタンダード，ドイツの数学教育，パターンの科学としての数学．

はじめに

1．問題意識

数学教育史研究の先駆者である小倉金之助（1885-1962）は，大正 13（1924）年，当時の数学教育の現状を批判する中で以下のような問題提起を行った．

《此等の問題を解決する為には，数学の本質，教育上に於ける数学の価値，其他の問題について，モット深く根底からの研究を必要とすると信ずる．》（小倉：1924，p. 73）

数学教育について議論するにあたって，学問としての「数学」と教科としての「数学」（数学教育）とを明確に区別し，数学の本質とその教育的価値について考察することが数学教育の根本問題であるとしたのが小倉金之助であった．

また，日本における数学教育学の黎明期（1970 年代初め）において，数学教育の研究課題として提起されたのも，数学の本質，とりわけ数学に関する認識の問題であった．

竹内芳男（1970）が数学教育の課題として提起したのは，「学校数学において形成される数学的認識と経験的認識とはどのように統一されるべきか？」という問題であった．また，平林一栄（1973）は《わたくしは，数学教育学の固有の問題，そしてそれだけに重要だと思われる問題として，つぎの二つを設定している．第一は，数学の本性についての反省．第二は，数学と人間性との関連についての考察である．》（p. 84）と指摘した．

教科教育の一つである数学教育（算数・数学）研究の独自でかつ固有な問題は，数学の本質，その認識論的問題にしか求めることはできないであろう．したがって，従来の数学教育学で提起された「数学」に関する本質及びその認識に関する問題は，数学教育学研究の固有な問題であったし，これからも固有な問題であろう．しかし，その問題についての考察範囲は，中等学校（中学校・高等学校）の数学教育だけに限られる必然性はない．岩崎秀樹（2007）が指摘するように，産業構造の変換に伴って，発展・途上を問わず，世界的規模で初等・中等教育の接続が制度的に図られている．その中で小学校の算数と中・高等学校の数学との関係を調整する視点や枠組みの普遍化が待たれるのは当然である．就学前から，小・中・高等学校，ないしは教員養成課程における段階までの数学教育までをも考察範囲としながら，その統一的な数学教育を構想し，各学校に則した数学教育実践を行っていくが必要である．その際，小倉が指摘したようにどのような数学観を前提として数学教育を実践すればよいか？これが重要な問題である．

2．本研究及び本稿の研究目的

イギリス生まれの数学者ソーヤー（W. W. Sawyer: 1978），アメリカの数学者 K. デブリン（K. Devlin: 1996）には，数学に対する共通する捉え方が存在する．それは「数学＝パターンの科学」（the science of patterns; Wissenschaft von Muster）という数学観である．それは，学問としての数学を「パターン」（規則性）の研究ととらえる立場である．

このような数学観を基礎として就学前から高等学校までの数学教育を構想し，研究開発しているのが，ドイツの数学教育学者ヴィットマン（E. Ch. Wittmann）とミュラー（G. N. Müller）である.（E. Ch. Wittmann：2005, G. N. Müller & E. Ch. Wittmann：2005）.

本研究は，「数学＝パターンの科学」という数学観はどのような数学教育をもたらしうるか？について考察することを目的とする．その際，数学を「パターンの科学」と捉えることの意味，その数学観を基礎とする数学教育と現在の数学教育との関連，そしてその可能性について考察する必要がある．さらに，そこで得られた仮説的言説を実証的に検証すること．これらが重要な研究課題である．

本稿では，上述の研究課題を考察するために，「数学＝パターンの科学」という数学観が，実際に具体化されつつあるドイツ連邦共和国の数学教育の動向に注目する．ドイツで進行しつつある初等数学教育の改革の中で，「数学＝パターンの科学」という数学観は，初等数学教育の基礎となる数学観と見なされている．

そこで，「数学＝パターンの科学」は，ドイツではいかに具体化されようとしているかを明らかにすることが本稿の中心課題である．具体的に言えば，この中心課題についての考察を通して生じた課題について文献的にまた実証的に確認することが本稿の目的である．

3. 本稿の研究方法

ドイツでは，国際的な学力比較調査での予想外の結果を契機として教科教育の質の保証とその向上をはかるために2004年に常設文部大臣会議（Die Ständigen Konferenz der Kultusminister der Länder in der Bundesrepublik Deutschland，以下KMKと略称）で「教育スタンダード（Bildungsstandards)」が決議された（原田：2006）．これは，ドイツ連邦共和国における国家的な学校教育の基準であり，ドイツの教育改革の象徴である．

そこで，まず「教育スタンダード」の1つである「初等領域の数学教育スタンダード」(2004）を取り上げる．そこに示された学習内容の領域「パターンと構造」は，「数学＝パターンの科学」という数学観の具体化と見なしうる領域である．これに関するヴィットマンの論文をもとにしながら，その具体的な学習内容について明らかにする（Ⅰ）．

これまでドイツ連邦では各州が独自に作成した「学習指導要領」(Lehrplan）に基づいて教科教育が行われてきた．しかし2004年以降，各州は「教育スタンダード」を具体化する義務を負うことになった．本稿では州レベルで，それがどのように具体化されたのかを把握するために，ノルドライン・ベストファーレン州（以下NRW州と略記）の動向に注目する．それがどのように学習指導要領に反映されたのかについて，2008年にNRW州の文部省が公表した学習指導要領をもとに考察することが第2の課題である（Ⅱ）．

NRW州の文部省の公式ホームページでは「学習指導要領を実施のための資料」が公開されている．その中の1つは「教育スタンダード」で示された領域「パターンと構造」の具体化に関するものである．そこには，この領域の趣旨を各教室で実施するためにいくつかの学習課題例が挙げられている．領域「パターンと構造」で示された学習内容の具体的な意味について考察するために，その例の1つである「構造化された課題のフォーマット：計算三角形の列と数の石垣の列」を取り上げる．そのうちの中の「数の石垣列」の学習課題に対しては，ドイツの小学生の取り組みについて肯定的に評価されている．日本の小学生の場合も同じように積極的に取り組むのか？このことを確かめるために，小学校3年生を対象に実証的研究を行った．その調査の概要と結果について述べる（Ⅲ）．

Ⅰ.「教育スタンダード」における領域「パターンと構造」の内容

1. 数学教育の「教育スタンダード」

常設文部大臣会議KMKは，2002年5月23，24日に，基礎学校修了時（第4学年），基幹学校修了時（第9学年），中級学校修了時（第10学年）の教育スタンダードを作成することを決議した．それにともなって，2003年12月4日に中級学校修了時の教育スタンダード（数学・ドイツ語・第1外国語）が決議され，公表された．2004年10月

図1「初等領域の数学教育スタンダード」の表紙

15 日には，基礎学校修了時の教育スタンダード（ドイツ語，数学）と基幹学校修了時（第 9 学年）の教育スタンダード（ドイツ語，数学，第 1 外国語）が，同年 12 月 16 日には，中級学校修了時の教育スタンダード（生物，化学，物理）と教員養成のスタンダードが決議された．これにともなって，各州はこの教育スタンダードに基づいて学習指導要領を作成することになった．数学教育に関係する教育スタンダードには，以下の 3 種類がある．

表 1 数学教育の「教育スタンダード」一覧

(1)「初等領域の数学教育スタンダード」(2004)
Sekretariat der Städingen Konferenz der Kultusminster der Länder in der Bundesrepublik Deutschland（Hrsg.）, *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich, Beschluss vom 15. 10. 2004.*, Wolters Kluwer, 2005.

(2)「基幹学校修了の数学教育スタンダード」(2004)
Sekretariat der Städingen Konferenz der Kultusminster der Länder in der Bundesrepublik Deutschland（Hrsg.）, *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Hauptschulabschluss, Beschluss vom 15. 10. 2004.*, Wolters Kluwer, 2005.

(3)「中級学校修了の数学教育スタンダード」(2003)
Sekretariat der Städingen Konferenz der Kultusminster der Länder in der Bundesrepublik Deutschland（Hrsg.）, *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mitteren Schulabschluss, Beschluss vom 4. 12. 2003.*, Wolters Kluwer, 2007.

2. 「初等領域の数学教育のスタンダード」(2004)

「初等領域の数学教育のスタンダード」は，基礎学校 4 年修了時までに習得されるべき数学的能力を示したものである．基礎学校 4 年修了時までに習得されるべき数学的な能力はどのような能力であるか？ 4 年間の基礎学校の数学教育で育成されるべき能力は大きく２つに分けられている．「一般的な数学的能力」（Allgemeine mathematische Kompetenzen）と「学習内容に関わる数学的能力」（Standards für inhaltsbezogene mathematische Kompetenzen）である．さらに，それぞれは５つの下位項目に分けられている（表 2）．

表 2：「初等領域の数学教育のスタンダード」における数学教育の目標

「一般的な数学的能力」
- 「問題解決」Problemlösen
- 「コミュニケーション」Kommunizieren
- 「理由づけ」Argumentieren
- 「モデル化」Modellieren
- 「表現」Darstellen

「学習内容に関わる数学的能力」
- 「数と演算」Zahlen und Operationen
- 「空間と形」Raum und Form
- <u>「パターンと構造」Muster und Strukturen</u>
- 「量と測定」Größen und Messen
- 「データ，頻度，確率」Daten, Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit

（下線，引用者）

本稿の中心的課題を考察するためには,「学習内容に関わる数学的能力」の領域の１つである「パターンと構造」に注目しなければならない．この領域を通して，どのような数学的な能力の習得が期待されているのか，が問題である．

3. 領域「パターンと構造」と「数学＝パターン科学」

「初等領域の数学教育のスタンダード」で示されている５つの領域については下位の学習事項が示されている．領域「パターンと構造」の下位の学習事項は「規則性を見つけ，それを書き，表現すること」と「関数的な関係を見つけ，それを書き，表現すること」の２つのである（表3）．さらに，それぞれ３つの下位の学習事項が示されている．

表3：領域「パターンと構造」の下位の学習事項

「規則性を見つけ，それを書き，表現すること」

〇構造化された数の表現を理解し，活用すること

〇図形や数のパターン（数列，構造化された課題列などで）を見つけ，書き表し，さらにそれを続けること

〇数や図形のパターンを自分で発展させ，体系的に変化させたり，それを書き表したりすること

「関数的な関係を見つけ，それを書き，表現すること」

〇現実の状況の中に関数的関係を見つけ，言語的に表現し（たとえば数量と値段），それに関連した問題を解くこと

〇関数的関係を表に表現してそれを調べること

〇比例に関する簡単な事実問題を解くこと

ここに示された「パターン」という用語は，広辞苑によれば，「型」，「型紙」，「様式」，「図案」などを意味する言葉である．一方，イギリスの数学者ソーヤーは，「パターン」を「精神が認めることのできるほとんどあらゆる種類の法則性」（ソーヤー：1978, p. 10）と規定し，「数学とは，ありとあらゆるパターンの分類と研究をする学問である」と述べた．教育スタンダードに登場した領域「パターンと構造」で示された「パターン」は，ソーヤーの意味で解釈することが妥当である．したがって，数や図形の中，または現実の状況の中に規則性（パターン）を発見したり，その規則性を変化・発展させたりする能力の育成がこの領域のねらいであるといえる．

数学者であるソーヤー（1978），デブリン（1996）以外に，「数学＝パターンの科学」という数学観を提起した人物として，イギリスの著名な数学者ハーディー（G. H. Hardy：1967），アメリカの物理学者ファインマン（Richard P. Feynman:1968）などがいる．この数学観を基礎として就学前から高等学校までの数学教育を統一的に捉え，その研究開発が展開しているのが，ヴィットマン，ミュラーである．その研究成果の１つが革新的な初等数学教育の教科書『数の本』（Das Zahlenbuch）である（E. Ch. Wittmann：2005, G. N. Müller & E. Ch. Wittmann：2005），両氏は，教育スタンダードを解説した論文の中で，この領域「パターンと構造」について解説し，基礎学校における実現のための具体的提言を行っている．その中で両氏は，この領域の背景には，「パターンの科学としての数学」があることを指摘し，この教育スタンダードを実現するには，その背後にある数学観に配慮する必要がある，と提言した．

《教育スタンダードを確実に実行に移すには，教育スタンダードの根底にある数学観とともに教育スタンダードを具体化する必要がある．このようにしてはじめて，教育スタンダードに示された新しい課題形式や授業形態は，表面的な教授学的技法と誤解されることはなく，本来の授業が実現され，そして「しかるべく理解された教科教育」という観点に向けて授業は変化することが期待できる．》（E. Ch. Witmann/G. N. Müller 2008：46-47）

要するに，教育スタンダードに示された内容をただ実行に移すだけでなく，その背景にある数学観を同時に意識しながら，それをいかに具体化するかを考えるべきである，という提言である．

さて，次に問題となるのは，「数学＝パターンの科学」という数学観との関連で領域「パターンと構造」は，どのように具体化されようとしているのか，である．そこで，本稿ではドイツ連邦共和国の州であるNRW州の文部省の動向を通してこれを考察したい．

Ⅱ．NRW 州に於ける「数学＝パターンの科学」の具体化

1. NRW 州の基礎学校の学習指導要領（数学）（Lehrplan Mathematik）

NRW 州はドイツ連邦共和国の西部に位置し，16 の連邦州の中で人口数は国内第 1 位，また人口密度も都市州を除いて第 1 位の州である．ドイツ全体で 12 ある人口 50 万人以上の都市の内，デュッセルドルフ，ケルン，ドルトムント，エッセン，デュイスブルクの 5 つの都市が NRW 州にあり，ドイツ連邦共和国の中心的な役割をになう州である．

NRW 州の基礎学校（4 年制の初等学校）の学習指導要領（数学）（Lehrplan Mathematik）は，2008 年 6 月 16 日に新たに告示された．NRW 州文部省ホームページによれば，それは 2008 年 8 月 1 日付けで実施された学習指導要領である．これによれば，基礎学校の数学教育の目標は，「初等領域の数学教育スタンダード」に対応して，「学習過程に関係する領域」（Prozessbezogene Bereiche）と「学習内容に関係する領域」（Inhaltsbezogene Bereiche ）の 2 つに分けられている（表 4）．

表 4:「NRW 州の学習指導要領（数学）」（2008）の数学教育の目標

「学習過程に関係する領域」Prozessbezogene Bereiche
- 「問題解決 / 創造性」Problemlösen/Kreativität
- 「モデル化」Modellieren
- 「理由づけ」Argumentieren
- 「表現 / コミュニケーション」Darstellen / Kommunizieren

「学習内容に関係する領域」Inhaltsbezogene Bereiche
- 「数と演算」Zahlen und Operationen
- 「空間と形」Raum und Form
- 「量と測定」Größen und Messen
- 「データ，頻度，確率」Daten, Häufigkeiten und Wahrscheinlichkeiten

「初等領域の数学教育のスタンダード」の大きな枠組みは，「一般的な数学的能力」と「学習内容に関わる数学的能力」の 2 つであった．NRW 州の新しい学習指導要領では，それぞれ「学習過程に関係する領域」と「学習内容に関係する領域」と名称が変更されている．しかし，それぞれの下位項目を見れば，それらの領域は基本的にほぼ同じある（表 5）．

表 5：「初等領域の数学教育のスタンダード」（2004）と「NRW 州学習指導要領（数学）」（2008）の比較

「初等領域の数学教育のスタンダード」（2004）	「NRW」州学習指導要領（数学）（2008）
一般的な数学的能力	学習過程に関係する領域
「問題解決」	「問題解決 / 創造性」
「コミュニケーション」	「モデル化」
「理由づけ」	「理由づけ」
「モデル化」	「表現 / コミュニケーション」
「表現」	
学習内容に関わる数学的能力	学習内容に関係する領域
「数と演算」	「数と演算」
「空間と形」	「空間と形」
「パターンと構造」	「量と測定」
「量と測定」	「データ，頻度，確率」
「データ，頻度，確率」	

両者の決定的違いは，「初等領域の数学教育のスタンダード」に示されていた「パターンと構造」という領域が，NRW州の2008年の学習指導要領（数学）では削除されている点である．これは，どのような事情によるのか？これについて考察するために，NRW州の文部省が学習指導要領実施のために提供している資料に注目してみたい．

2. 領域「パターンと構造」の具体化の基本方針

NRW州文部省のホームページで提供されている学習指導要領実施のために提供している資料は，以下の8種類の資料からなる（表6）（2010.12.8確認）．

表6：NRW州の文部省による学習指導要領を実施のための資料

(1) 基礎学校-新しい指導方針と学習指導要領（2008）Die Grundschule in NRW-Neue Richtlinien und Lehrpläne 2008

(2) 学習指導要領数学についての情報 Informationen zum Lehrplan Mathematik

(3) データ，頻度，確率-学習指導要領数学の新しい領域 Daten, Häufigkeiten, Wahrscheinlichkeiten - Ein neuer Bereich im Lehrplan Mathematik

(4) 数学の学習課題 Lernaufgaben Mathematik

(5) パターンと構造の課題の基本的考え方 Aufgabenideen zu Muster und Strukturen

(6) 学習過程と関連する課題設定の例 Beispiele zu prozessbezogenen Aufgabenstellungen

(7) 10個の授業例による数学の学習指導要領の具体化例：ドルトムント大学 ゼルター教授 Illustration des Mathematik-Lehrplans durch zehn Unterrichtsbeispiele, Prof. Dr. Selter, Uni Dortmund

(8) 数学教育における言語活動の促進 Sprachförderung im Mathematikunterricht

「パターンと構造」という領域が削除されている事情ついて考察するために，さらに「パターンと構造の課題の基本的考え方」(Aufgabenideen zu Muster und Strukturen) という資料に注目したい．これは，3部構成，総ページ数27頁からなる資料である（資料7）．

表7：資料「パターンと構造の課題の基本的考え方」の構成

(1) KMK教育スタンダードにおけるパターンと構造 Muster und Strukturen in den KMK-Bildungsstandards

(2) NRW州の学習指導要領におけるパターンと構造 Muster und Strukturen im NRW-Lehrplan

(3) パターンと構造のための課題 Aufgabenideen zu Muster und Strukturen

この資料では，「初等領域の数学教育スタンダード」で示された領域「パターンと構造」の重要性が次のように述べられている．

《パターンと構造の認識と活用は，数学教育で本質的な役割を果たす．その活用とは，ある問題を解くためにパターンや構造を引き合いにだすことだけでない．パターンや構造を発見・活用することを通して，子どもたちに数学を行う可能性を与えること，そして全体としてその可能性を高くすることが重要である．》(Aufgabenideen zu Muster und Strukturen, p.3)

ここで，注目すべきことは，基礎学校の数学教育についての捉え方である．それは，特定の学習内容の習得で終わるのではなく，数や図形に見られるパターンを発見し，活用する活動自体をも重視する教科と考えられている．年少の子どもたちが「数学を行う」(Mathematik zu betreiben) 可能性を与える数学観が，「数学＝パターンの科学」という数学観であるとされているのである．それは，資料の冒頭の文章からも確認することができる．

《しばしば，数学は「パターンの科学」とみなされている．このことから，教育スタンダードの主要な内容領域の1つとして「パターンと構造」という領域が設定されたことは明らかである．》(「パターンと構造のための課題」, p.2)

このように，「数学＝パターンの科学」を基礎とする数学教育の実現を意図して設定された領域「パターンと

構造」は，特定の学習内容の習得だけに関連したものではない．むしろ数学教育全体のあり方と関連する領域と考えられている．その意味で，ヴィットマンやミュラーが主張するように，この領域は数学教育の本質と関わる領域でなのである．《「パターンと構造」は，ただ単に数学教育の１つの側面として重要なのではなく，この側面は本質的であるということを主張したい．「パターンと構造」は，少なくとも数学の本質に関わることであり，また前節で示されたように新しい課題形式と授業形式は，本来の教科教育の実現の道を示してくれる．それと同時に数学の学習を豊かなものにしてくれる．》（Wittmann/Müller 2008, p. 42）．

このような考え方によれば，NRW 州の学習指導要領において独立した領域として，「パターンと構造」が設定されなかった理由はもはや明らかであろう．この領域で示された学習内事項は，すべての学習内容を横断するものとされたがゆえに，独立した領域として設定されなかった．実際，以下のように述べられている．

《NRW 州の基礎学校の数学の学習指導要領では，「パターンと構造」という内容領域は独立した領域として設定することはしなかった．規則性や関係を見つけたり，書き表したり，表現することは，いろいろな内容の学習と関連付けて行うことができる．また「パターンと構造」の領域と他の４つの領域を明確に区分することが困難である．

さらに，規則性や関係を見つけたり，書き表したり，表現することは，問題を解いたり，その解決方法について議論する際に，必要とされる能力である．

「パターンと構造」は，それゆえ特定の学習内容にだけ関連するものではなく，すべての学習内容の領域をいわば横断する領域である．》（「パターンと構造のための課題」, p. 2-3）

それでは，どのような問題を通してこの領域の趣旨を実現しようとしたのだろうか？以下では，この点に焦点を当てて考察したい．このことは，「数学＝パターンの科学」の数学観を基礎とする数学教育がどう理解され，構想されたのかを明らかにする上で重要な課題である．

3. 領域「パターンと構造」具体化のための学習課題

NRW 州の文部省は，「パターンと構造」という領域の趣旨を実現するための学習課題例として以下の７つの課題が示されている（表 8）．

表 8：「パターンと構造」の学習課題

A）魔法陣の数列（Zauberquadratfolgen）

B）構造化された課題のフォーマット：計算三角形の列と数の石垣の列
（Strukturiete Aufgabenformate: Rechendreieck- Kette und Zahlenmauer- Kette）

C）特別な方法によるかけ算（Malnehmen auf besondere Art）

D）格子上における配列　（Anordnungsmuster auf einem Spielfeld）

E）アナログ時計とデジタル時計（Analoge und digitale Uhren）

F）歩いた距離（Schrittlänge）

G）偶然実験の実施と分析（Zufallsexperimente durchführen und auswerten）

これらの７つの学習課題例についての総合的な考察は別稿に期すことにして，本稿では その一つ，「構造化された課題のフォーマット：計算三角形の列と数の石垣の列」の学習課題例に注目して，「パターンと構造」という領域の趣旨がどのように実現されようとしているか考察したい．

「数の石垣列」については，3 つの問題が示されている．問題 1 と問題 2 は，前 3 つの数の石垣を計算して，そこに組み込まれたパターン（規則性）を発見し，最後の数の石垣に当てはめて完成させる問題である（図 2，図 3）．問題 3 は，自分でパターンをつくって最終的に頂上が 24 の数の石垣をつくる問題である（図 4，図 5）参照）．

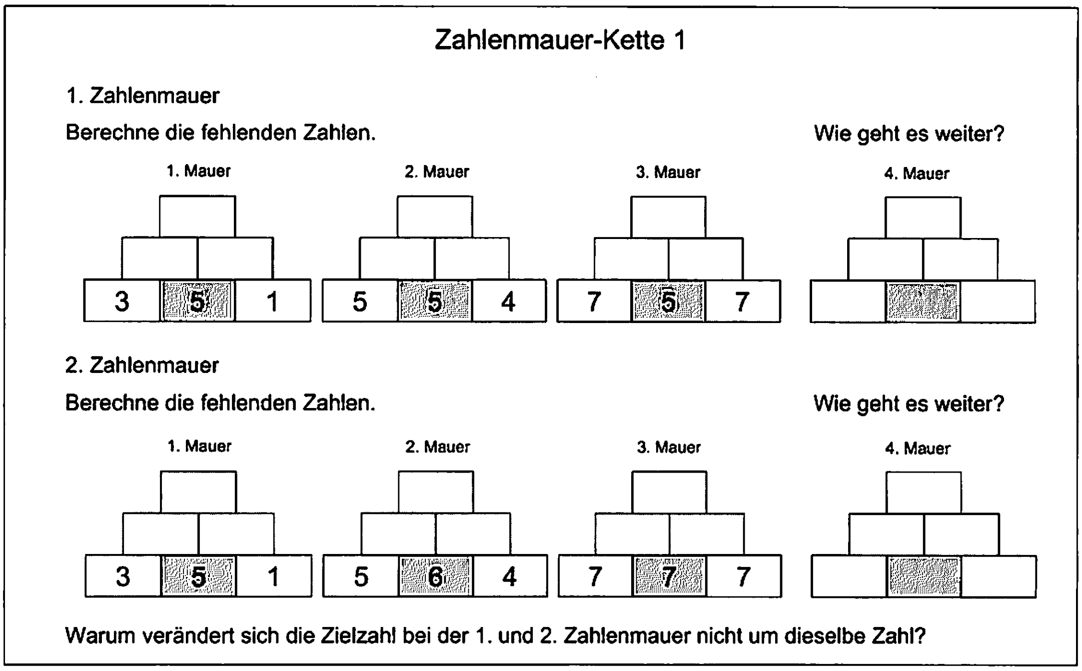

図2：数の石垣の列，問題1と問題2（原文）

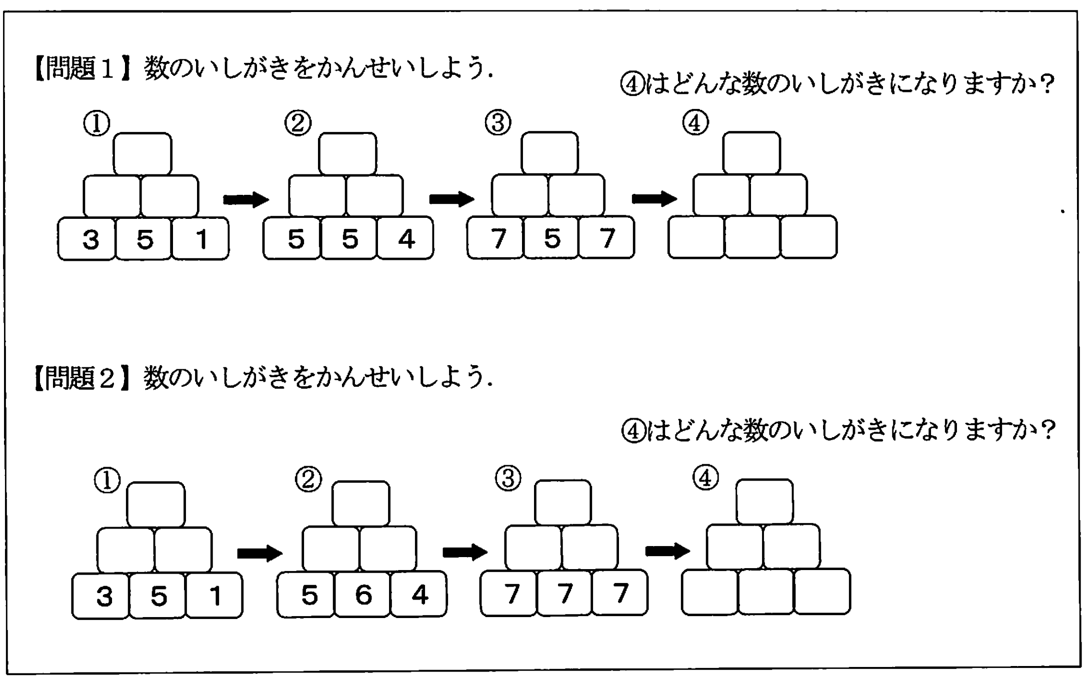

図3：数の石垣の列，問題1，問題2（日本語訳）

Zahlenmauer-Kette 2

Tim hat sich eine Zahlenmauer-Kette ausgedacht.
Er verrät dir, wie seine erste Zahlenmauer aussieht.
Seine vierte Zahlenmauer hat die Zielzahl 24.

Welche Zahlenmauer-Kette könnte er sich ausgedacht haben?

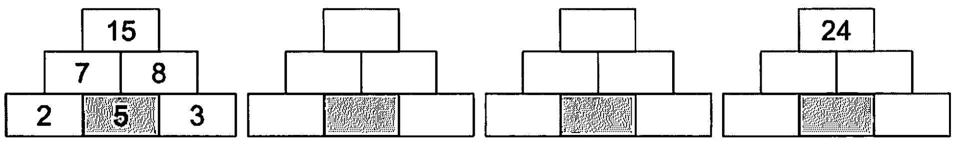

図 4：数の石垣の列，問題 3（原文）

【問題3】よしおさんは，数のいしがきのもんだいを　つくろうと思います．さいごの数のいしがきのちょうじょうを，２４にしたいそうです．よしおさんは，どんな数のいしがきがつくれるでしょう？

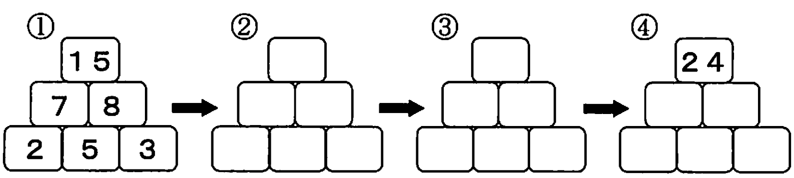

図 5：数の石垣の列　問題 3（日本語訳）

問題 1，問題 2 は，最初の 3 つの数の石垣を計算し，1 段目の数の変化の規則性（パターン）を見抜き④の石垣を作らなければならない問題である．それぞれ典型的な解答は次のようになるであろう（図 6)．なお，解答例は太字斜体で示した．

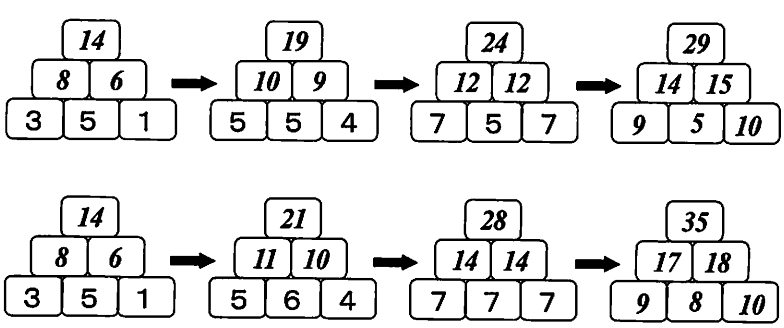

図 6：数の石垣の列　問題 1 と問題 2 の典型的な解答

問題3は，①から④の石垣に，パターンがあるように頂上が24の石垣を最後につくらなければならない問題である．その典型的な解答例は次のようになるであろう．

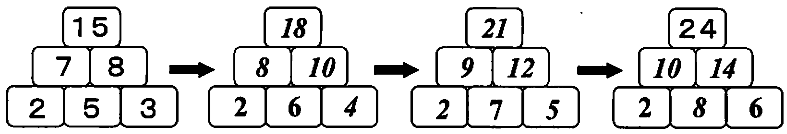

図7：数の石垣の列　問題3の典型的な解答

「初等領域の数学教育のスタンダード」(2004) の領域「パターンと構造」には，学習内容の1つとして「規則性を見つけ，それを書き，表現すること」の項目がある（表3参照）．その下位の学習事項として「数や図形のパターンを自分で発展させ，体系的に変化さたり，それを書き表したりすること」が記述されている（表3参照）．このように数や図形のパターンを発見し，それをさらに発展させることを期待する学習課題例として例示された1つが「数の石垣列」である．したがって，子どもたちは，数の石垣をただ完成して終わるのではなく，発見したパターンを使って新しい数の石垣をつくったり，発展させたりすることが期待されているのである．

Ⅲ．数学的パターンと児童

NRW州文部省が提供している資料では，「数の石垣列」の【問題1】，【問題2】，【問題3】（図3，図5）に対して子どもたちはそこにあるパターンを発見し，活用しながらこの問題に取り組むことができるであろう，と肯定的に述べられている．

《数の石垣，計算三角形が授業に導入され，子どもたちがそのパターンを発見した経験があるならば，ここに示した4つの問題（数の石垣の問題3題，計算三角形の問題3題）で，子どもたちは発見したパターンを活用し，またはさらにいろいろなパターンを発見するであろう．》(「構造化された課題のフォーマット：計算三角形の列と数の石垣の列」，p. 6)

はたして，日本の小学生もドイツの子どもたちのように，これらの問題に十分取り組むことができるのだろうか？このことを確かめるために，実際に調査を行った．調査の目的，方法，その結果は以下の通りである．

1. 調査の目的

調査の目的：日本の小学生も数の石垣列に作意的に組み込まれたパターンを発見し，それらを活用できるか，さらに数の石垣列に組み込めるパターンを自分で発展させることができるか？

前者のことを明らかにするために，【問題1】，【問題2】を1枚のシートにして子どもたちに取り組ませた．また後者のことを明らかにするために【問題3】を使用した．ただし，問題3については，どのような数の石垣列を子どもたちが作れるかを調べるために，数の石垣列の枠を1つ追加して，子どもたちに取り組ませた．

2. 調査の方法と実際

(1) 実施日：平成22年12月22日（水）11: 45 ～ 12: 30
(2) 実施クラス：熊本大学教育学部附属小学校3年2組（38名）
(3) 調査協力者：宮脇真一（主幹教諭）

子どもたちは，【問題1】，と【問題2】に，あわせて10分間取り組んだ．その後，意見交換をしながら，答え合わせを行った．その後，【問題3】に10分間取り組み，再び意見交換をして答え合わせを行った．

3. 調査の結果と考察

(1)【問題1】と【問題2】に対する反応

1)【問題1】に対する反応

反応 A：一定の規則性にもとづいて最後の数の石垣の頂上を 29 とする反応

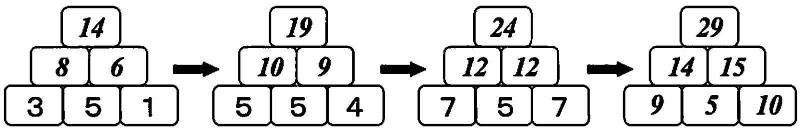

図 8：一定の規則性にもとづいて最後の数の石垣の頂上を 29 とする反応

反応 B：④の頂上は 29 であるが，規則性が確認できない反応
反応 C：④の頂上が 29 以外の反応
反応 D：④に何も書いていない反応

表 9：問題 1 の各反応の度数

反応	度数
反応A	28
反応B	6
反応C	2
反応D	2
計	38

2)【問題2】に対する反応

反応 A：一定の規則性にもとづいて最後の数の石垣の頂上を 35 とする反応

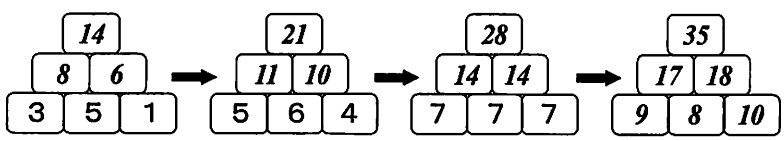

図 9：最後の数の石垣の頂上を 35 とする反応

反応 B：④の頂上は 35 であるが，規則性が確認できない反応
反応 C：④の頂上が 35 以外の反応
反応 D：④に何も書いていない反応

表 10：問題 2 の各反応の度数

反応	度数
反応A	24
反応B	10
反応C	2
反応D	2
計	38

(2)【問題3】に対する反応とタイプ

2つの数の石垣列の枠があるワークシートを子どもたちに配付し10分間取り組ませた．その結果，クラス全体で7種類の「数の石垣列」を考え出した（図10）．

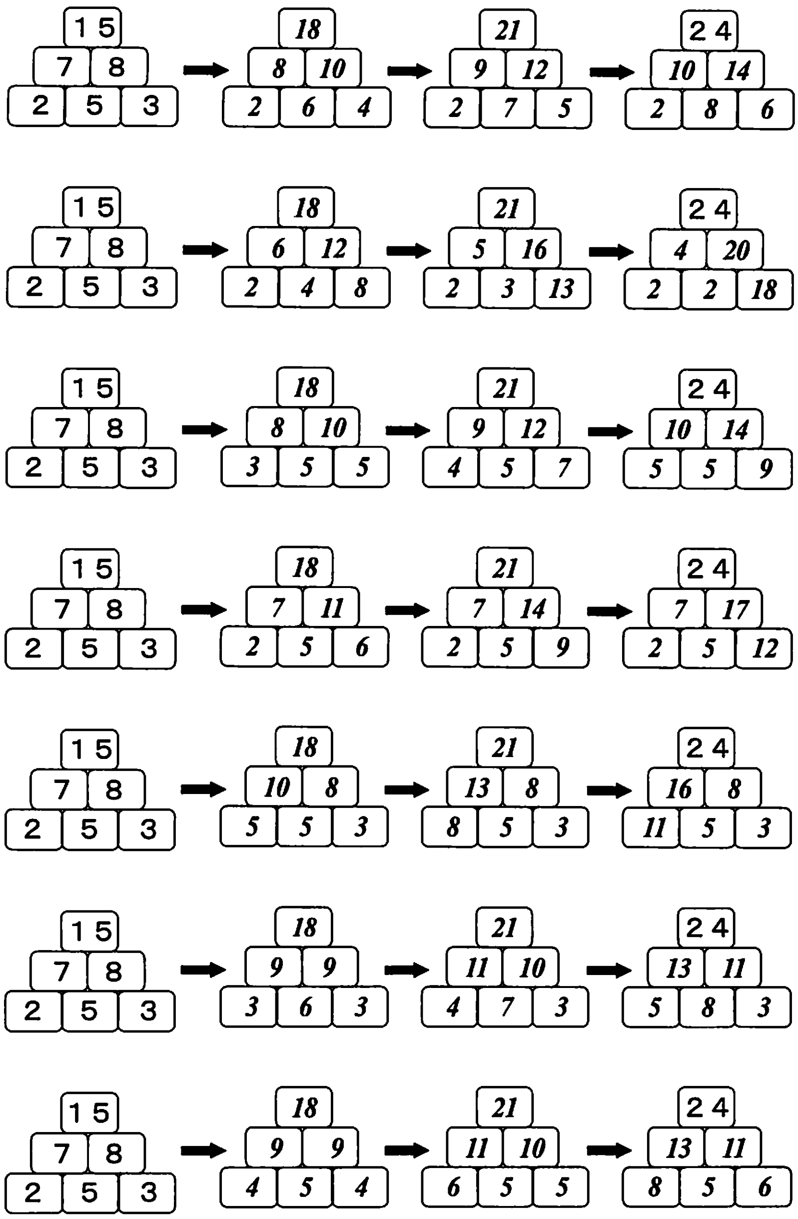

図10：子どもたちが作り出した「数の石垣例」

また，4つの数の石垣の頂上は15，18，21，24となっているが，1段目の3つの数が体系的に変化していない反応も見られた（図11）．

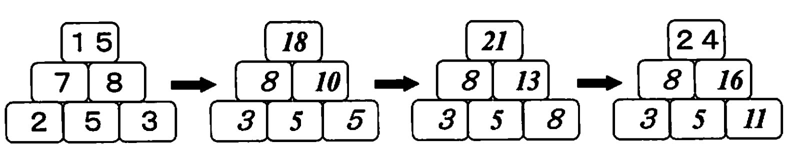

図11：4つの数の石垣が体系的に変化していない例の例

また，頂上を＋2，＋3，＋4と変化させ，15，17，20，24となっているが，1段目の数が体系的に変化していない反応も見られた．

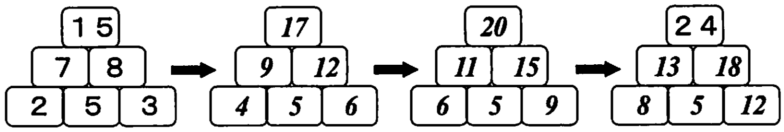

図12：4つの数の石垣が体系的に変化していない例の例

(3) 考察

【問題1】では，前の3つの数の石垣の1段目の中央の数は変化せず，両端がそれぞれ2ずつ，3ずつ変化する．その結果，頂上が5ずつ変化している．38名中28名の児童がこのパターンを読み取り，それに合わせて4番目の石垣をつくりだした．

【問題2】の前の3つの数の石垣では，1段目の3つの数の変化には一定のパターンがある．38名中24名の児童が，そのパターンを読み取り，最後の石垣を完成させた．

【問題1】，【問題2】は，日本の算数教科書には見られないタイプの問題である．それにも係らず，半数以上の児童が，数の石垣に組み込まれたパターンを読み取り，それを活用することができており，柔軟に対応できる児童も多い．ただ，気にかかることは，それぞれの問題でまったく手付けていない児童が2名いた点である．

【問題3】も，日本の算数教科書には見られないタイプの問題であり，しかもいろいろな視点から考察しなければ，解けない問題である．それにも係らず，このクラスの児童たちはこの問題に意欲的に取り組んだ．4つの数の石垣の頂上は15，18，21，24となってはいるが，1段目の3つの数の間には何のパターンも認められない「数の石垣の列」が多く見られた．一方で児童の中には，一人で2種類の列をつくった児童も見られた．クラス全体として7種類の「数の石垣の列」を考え出したことは意外な結果であった．

3つの問題とも，今までにないタイプの問題であったにも係らず，子どもたちは，意欲的にパターンを見つけ，活用しようとする態度が見られた．また最後の問題のように，自分でパターンをつくり発展させる活動も，日本の子どもたちにも十分できる学習活動であると思われる．

おわりに

1920年前後から始まる日本の数学教育改造運動の理論的指導者であった小倉金之助の問題提起，また数学教育学が徐々に整備されてくる1970年代の竹内芳男，平林一栄に見られる数学教育研究の基本的課題，そこに共通するのは，数学と数学教育という2つの概念の明確な区別である．数学観の教育的可能性を追究するという枠組みは，数学教育に関する研究の基本的枠組みであると言えよう．

このような認識のもとで，近年のドイツの数学教育の動向は，我が国の数学教育及びその研究のあり方にとって，大いに参考となる部分を含んでいるように思われる．特に今回参照したNRW州文部省の資料のなかには，堂々と「Wissenschaft von Muster」(パターンの科学) という用語が見られる．このように，数学観を堂々と問題し，議論する数学教育界の姿勢は，我々にとって少々驚きである．「数学＝パターンの科学」という数学観は，就学前，小学校，中・高等学校の数学教育を統一的に把握し，実践を構想する上で十分考察に値する数学観であると改めて感じている．と同時に，今回の調査結果をもとに言えば，その数学観を基礎とする数学教育は現在の日本の小学生の子どもたちにとっても，有望な数学教育であるように思う．

ヴィットマンは，2004年，岡山で開催された第37回日本数学教育論文発表会全体講演で，《数学は，それぞれの人々によって探究され，形成され，さらには (再) 構成されうる (応用可能性をもつ) パターンの科学である．》(Wittmann: 2004. p. 4)，さらに，2005年の論文では，数学教育においては，「既成で静的なパターンの科学」(the science of ready-made and static patterns) としてではなく，「ダイナミックなパターンに関する活気あふれる科学」(the vital science of dynamic patterns) としてそれを理解すべきである，と述べた．これによれば，ヴィットマンが強調する数学的なパターンは，決して既成の学習内容だけを意味するものではない．児童・生徒が探究活動を通して発展させたり，部分的修正したり，新たな発見へと導く可能性をもつパターンである．数学教育における「数

学＝パターンの科学」をヴィットマンの意味で理解するならば，算数・数学の授業において，意図的に準備された問題を探究しながら数学的なパターンを発見し，それが成り立つ理由を考察（証明）し，考察した結果を表現するという活動が重要な学習活動となるであろう．そのような授業の可能性を追究するためには，数学的なパターンの探究や発見の教育的意義についての理論的な考察，またそれに対する児童・生徒の取り組みに関する実証的な研究が今後の研究課題とあるであろう．

謝　辞

数の石垣の問題に対する実態調査の実施に当たっては，熊本大学教育学部附属小学校3年2組の皆さん，主幹教諭宮脇真一先生に協力していただいた．ご協力に感謝いたします．

参考文献及び註

(1) 小倉金之助，『数学教育の根本問題』，イデア書院，1924（大正13年）．

(2) 竹内芳男，「学校数学と経験 ― 学校数学の正当性について」，『数学教育学論究』，第19巻，1-13，1970.

(3) 平林一栄，「数学教育学の課題Ⅰ ― 抽象の問題と現代的教材の早期導入可能性の問題」，広島大学教育学部紀要，第19号，83-91，1973.

(4) 平林一栄，「数学教育学の課題Ⅱ ― 表記論的にみた数学教育の問題」，広島大学教育学部紀要，第22号，177-186，1976.

(5) 岩崎秀樹，『数学教育学の成立と展望』，ミネルヴァ書房，2007.
《初等教育と中等教育の乖離を前提とする限り，数学教育学を制度化していく理由はない．しかし，今日，産業構造の変換に伴って，発展・途上を問わず，世界規模で初等・中等教育の接続が制度的に図られているといってよい．しかし，そうした制度的改革は，教育内容の基本的な改革を伴わなければ実質化しないし，健全に機能しない．その意味で算数と数学との関係を調整する視点や枠組みの普遍化が待たれるのは当然であろう．この新たな問題に，乖離を前提にする伝統的なアカデミズムが応えられるはずもなく，したがってそこに数学教育の新たな学的整備を図る必然性が生まれてきたと考える．》(p. 42)

(6) 原田信之，「教育スタンダードによるカリキュラム政策の展開：ドイツにおけるPISAショックと教育改革」，九州情報大学研究論集，8巻1号，51-68，2006.

(7) 原田信之，「ドイツの教育改革と学力モデル」，原田信之編著，『確かな学力と豊かな学力』，ミネルヴァ書房，55-76，2007.

(8) 樋口裕介，「ポスト「教育スタンダード化」― その争点と可能性 ―」，広島大学大学院教育学研究科紀要，第三部，第58号，81-87，2009.

(9) 国本景亀，「PISA2003以降のドイツ数学教育の動向（1）―「実質陶冶」から「数学に固有な形式陶冶」へ ―」，第32回全国数学教育学会　発表資料，2010（平成22）年6月26・27日，於広島大学．

(10) Sekretariat der Städingen Konferenz der Kultusminster der Länder in der Bundesrepublik Deutschland (Hrsg.) *Bildungsstandards der Kultusminster- konferenz*, Erläuterungen zur Konzeption und Entwicklung, Wolters Kluwer, 2005.

(11) Sekretariat der Städingen Konferenz der Kultusminster der Länder in der Bundesrepublik Deutschland (Hrsg.), *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich Beschluss vom 15. 10. 2004.*, Wolters Kluwer, 2005.

(12) Sekretariat der Städingen Konferenz der Kultusminster der Länder in der Bundesrepublik Deutschland (Hrsg.), *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Hauptschulabschluss Beschluss vom 15. 10. 2004.*, Wolters Kluwer, 2005.

(13) Sekretariat der Städingen Konferenz der Kultusminster der Länder in der Bundesrepublik Deutschland (Hrsg.), *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mitteren Schulabschluss Beschluss vom 4. 12. 2003.*, Wolters Kluwer, 2007.

(14) Ministerium für Schule und Weiterbildung Nordrhein-Westfalen,
Lehrplan Mathematik für die Grundschulen des Landes Nordrhein-Westfalen Entwurf MSW . 28. 1. 2008.

(15) Ministerium für Schule und Weiterbildung Nordrhein-Westfalen,
Lehrplan Mathematik für die Grundschulen des Landes Nordrhein-Westfalen 16. 6. 2008.
http://www.standardsicherung.schulministerium.nrw.de/lehrplaene/upload/klp_gs/GS_LP_M.pdf
NRW州の文部省ホームページによれば，この学習指導要領は，2008年8月1日付けで施行された学習指導要領である．これは2004年のKMKの教育スタンダードに基づいて改訂されたものである．
http://www.standardsicherung.schulministerium.nrw.de/lehrplaene/lehrplaene-gs/

また，ノルドライン・ベストファーレン州の文部省のホームページ
http://www.schulministerium.nrw.de/BP/index.html には，新しい数学の学習指導要領を実施のための情報と，その学習指導要領に沿った授業開発のための題材が提供されている．(2010.12.8 確認）その資料は以下の 8 種類である．
① Die Grundschule in NRW - Neue Richtlinien und Lehrpläne 2008.
② Informationen zum Lehrplan Mathematik.
③ Daten, Häufigkeiten, Wahrscheinlichkeiten - Ein neuer Bereich im Lehrplan Mathematik.
④ Lernaufgaben Mathematik.
⑤ Aufgabenideen zu Muster und Strukturen.
⑥ Beispiele zu prozessbezogenen Aufgabenstellungen.
⑦ Illustration des Mathematik-Lehrplans durch zehn Unterrichtsbeispiele, Prof. Dr. Selter, Uni Dortmund.
⑧ Sprachförderung im Mathematikunterricht.

(16) W. W. ソーヤー，宮本俊雄・田中勇共訳，『数学へのプレリュード』，みすず書房，1978.

(17) W. W. Sawyer, *Prelude to Mathematics*, Dover Publications, Inc., New York, 1955.

(18) 遠山啓，『数学の世界』（国民文庫），大月書店，1976.

(19) G. H. Hardy, *A Mathematician's Apology*, Cambridge University press, 1992（first published in 1967）.

(20) G. H. ハーディー /C. P. スノー，柳生孝昭訳，『ある数学者の生涯と弁明』，シュプリンガーファアラーク東京，1994.

(21) Richard P. Feynman, What is science? *The Physics Teacher*, Vol. 7, issue 6, 313-320, 1968.

(22) H. A. サイモン，稲葉元吉・吉原英樹共訳，『システムの科学』（The science of the artificial），パーソナルメディア，2003（1987 第 2 版）．Herbert A. Simon, *The science of the artificial*, The M.I.T. Press, 1969.

(23) キース・デブリン，山下純一訳，『数学：パターンの科学』，日経サイエンス社，1995.

(24) Wittmann, E. Ch.: Empirical Research Centered Around Substantial Learning Environments, Plenary Lecture delivered at the annual Meeting of the Japanese Society of Mathematics Education, Okayama, November 20-22, 2004.

(25) G. N. Müller& E. Ch. Wittmann, *Das kleine Zahlenbuch Band 1 Spielen und Zählen*, Kallmeyer, 2005.

(26) E. Ch. Wittmann, Mathematics as the Science of Patterns -A Guideline for Developing Mathematics Education from Early Chiledhood to Adulthood. Plenary Lecture presented at the International Colloquium, "Mathemaical Learning from Early Childhood to Adulthood"organized by the Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathematiques. July 7-9, 2005.
「the science of ready-made and static patterns which can be developed globally in the curriculum as well as explored, continued, re-shaped, and invented locally by the learners themselves. In others words: long-term and short-term mathematical processes count much more than the finished products." (p. 2)」

(27) E. Ch. Witmann/G. N. Müller, Muster und Strukturen als fachliches Grundkonzept, In G. Walther, et al（Hrsg.）*Bildungsstandards für die Grundschule: Mathematik konkret*. Cornelsen, 42-65, 2008.

(28) Müller, G. N. / Steinbring, H. / Wittmann, E. Ch.（2002）: *Jenseits von PISA. Bildungsreform als Unterrichtsreform. Ein Fünf-Punkte-Programm aus systemischer Sicht*. Velber: Kallmeyer'sche Verlagsbuchhandlung.

(29) Müller, G. N. /Steinbring, H. /Wittmann, E. Ch., 国本 景亀・山本 信也（共訳），『算数・数学 授業改善から教育改革へ ― PISA を乗り越えて：生命論的観点からの改革プログラム』，東洋館，2004.

(30) 山本信也，『生命論的デザイン科学としての数学教育学の課題と展望：E. Ch. Wittmann の数学教育学の基本的視点』，米田印刷，非売品，2009.