

# 正多面体の辺による展開の再折り凸多面体

—立方体を中心として—

伊藤仁一<sup>\*1</sup>・奈良知恵<sup>\*2</sup>・柴尾有星<sup>\*3</sup>・高木 淳<sup>\*3</sup>・濱 智大<sup>\*3</sup>・  
山下雄太郎<sup>\*3</sup>・山下進太郎<sup>\*3</sup>

## Refolded Convex Polyhedra derived from Edge Unfoldings of Platonic Polyhedra

— Dealing mostly with Cubes —

Jin-ichi ITOH, Chie NARA, Yusei SHIBAO, Jun TAKAGI, Tomohiro HAMA,  
Yutaro YAMASHITA, Shintaro YAMASHITA

(Received October 1, 2012)

Recently there are several studies of refoldability of edge unfolding ([3],[4],[5]) and in [3] all refolded convex polyhedra from only one example (raten-cross) of edge unfolding of a cube were classified. In this paper we determine all refolded convex polyhedra of all edge unfoldings of the cube and a regular tetrahedron, and some class of refolded convex polyhedra derived from edge unfoldings of a regular octahedron.

**Key words** : edge unfolding, refolding, Platonic polyhedra

### 1. はじめに

立方体の辺を切ることによってできる展開図は11種類知られている. そのうちラテンクロスといわれる展開図については, E. Demaine J. O'Rourkeによって書かれた有名な本「幾何的な折りアルゴリズム ([3])」において, その展開図の境界を張り合せることによって再構成される凸多面体(再折り凸多面体)を全て調べた結果が紹介されている. 立方体はもちろんのこと, 平面図形から多面体まで様々な立体がラテンクロスから再構成されている. 平面多角形2枚に退化する2重被覆多角形も凸多面体と考える.

そこで, この論文では, その定理を基にして, 立方体における残り10種類の展開図についても同様に調べることが目的とし, 以下のような結果を得た. まず, 特殊な折り方によって構成される立体について調べ, 表にまとめ紹介する. そして, 一般的な折り方へと拡張し, それによって再構成される立体を紹介する. 今回は, 鏡映変換によって移り合うものは同一視して分類を行った. 最後に他の正多面体の場合についても考察する.

立体を再構成するにあたって, アレクサンドロフの接着定理が用いられている. アレクサンドロフによると『多角形の接着が以下の条件を満たすとす. (a) すべての多角形の境界部分が接着に使われている. (b) どの点においても角度の総和が $2\pi$ を超えない. (c) 結果として得られる複体が球体に位相同型である. このとき, こうした接着に対応する凸多面体は一意的に決まる.』と書かれている. これは, 多角形から多面体を構成できるかどうか, また構成できるとすればどんな凸多面体ができるかを決めるときの基本となる.

凸多面体 $P$ の辺展開図 $T$ に対して,  $P$ のカットされる辺の集合は $P$ の辺グラフの全域木 $G_T$  (spanning tree) を構成する. 展開図 $T$ の境界 $\partial T$ と $G_T$ の関係をみると,  $\partial T$ は円周に同相で, 丁度 $G_T$ のまわりを一周する. すなわち,  $\partial T$ を細分して2線分ずつをペアにしたものが $G_T$ になる. そこで, 一般に多角形 $T$ がある凸多面体 $P$ の展開図になっているとき,  $\partial T$ の貼り合せによってできる $P$ の辺グラフの全域木を, 接着木 (gluing tree) と呼ぶ. また, 接着木 $G_T$ に含まれる道 (path) に沿って, 凸多面体 $P$ に切り込みをいれたとき, 切り口の輪 (ベルト)  $B$ のどの点も $\pi$ 以下の角をなすとき,  $B$ を $T$ の回転ベルト (rolling belt) という. このような回転ベルトはどのように2

\*1 熊本大学教育学部数学教室 j-itoh@kumamoto-u.ac.jp

\*2 東海大学阿蘇教養教育センター cnara@ktmail.tokai-u.ac.jp

\*3 熊本大学教育学部

つ折りするように貼り合せても、アレクサンドロフの定理によって、1つの凸多面体が構成される。

## 2. 特殊な折り方による再構成

展開図  $T$  における外周部の長さを  $L$  とする。  $T$  の外周上の任意の頂点を始点  $s \in \partial T$  とし、  $s$  から測った  $\partial T$  の外周部の中点を終点  $g \in \partial T$  とする。つまり  $g$  は  $|s, g| = |g, s| = L/2$  を満たす一意的に決まる点である。ここで、  $T(s, g)$  を  $T(g, s)$  に接着する。具体的には  $|s, x| = d$  であるそれぞれの点  $x$  を、逆の方向に  $s$  からの距離が同じ、つまり  $|x', s| = d$  である点  $x'$  に接着する。今回は立方体の展開図なので、  $s$  に対する  $g$  は容易に見つけることができ、また点ではなく辺の対応を考えて接着していくという辺々接着として考えることができる。イメージとしては、始点から終点に向けて、ジッパーを閉じるように接着していくので、ここでは、ジッパー再折りと呼ぶことにする。このアルゴリズムに沿って 11 種類の展開図について調べた。展開図に描いてある点線が折り目となる。

**定理** 立方体の辺による展開からできるジッパー再折り凸多面体は、2重被覆多角形に退化するものが5種類、立方体を含めて立体となるものが5種類である。ジッパー再折りで、立方体を再構成することのできる展開図は3種類のみで、残りの展開図からは立方体を再構成することはできない。展開図から再構成される立体を図1に載せる。立体の詳細については、図6, 7, 8の一覧表に載せておく。

そして、辺による展開のジッパー再折りについては立方体だけでなく正八面体についても調べた。展開図は同じく 11 種類である。結果として、平面多角形2枚に退化するものが6種類、正八面体を含めて立体が5種類見つかった。ちなみに、正八面体を再構成することができた展開図は4種類だった。展開図から再構成される立体を図2に載せる。

## 3. 一般的な折り方による再構成

次に、一般的な折り方について考える。負の曲率が現れる図形は除くという条件は変わらないが、これさえ満たせば、どのような折り方をしても構わないとする。そうすると、図形が再構成されるかどうかは別として、折り方は無数に存在する。ここで、平田の半分長定理を活用する。平田の定理には『多角形  $T$  のアレクサンドロフ接着が回転ベルトを一切含まないと仮定する。このとき、  $T$  の辺の長さがすべて整数であれば、  $T$  のそれぞれの辺を  $1/2$  の長さに分割して、「細分化多角形」  $T^*$  を作って、  $T^*$  の辺々接着をすべて生成すれば、  $T$  のすべての接着木を見つけることができる。』と書かれてある。この証明について印刷された文献が見当たらないので、この定理より少し強い次の主張が成り立つことを証明する。

**補題.** 多角形  $T$  はどの辺の長さも単位長さの整数倍であるとす、各辺を  $1/2$  の長さで細分した多角形を  $T^*$  とする。多角形  $T$  から生成される凸多面体を  $P$  とし、対応する接着木を  $G_T$  とする。  $G_T$  の任意の端点  $v$  について、もし  $v$  が  $T^*$  の頂点でないならば、  $v$  を含む回転ベルトが存在する。

**証明.** 多角形  $T$  の接着木  $G_T$  の端点  $v$  が  $T^*$  の頂点でないとする。このとき、  $G_T$  のもう1つの端点  $u$  が存在して、  $u$  と  $v$  を結ぶ適当な道 (path)  $H = v_0 v_1 \cdots v_n v_n$  (ただし、  $v_0 = v, v_n = u$ ) による  $P$  の切り口は回転ベルトになることを示す。

凸多面体  $P$  を  $G_T$  に沿って再び切り開くことを考える。頂点  $v$  から切り開き始め、  $G_T$  の分岐点  $w$  に到達したとき、“直線”の方向に切り進むことにする(このような  $G_T$  の辺が存在することは、  $v$  が  $T^*$  の頂点でないことから導かれる)。このとき、  $P$  が凸多面体であるから、切り開いた面の  $w$  に対応する2点では  $\pi$  と  $\pi$  未満の角をなし、  $\pi$  未満の角をなす点は  $T$  の頂点 ( $w$  が分岐点なので2個以上) に対応する。さらに切り進んでいき、  $G_T$  の分岐点に遭遇する度に  $w$  の時と同様の操作をする。  $G_T$  の分岐点は有限個であるから、最後には  $G_T$  の端点  $u$  に到達する。  $v$  が  $T^*$  の頂点でないことから、  $u$  も  $G_T$  の頂点ではないと言える。このようにしてベルト回転ベルトが構成される。

補題から平田の半分長定理が導かれることは、  $G_T$  の端点がすべて  $T^*$  の頂点ならば、  $G_T$  の分岐点に対応する  $T^*$  のすべての点が  $T^*$  の頂点となることから分かる。

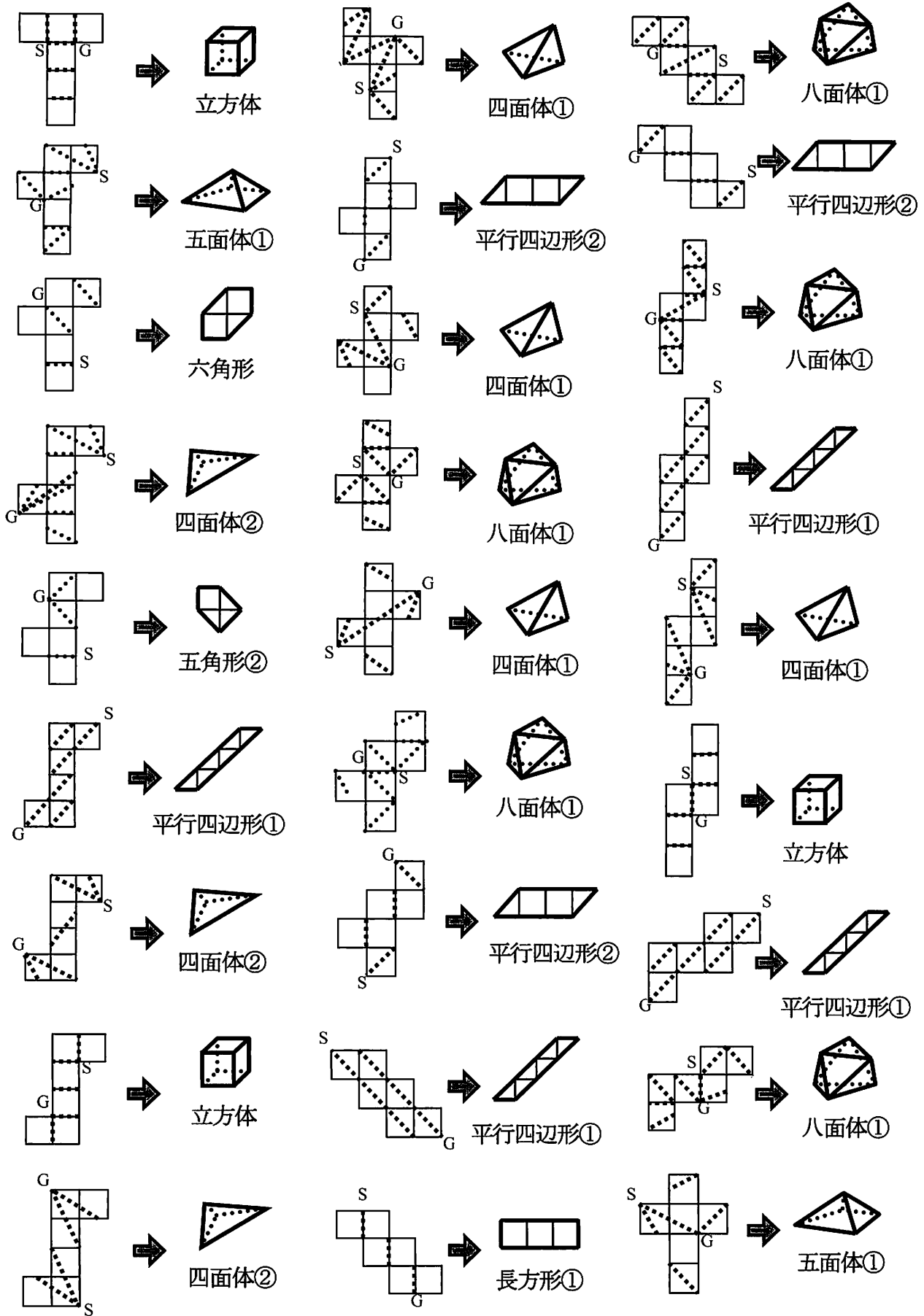


図1 ジッパー再折り凸多面体 (立方体)

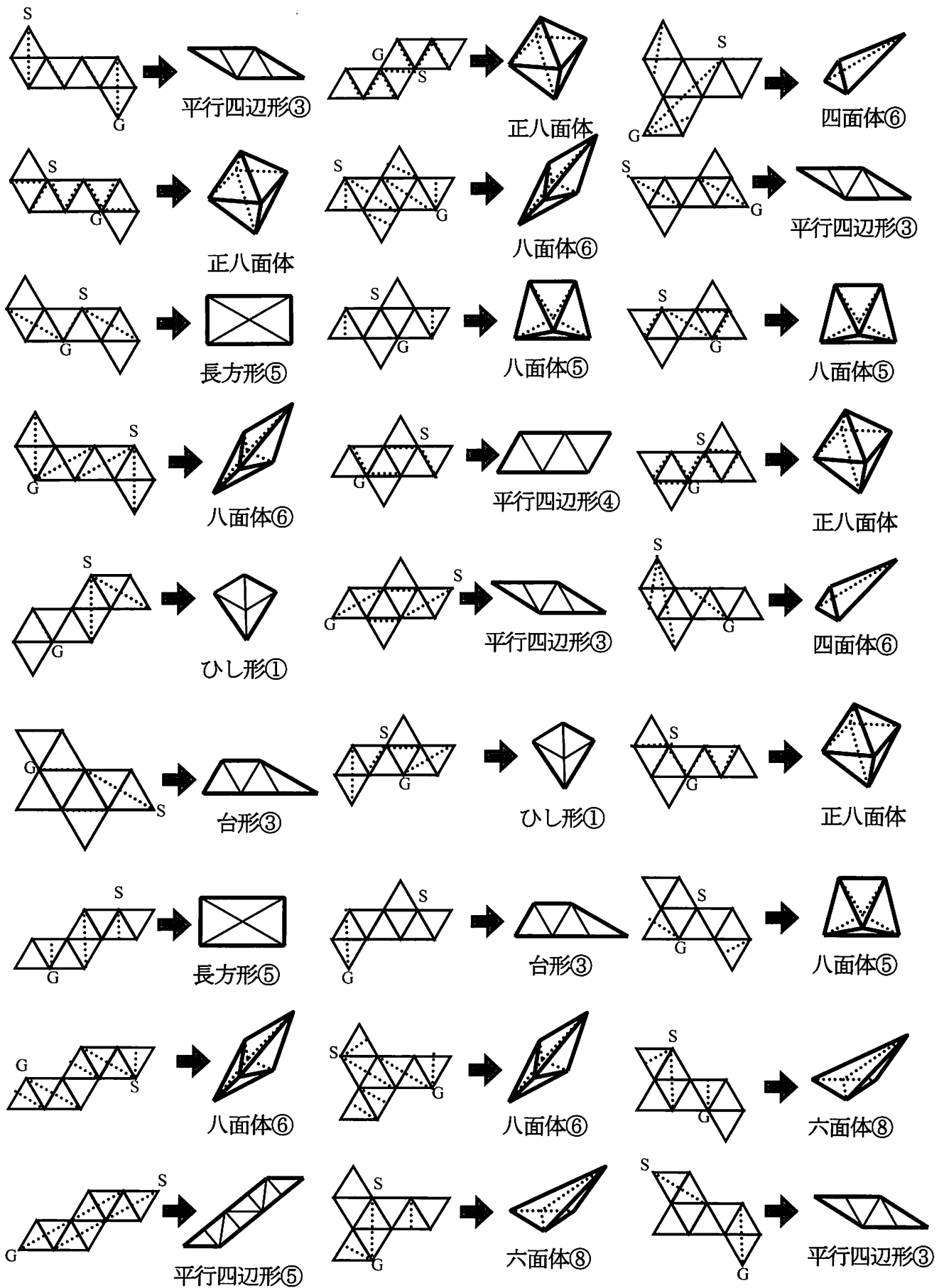


図2 ジッパー再折り凸多面体 (正八面体)

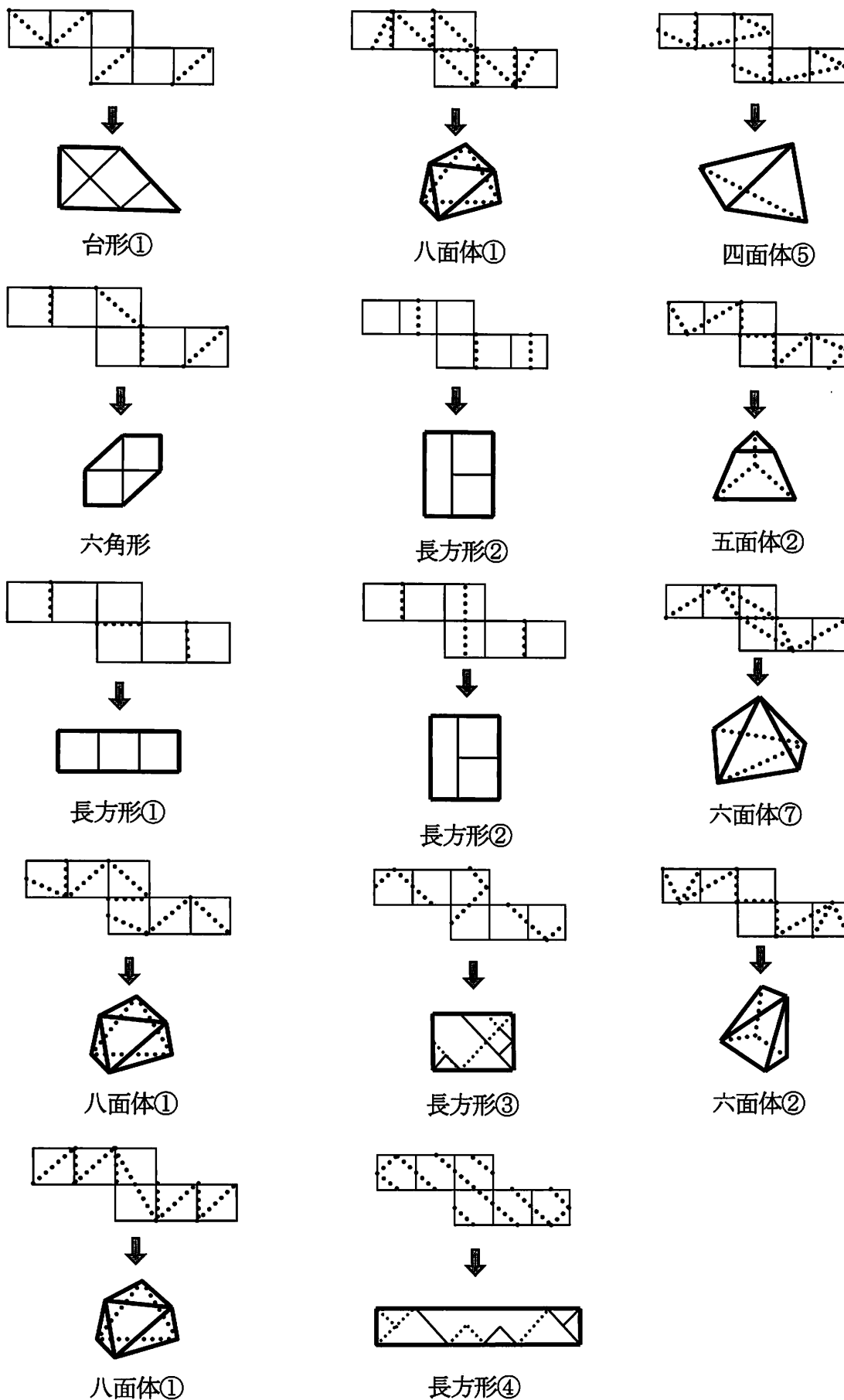


図3 立方体のある展開図の再折り凸多面体

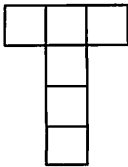
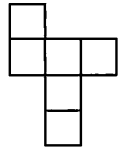
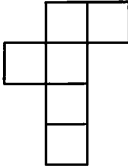
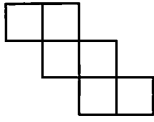
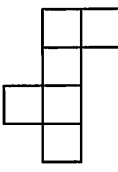
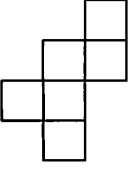
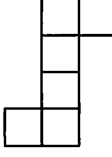
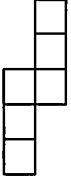
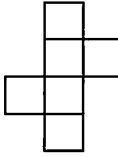
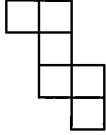
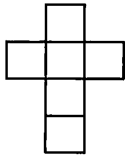
展開図		展開図	
	<p>立方体, 五面体②, 五面体③, 八面体②, 八面体⑧, 台形①, 六角形①</p>		<p>立方体, 四面体①, 四面体③, 四面体④, 五面体①, 五面体②, 六面体①, 六面体③, 六面体④, 六面体⑤, 六面体⑥, 六面体⑦, 八面体①, 八面体②, 八面体③, 八面体⑦, 八面体⑧, 台形①, 台形⑤, 五角形①,</p>
	<p>立方体, 四面体①, 四面体⑩, 五面体②, 五面体③, 六面体⑤, 八面体②, 八面体③, 八面体⑧, 長方形①, 台形①, 台形⑤, 六角形①, 回転ベルトによる無限の四面体</p>		<p>立方体, 四面体②, 四面体③, 四面体⑦, 四面体⑧, 四面体⑨, 四面体⑩, 四面体⑪, 五面体①, 六面体②, 六面体⑤, 六面体⑥, 六面体⑦, 六面体⑩, 八面体①, 八面体②, 八面体③, 八面体⑦, 八面体⑧, 長方形①, 長方形②, 長方形③, 長方形④, 台形②, 台形④, 台形⑤, 平行四辺形①, 平行四辺形②, 円柱状の回転ベルトによる無限の四面体</p>
	<p>立方体, 四面体③, 四面体⑤, 四面体⑧, 四面体⑩, 四面体⑫, 五面体①, 五面体②, 五面体③, 六面体③, 六面体⑤, 六面体⑥, 六面体⑦, 六面体⑩, 八面体①, 八面体②, 八面体③, 八面体⑦, 台形④, 五角形①,</p>		<p>立方体, 四面体①, 四面体②, 四面体③, 四面体④, 四面体⑤, 四面体⑦, 四面体⑧, 四面体⑩, 五面体①, 五面体②, 六面体②, 六面体⑤, 六面体⑥, 六面体⑦, 六面体⑩, 八面体①, 八面体②, 八面体③, 八面体⑦, 八面体⑧, 長方形①, 長方形③, 台形①, 台形②, 台形④, 台形⑤, 平行四辺形②, 五角形①,</p>
	<p>立方体, 四面体③, 四面体⑦, 四面体⑧, 四面体⑨, 四面体⑪, 五面体②, 五面体③, 六面体②, 六面体③, 六面体⑤, 六面体⑦, 五面体③, 八面体①, 八面体②, 八面体⑦, 八面体⑧, 長方形③,</p>		<p>立方体, 四面体①, 四面体④, 五面体②, 六面体⑦, 八面体①, 八面体②, 八面体⑧, 長方形①, 長方形②, 長方形③, 長方形④, 台形①, 平行四辺形①, 六角形① 円柱状の回転ベルトによる無限の四面体</p>
	<p>立方体, 四面体①, 四面体②, 四面体⑤, 五面体①, 五面体②, 五面体③, 六面体③, 六面体④, 六面体⑤, 六面体⑥, 六面体⑦, 六面体⑨, 八面体①, 八面体②, 八面体③, 八面体⑦, 八面体⑧, 台形①, 台形②, 平行四辺形②,</p>		<p>立方体, 四面体③, 五面体①, 五面体②, 六面体③, 六面体⑥, 八面体①, 八面体②, 八面体③, 八面体⑦, 八面体⑧, 長方形②, 台形①, 台形②, 平行四辺形①, 平行四辺形②, 五角形①,</p>
	<p>立方体, 四面体④, 四面体⑦, 四面体⑧, 四面体⑩, 四面体⑫, 四面体⑬, 五面体①, 五面体②, 五面体③, 六面体⑤, 六面体⑥, 六面体⑦, 六面体⑨, 八面体①, 八面体②, 八面体⑦, 八面体⑧, 台形①, 台形⑤</p>		

図4 立方体の辺による展開図の再折り凸多面体

今回調べる立方体の展開図で考えると、各辺の中点をとり分割したもので辺々接着をすればよいということになる。具体的には、立方体の展開図における外周は14本の辺でできているため、これを28本だと考え、この中からまず2本の辺を選び接着し、残りの辺も条件を満たすように接着していく。

**主定理** 立方体の辺による展開の全ての再折り凸多面体は図4のように分類される。立体の詳細については、図6, 7, 8の一覧表に載せておく。

それぞれの展開図から見つかる図形の数が多いので、ひとつの展開図のみを取り上げて、回転ベルトが現われない再折りの折り目と再構成される凸多面体の一覧を図3に載せる。図5のように辺々接着をしていくと円柱状の回転ベルト（回転ベルトが上下2つある）が現われる。この両端を少しずつずらしながら接着することで、無数の立体を再構成することができる。この場合、長方形、また長さの異なる四面体が再構成される。ここには二等辺三角形4枚からなる四面体も現れるが一覧表には入れていない。

この他に円柱状の回転ベルトを含む展開図が1つ、回転ベルトを一つだけ含むものが1つあり、同じように長さの異なる四面体を無数に構成する。残りの8種類は回転ベルトを含まないため、できる図形の個数は有限である。

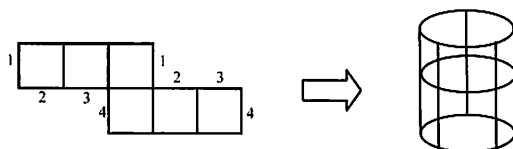


図5 円柱状になる回転ベルト

#### 4. その他の正多面体

ここでは、他の正多面体についての辺による展開の再折り凸多面体について考察する。

正四面体は、辺による展開は2種類で、1辺の長さが2となる正三角形の場合と、辺の長さが1と2となる平行四辺形の場合がある。正三角形の再折り凸多面体に関しては2重被覆多角形に退化する場合は4種類あり、そのうち3つは以下の回転ベルトの中に含まれる。4種類の回転ベルトがあり、3辺全体で一つの回転ベルトとなる場合と、2辺が回転ベルトとなる場合、1辺が回転ベルトとなる場合が2種類であり、全て[4]で分類されている。辺による展開図が平行四辺形となる場合の回転ベルトがある場合は、8個の以下のようなサークルからなる：  
 1) 全体が回転ベルトとなる場合、2) 長さ1の辺を張り合わせて円柱状になり2つの長さ2の2つの回転ベルトを持つ円柱状の場合、3) 長さ2の辺を張り合わせて円柱状になり2つの長さ1の2つの回転ベルトを持つ円柱状の場合、4) 長さ2の辺を両方とも中点から等距離の点を張り合わせた場合（長さ2の回転ベルト）、5) 長さ2の辺を一つだけを中点から等距離の点を張り合わせた場合（長さ4の回転ベルト）、6) 長さ1の辺を両方とも中点から等距離の点を張り合わせた場合（長さ4の回転ベルト）、7) 長さ1の辺を一つだけを中点から等距離の点を張り合わせた場合（長さ5の回転ベルト）、8) 長さ2の辺の内角が120度の頂点Aから距離1/2の点から等距離になる点を長さ1/2だけ張り合わせ（Aと辺の中点Mまで張り合わされている）、更にAを端点とする長さ1の辺と長さ2の中点Mから残りの半分とを張り合わせた場合（長さ3の回転ベルト）。1), 2), 4), 5) は正四面体を含み、1), 3), 6), 7) は辺の長さが1/2,  $\sqrt{3}$ の長方形からなる2重被覆長方形に退化したものを含み、2), 4), 6) は辺の長さが1,  $\sqrt{3}/2$ の長方形からなる2重被覆長方形に退化した場合を含み、5), 7), 8) はある2重被覆五角形に退化した場合を含む、全体としての様子は正方形を折ってできる凸多面体の全体構造（[2], [3]の25.7参照）より複雑になっている。

正十二面体の辺による展開は、43380種類あることが知られているが、[6]によってどの辺による展開図からも再折りしたものは元の正十二面体に戻ることが示された。

正二十面体の辺による展開図を再折りして別の凸多面体ができることは、勿論知られているが、辺による展開図が43380種類あり、全てを分類することは極めて難しいと思われる。






















	立体を構成する面 0 内はもとの立体の一边を1としたときの長さ		立体を構成する面 0 内はもとの立体の一边を1としたときの長さ
 立方体	・正方形 (1, 1, 1, 1) が6つ	 五面体①	・四角形 (1, 1, $\sqrt{5}$ , $\sqrt{5}$ ) が1つ ・三角形 ( $\sqrt{2}$ , $\sqrt{5}$ , 3) が2つ ・直角三角形 (1, 1, $\sqrt{2}$ ) が2つ
 四面体①	・二等辺三角形 ( $\sqrt{2}$ , $\sqrt{5}$ , $\sqrt{5}$ ) が4つ	 五面体②	・直角三角形 (1, 1, $\sqrt{2}$ ) が1つ ・等脚台形 ( $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ , $\frac{\sqrt{5}}{2}$ , $\frac{\sqrt{5}}{2}$ , $\sqrt{2}$ ) が1つ ・直角三角形 ( $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ , $\frac{3}{2}$ , $\frac{3}{2}$ ) が1つ ・直角を含む台形 (1, 1, $\frac{3}{2}$ , $\frac{\sqrt{5}}{2}$ ) が1つ
 四面体②	・直角三角形 (1, 2, $\sqrt{5}$ ) が2つ ・三角形 (2, $\sqrt{5}$ , $\sqrt{13}$ ) が2つ	 五面体③	・三角形 ( $\frac{\sqrt{5}}{2}$ , $\sqrt{2}$ , $\frac{3}{2}$ ) が1つ ・三角形 ( $\frac{\sqrt{5}}{2}$ , $\frac{3}{2}$ , $\sqrt{5}$ ) が1つ ・三角形 ( $\frac{\sqrt{5}}{2}$ , $\frac{\sqrt{17}}{2}$ , $\sqrt{2}$ ) が1つ ・三角形 ( $\frac{\sqrt{13}}{2}$ , $\frac{\sqrt{17}}{2}$ , $\sqrt{5}$ ) が1つ
 四面体③	・二等辺三角形 (2, $\frac{\sqrt{13}}{2}$ , $\frac{\sqrt{13}}{2}$ ) が4つ	 六面体①	・二等辺三角形 (2, $\sqrt{5}$ , $\sqrt{5}$ ) が6つ
 四面体④	・三角形 ( $\frac{\sqrt{37}}{2}$ , $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ , $\frac{5}{2}$ ) が1つ ・三角形 ( $\frac{\sqrt{37}}{2}$ , $\frac{1}{2}$ , 3) が1つ ・三角形 ( $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ , $\frac{\sqrt{13}}{2}$ , $\frac{1}{2}$ ) が1つ ・三角形 ( $\frac{5}{2}$ , $\frac{\sqrt{13}}{2}$ , 3) が1つ	 六面体②	・三角形 (1, $\frac{\sqrt{13}}{2}$ , $\frac{5}{2}$ ) が2つ ・三角形 (1, $\frac{\sqrt{17}}{2}$ , $\frac{5}{2}$ ) が2つ ・三角形 ( $\frac{\sqrt{13}}{2}$ , $\frac{\sqrt{17}}{2}$ , $\sqrt{2}$ ) が2つ
 四面体⑤	・三角形 ( $\sqrt{5}$ , $\frac{\sqrt{17}}{2}$ , $\frac{3}{2}$ ) が4つ	 六面体③	・直角三角形 (1, 1, $\sqrt{2}$ ) が1つ ・三角形 ( $\frac{\sqrt{10}}{2}$ , $\frac{\sqrt{13}}{2}$ , $\frac{\sqrt{17}}{2}$ ) が1つ ・直角三角形 ( $\frac{\sqrt{13}}{2}$ , $\frac{3}{2}$ , 1) が1つ ・三角形 ( $\frac{\sqrt{10}}{2}$ , $\frac{\sqrt{13}}{2}$ , $\frac{3}{2}$ ) が1つ ・二等辺三角形 ( $\frac{\sqrt{17}}{2}$ , $\frac{\sqrt{17}}{2}$ , 1) が1つ ・三角形 ( $\frac{\sqrt{13}}{2}$ , $\frac{\sqrt{17}}{2}$ , $\sqrt{2}$ ) が1つ
 四面体⑥	・正三角形 (1, 1, 1) が1つ ・二等辺三角形 (1, $\sqrt{7}$ , $\sqrt{7}$ ) が1つ ・三角形 (1, 2, $\sqrt{7}$ ) が2つ		
 四面体⑦	・二等辺三角形 ( $\frac{\sqrt{5}}{2}$ , $\frac{\sqrt{5}}{2}$ , 2) が1つ ・二等辺三角形 ( $\frac{\sqrt{29}}{2}$ , $\frac{\sqrt{29}}{2}$ , 2) が1つ ・三角形 ( $\frac{\sqrt{29}}{2}$ , $\frac{\sqrt{5}}{2}$ , $2\sqrt{2}$ ) が2つ	 六面体④	・直角三角形 ( $\frac{\sqrt{17}}{2}$ , $\frac{1}{2}$ , 2) が2つ ・三角形 ( $\frac{5}{2}$ , $\frac{1}{2}$ , $\sqrt{5}$ ) が2つ ・三角形 ( $\frac{5}{2}$ , $\frac{\sqrt{17}}{2}$ , 2) が2つ
 四面体⑧	・三角形 ( $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ , $\frac{\sqrt{10}}{2}$ , 2) が4つ	 六面体⑤	・三角形 ( $\frac{5}{2}$ , $\frac{\sqrt{13}}{2}$ , $\sqrt{2}$ ) が2つ ・三角形 (2, $\frac{\sqrt{5}}{2}$ , $\frac{\sqrt{13}}{2}$ ) が2つ ・三角形 ( $\frac{5}{2}$ , $\frac{\sqrt{5}}{2}$ , $\sqrt{2}$ ) が2つ
 四面体⑨	・二等辺三角形 ( $\frac{\sqrt{2}}{2}$ , $\frac{\sqrt{61}}{2}$ , $\frac{\sqrt{61}}{2}$ ) が1つ ・三角形 (1, $\frac{\sqrt{61}}{2}$ , $\frac{\sqrt{61}}{2}$ ) が2つ ・二等辺三角形 ( $\frac{\sqrt{2}}{2}$ , $\frac{\sqrt{85}}{2}$ , $\frac{\sqrt{85}}{2}$ ) が1つ	 六面体⑥	・直角三角形 ( $\frac{\sqrt{13}}{2}$ , $\frac{3}{2}$ , 1) が1つ ・三角形 ( $\frac{5}{2}$ , $\frac{\sqrt{17}}{2}$ , $\sqrt{5}$ ) が1つ ・三角形 ( $\frac{\sqrt{17}}{2}$ , $\frac{1}{2}$ , 2) が1つ ・三角形 ( $\frac{\sqrt{13}}{2}$ , $\frac{\sqrt{17}}{2}$ , $\sqrt{5}$ ) が1つ ・直角三角形 (1, 2, $\sqrt{5}$ ) が1つ ・三角形 ( $\frac{5}{2}$ , $\frac{\sqrt{17}}{2}$ , $\sqrt{5}$ ) が1つ
 四面体⑩	・二等辺三角形 (1, $\frac{\sqrt{37}}{2}$ , $\frac{\sqrt{37}}{2}$ ) が4つ		
 四面体⑪	・三角形 ( $\frac{\sqrt{10}}{2}$ , $\frac{\sqrt{29}}{2}$ , $\frac{\sqrt{37}}{2}$ ) が1つ ・三角形 ( $\frac{\sqrt{37}}{2}$ , $\frac{\sqrt{5}}{2}$ , $\sqrt{2}$ ) が1つ ・三角形 ( $\frac{\sqrt{5}}{2}$ , $\frac{\sqrt{10}}{2}$ , $\frac{\sqrt{13}}{2}$ ) が1つ ・三角形 ( $\frac{\sqrt{29}}{2}$ , $\frac{\sqrt{13}}{2}$ , $\sqrt{2}$ ) が1つ	 六面体⑦	・二等辺三角形 (2, $\frac{\sqrt{13}}{2}$ , $\frac{\sqrt{13}}{2}$ ) が2つ ・三角形 ( $\frac{\sqrt{5}}{2}$ , $\frac{\sqrt{13}}{2}$ , 1) が2つ ・三角形 ( $\frac{\sqrt{5}}{2}$ , $\frac{\sqrt{13}}{2}$ , 2) が2つ
 四面体⑫	・三角形 ( $\frac{\sqrt{29}}{2}$ , $\frac{\sqrt{5}}{2}$ , $2\sqrt{2}$ ) が4つ	 六面体⑧	・正三角形 (1, 1, 1) が2つ ・直角三角形 (1, 2, $\sqrt{3}$ ) が2つ ・二等辺三角形 (1, 1, $\sqrt{3}$ ) が2つ
 四面体⑬	・直角三角形 (1, 2, $\sqrt{5}$ ) が2つ ・三角形 (2, $\sqrt{13}$ , $\sqrt{5}$ ) が2つ		

図6 再折り凸多面体の一覧表 (1)














	立体を構成する面 0 内はもとの立体の辺を1としたときの長さ		立体を構成する面 0 内はもとの立体の辺を1としたときの長さ
 六面体⑨	<ul style="list-style-type: none"> <li>・直角三角形 (<math>\frac{\sqrt{29}}{2}, \frac{5}{2}, 1</math>) が1つ</li> <li>・三角形 (<math>\frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{3}{2}, \sqrt{5}</math>) が1つ</li> <li>・三角形 (<math>\frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{\sqrt{37}}{2}, \sqrt{5}</math>) が1つ</li> <li>・三角形 (<math>\frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{\sqrt{34}}{2}, \frac{\sqrt{37}}{2}</math>) が1つ</li> <li>・三角形 (<math>\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{29}}{2}, \frac{\sqrt{34}}{2}</math>) が1つ</li> <li>・三角形 (<math>1, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{5}}{2}</math>) が1つ</li> </ul>	 八面体⑤	<ul style="list-style-type: none"> <li>・正三角形 (1, 1, 1) が6つ</li> <li>・二等辺三角形 (1, 1, <math>\sqrt{3}</math>) が2つ</li> </ul>
 六面体⑩	<ul style="list-style-type: none"> <li>・直角三角形 (<math>\frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{1}{2}, 1</math>) が1つ</li> <li>・三角形 (<math>\frac{5}{2}, \frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{\sqrt{34}}{2}</math>) が1つ</li> <li>・三角形 (<math>\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{29}}{2}, \frac{\sqrt{34}}{2}</math>) が1つ</li> <li>・三角形 (<math>2\sqrt{2}, \frac{\sqrt{29}}{2}, \frac{\sqrt{5}}{2}</math>) が1つ</li> <li>・三角形 (<math>\frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{5}{2}, \sqrt{5}</math>) が1つ</li> <li>・三角形 (1, <math>2\sqrt{2}, \sqrt{5}</math>) が1つ</li> </ul>	 八面体⑥	<ul style="list-style-type: none"> <li>・二等辺三角形 (1, 1, <math>\sqrt{3}</math>) が8つ</li> </ul>
 八面体①	<ul style="list-style-type: none"> <li>・直角二等辺三角形 (<math>\sqrt{2}, \sqrt{2}, 2</math>) が2つ</li> <li>・直角三角形 (1, 2, <math>\sqrt{5}</math>) が2つ</li> <li>・直角二等辺三角形 (1, 1, <math>\sqrt{2}</math>) が4つ</li> </ul>	 八面体⑦	<ul style="list-style-type: none"> <li>・直角三角形 (1, 2, <math>\sqrt{5}</math>) が2つ</li> <li>・三角形 (<math>\frac{1}{2}, \frac{5}{2}, \sqrt{5}</math>) が2つ</li> <li>・直角三角形 (<math>\frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{1}{2}, 1</math>) が2つ</li> <li>・三角形 (<math>\frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{5}{2}, \sqrt{10}</math>) が2つ</li> </ul>
 八面体②	<ul style="list-style-type: none"> <li>・直角二等辺三角形 (<math>\sqrt{2}, \sqrt{2}, 2</math>) が2つ</li> <li>・直角三角形 (<math>\frac{\sqrt{17}}{2}, \frac{1}{2}, 2</math>) が1つ</li> <li>・直角二等辺三角形 (1, 1, <math>\sqrt{2}</math>) が1つ</li> <li>・二等辺三角形 (<math>\frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{\sqrt{5}}{2}, 1</math>) が1つ</li> <li>・直角三角形 (<math>\frac{\sqrt{26}}{2}, \frac{5}{2}, \frac{1}{2}</math>) が1つ</li> <li>・三角形 (<math>\frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{\sqrt{17}}{2}, \frac{\sqrt{26}}{2}</math>) が1つ</li> <li>・三角形 (<math>\sqrt{2}, \frac{3}{2}, \frac{\sqrt{13}}{2}</math>) が1つ</li> <li>・三角形 (<math>\frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{\sqrt{13}}{2}, 1</math>) が1つ</li> </ul>	 八面体⑧	<ul style="list-style-type: none"> <li>・直角を含む台形 (1, 1, <math>\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{5}}{2}</math>) が2つ</li> <li>・三角形 (<math>\frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{\sqrt{13}}{2}, \sqrt{5}</math>) が2つ</li> <li>・直角三角形 (<math>\frac{\sqrt{13}}{2}, \frac{3}{2}, 1</math>) が2つ</li> </ul>
 八面体③	<ul style="list-style-type: none"> <li>・直角三角形 (<math>\frac{\sqrt{17}}{2}, \frac{1}{2}, 2</math>) が2つ</li> <li>・二等辺三角形 (<math>\frac{\sqrt{17}}{2}, \frac{\sqrt{17}}{2}, 1</math>) が1つ</li> <li>・三角形 (<math>\frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{3}{2}, \sqrt{2}</math>) が2つ</li> <li>・二等辺三角形 (<math>\frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{\sqrt{5}}{2}, 1</math>) が1つ</li> <li>・直角二等辺三角形 (<math>\sqrt{2}, \sqrt{2}, 2</math>) が2つ</li> </ul>	 正八面体	<ul style="list-style-type: none"> <li>・正三角形 (1, 1, 1) が8つ</li> </ul>
 八面体④	<ul style="list-style-type: none"> <li>・直角三角形 (1, 2, <math>\sqrt{5}</math>) が2つ</li> <li>・三角形 (<math>\frac{5}{2}, \frac{\sqrt{17}}{2}, 1</math>) が2つ</li> <li>・直角三角形 (<math>\frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{1}{2}, 1</math>) が2つ</li> <li>・三角形 (<math>\frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{5}{2}, \sqrt{10}</math>) が2つ</li> </ul>		

図7 再折り凸多面体の一覧表(2)

5. 終わりに

今回は立方体、正八面体の辺による展開図から再構成することを考えた。折りと展開に関する問題は1500年代初頭のAlbrecht Dürerにまで遡るが、数学の文献で研究対象にされるようになったのは、最近の話である。この論文では立方体の辺による展開の再折り凸多面体の分類に留まったが、ここで得た結果についてさらに考察していくことで、新たな発見があると思う。

今後の展望としては、立方体よりも大きい体積をもつ立体が再構成されているのかという問題もあるので、それを検証してみたいと考えている。立方体が一番大きいというのが私たちの予想である。そして、教育という面からみても、数学的活動として図形分野の授業に活用できると思うので、学習指導要領と照らし合わせながら教材研究も行っていきたい。




















被覆な平面	もとの立体の一边を1としたときの長さ	被覆な平面	もとの立体の一边を1としたときの長さ
 長方形①	$(1, 1, 3, 3)$ が2つ	 平行四辺形①	$(1, 1, 3\sqrt{2}, 3\sqrt{2})$ が2つ
 長方形②	$(2, 2, \frac{3}{2}, \frac{3}{2})$ が2つ	 平行四辺形②	$(3, 3, \sqrt{3}, \sqrt{3})$ が2つ
 長方形③	$(\sqrt{2}, \sqrt{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2})$ が2つ	 平行四辺形③	$(2, 2, \sqrt{3}, \sqrt{3})$ が2つ
 長方形④	$(3\sqrt{2}, 3\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ が2つ	 平行四辺形④	$(1, 1, 2, 2)$ が2つ
 長方形⑤	$(1, 1, \sqrt{3}, \sqrt{3})$ が2つ	 平行四辺形⑤	$(1, 1, 2\sqrt{3}, 2\sqrt{3})$ が2つ
 台形①	$(2, \sqrt{2}, \sqrt{2}, 2\sqrt{2})$ が2つ	 ひし形①	$(1, 1, \sqrt{3}, \sqrt{3})$ が2つ
 台形②	$(1, \sqrt{2}, \sqrt{2}, 4)$ が2つ	 五角形①	$(1, 1, 1, \sqrt{2}, \sqrt{2})$ が2つ
 台形③	$(1, 1, \sqrt{3}, 3)$ が2つ	 五角形②	$(1, 1, \sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2})$ が2つ
 台形④	$(1, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}, \sqrt{2})$ が2つ	 六角形①	$(1, 1, 1, 1, \sqrt{2}, \sqrt{2})$ が2つ
 台形⑤	$(2, 2\sqrt{2}, \frac{1}{2}, \frac{5}{2})$ が2つ		

図8 再折り凸多面体の一覧表 (3)

## 参考文献

- [1] J. Akiyama and G. Nakamura, Folding of regular polygons to convex polyhedra I: Equilateral triangles, In: Combinatorial Geometry and Graph Theory, LNCS 3330, pp. 34-43 Springer 2004.
- [2] R. Alexander, H. Dyan and J. O'Rourke, The convex polyhedra foldable from a square, In. Proc. 2002 JCDCG, LNCS 2866, pp. 38-50 Springer 2003.
- [3] E. D. Demaine and J. O'Rourke. Geometric Folding Algorithms: Linkages, Origami, Polyhedra. Cambridge University Press, July 2007. 邦訳「幾何的折りアルゴリズム—リンクエージ、折り紙、多面体—」上原隆平訳、近代科学社、2009年.
- [4] E. D. Demaine, M. L. Demaine, A. Lubiw, J. O'Rourke, and I. Pashchenko, Metamorphosis of the cube. In Proc. 15th Annu. ACM Sympos. Compt Geo., pp. 409-410, 1999. 409-410, 1999. Video and abstract.
- [5] A. Lubiw and J. O'Rourke, When can a polygon fold to a polytope? Technical report 048, Dept. Comput. Sci., Smith Colledge, June 1996.
- [6] E. D. Demaine, M. L. Demaine, J. Itoh, A. Lubiw, C. Nara, and J. O'Rourke, Refold rigidity of convex polyhedra. CGTA to appear.