

学校数学における代数的証明に関する一考察

佐々祐之

A Study on the Learning of Algebraic Proof in School Mathematics

Hiroyuki SASA

(Received September 3, 2001)

The purpose of this paper is to clarify how algebraic proofs are learned in junior high school, and to make clear the issue for improvement of learning of algebraic proof. For this purpose, I made analysis by the following four viewpoints. First one is the Algebraic proofs in Education Ministry guidelines. Second one is the Algebraic proofs in school textbook. Third one is the students' attainment level about algebraic proofs in scholarship survey. And the last one is the Earlier study about sense of meaning of algebraic proofs. By these analyses, I made clear three issues about learning of algebraic proof as follows. The first is the necessity of development of new educational materials about algebraic proofs. Next is that importance of making improvements about teaching method of constructing algebraic proof. And the last is the necessity of development of teaching method to understand sense of meaning of algebraic proofs.

Key words : algebraic proof, school mathematics

1. 本研究の目的

中学校学習指導要領が、平成20年3月に改訂され、移行期間を経て、平成24年度より完全実施となった。今回の改訂では、これまで以上に数学的活動を重視した学習活動の展開が求められるようになったことが大きな特徴である。中学校学習指導要領には、「数や図形の性質などを見いだす活動」「数学を利用する活動」「数学的に説明し伝え合う活動」の3つ数学的活動が示されており、それぞれの活動について第1学年と第2、第3学年に分けて示されている。

中学校数学科における代数的証明の学習は、第2学年から行われるが、教育課程上、図形の証明に先立って指導されることから、「証明の学習」ということを前面に出した指導ではない。しかし、様々な数の性質を文字を用いて表し説明する学習活動であるという意味では、数学的活動のうちの「数学的な表現を用いて、根拠を明らかにし筋道立てて説明し伝え合う活動」を具現化する単元として重要な役割を果たすものであろう。

しかし、実際には「文字を用いた説明」の単元では、文字を用いて数を表し、形式的に式変形を行うことに終始し、「証明する」という意識は薄いまま学習活動が展開されているのではないだろうか。全国学力・学習状況調査の結果でも、「数学B」における代数的証明を記述する問題の正答率は、毎年40%前後であり、十分な定着が図られているとは言えない。

また、代数的証明を構成することができている生徒も、何のために文字を用いて説明を行うのか、数の性質が一般に成り立つとはどういうことなのか、といったことに関して十分理解しないまま、形式的に式変形を行い、証明を構成しているということも考えられる。

本研究では、このような問題意識のもと、中学校における代数的証明の学習指導の改善のための基礎的研究として、学校数学における代数的証明の学習の現状を分析し、学習指導の改善のための課題を明らかにすることをねらいとする。特に本稿では、学習指導要領や教科書における代数的証明の取り扱いについて分析するとともに、平成19年度から実施されている全国学力・学習状況調査のデータをもとに、代数的証明に関して培うことが期待されている能力がどのようなものであり、また、現状として生徒の理解度にどのような課題があるのかを明らかにする。その上で、今後の学習指導の改善のために、どのような学習指導が必要かということについての示唆を得たいと考える。

2. 学習指導要領における代数的証明の位置づけ

平成20年3月改訂の中学校学習指導要領¹⁾では、代数的証明に関する内容として、第2学年および第3学年に「文字を用いて説明すること」が示されている。第2学年では、「2 内容」の「A 数と式」の領域の(1)として、「具体的な事象の中に数量の関係を見だし、それを文字を用いて式に表現したり式の意

味を読み取ったりする能力を養うとともに、文字を用いた式の四則演算ができるようにする》としたうえで、具体的項目の「イ」として、《文字を用いた式で数量及び数量の関係をとらえ説明できることを理解すること》と示されている。

また、これを受けて第3学年では、同じく「2 内容」の「A 数と式」領域の(2)として、《文字を用いた簡単な多項式について、式の展開や因数分解ができるようにするとともに、目的に応じて式を変形したりその意味を読み取ったりする能力を伸ばす。》としたうえで、具体的項目の「ウ」として、《文字を用いた式で数量及び数量の関係を説明すること》と示されている。

平成10年改訂の学習指導要領²⁾においては、「文字を用いた説明」に関する記述は第2学年のみにあり、第3学年では多項式の展開と因数分解についての記述はあるものの、学習指導要領の内容の記述としては「文字を用いた説明」について触れられていない。このことは、今回の改訂において、特に「説明する活動」が重視されていることの表れであるといえよう。これについて、学習指導要領解説(数学編)には、次のような記述がみられる。

《…第2,3学年において、文字を用いた式で数量や数量の関係をとらえ説明ができること、目的に応じて簡単な式を変形したり、その意味を読み取ったりする能力を養い伸ばすことが明示された。これは、従来も行われてきたことであるが、今回の改訂で言語活動の充実が各教科等を通じて重視されたことを踏まえ、表現したり読み取ったりしたことを基に、説明したり伝えあったりすることの重要性が改めて強調されたからである。…》(1)p.38)

確かに、従来からも第3学年の「多項式の展開や因数分解」の学習の最後に、式の計算の利用という位置づけで、「文字を用いた説明」が取り扱われてはいたが、多項式の変形に重点が置かれたものであって、「文字を用いた説明」のための学習内容という位置づけではなかった。今回、学習指導要領に内容として明示されたことによって、より「文字を用いた説明」としての位置づけが重視されたことと捉えることができる。

また、それぞれの学年での取り扱いについて、第2学年と第3学年の具体的項目の文末を比較してみると、第2学年では「説明できることを理解すること」となっているのに対して、第3学年では「説明すること」となっている。これは、第2学年では文字を用いた数の表し方等について学習するとともに、それを用いて説明するという代数的証明の構造を理解し、第3学年にかけて、徐々に、生徒自身が代数的証明ができるようになるといったように、2年間にわたって代数的証明に関する学習を行うことが内容として求められていると言えよう。

つまり、言語活動の充実が重視された今回の学習指導要領の改訂によって、これまで第2学年の内容としてしか示されていなかった「文字を用いた説明」が、第2学年、第3学年にわたって明示され、しかも学年段階によって達成レベルが想定されているということは、代数的証明に関する学習が、これまでで

上に学習内容としての位置づけが明確化され、重視されていることの表れであると言えよう。

3. 教科書における代数的証明の取り扱い

言語活動の充実を受けて、学習指導要領においては、代数的証明としての「文字を用いた説明」の位置づけが、より明確になったことが分かったが、実際に生徒が学習する教科書においては、どのような取扱いになっているのか、主要3社の教科書³⁾⁴⁾⁵⁾⁶⁾⁷⁾⁸⁾をもとに分析する。

1) 教科書における代数的証明に関する学習内容の割合

下の表1、表2は、3社の中学校の教科書において、代数的証明に関する内容が取り扱われているページ数をまとめたものである。旧課程時期との比較のために、平成22年発行の教科書⁶⁾⁷⁾⁸⁾(移行措置よう補助教材を除く)と平成24年発行の教科書³⁾⁴⁾⁵⁾を比較している。なお、代数的証明のページ数については、章末問題等は含まず、教科書の内容として「文字を用いた説明」を取り扱っているページ数を示した。

【表1:教科書会社における代数的証明のページ数(第2学年)】

教科書会社		T社	K社	G社
H22年	全体のページ数	208	178	188
	単元のページ数	20	18	22
	代数的証明のページ数	3	2	3
	全体に対する割合	1.4%	1.1%	1.6%
H24年	全体のページ数	212	206	220
	単元のページ数	24	20	26
	代数的証明のページ数	3	3	5
	全体に対する割合	1.4%	1.5%	2.3%

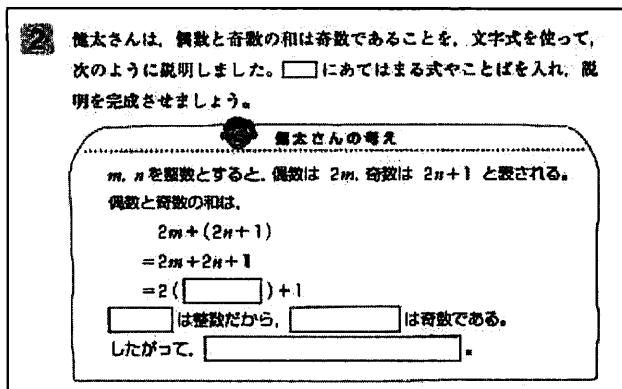
【表2:教科書会社における代数的証明のページ数(第3学年)】

教科書会社		T社	K社	G社
H22年	全体のページ数	208	180	188
	単元のページ数	28	24	28
	代数的証明のページ数	3	3	3
	全体に対する割合	1.4%	1.7%	1.6%
H24年	全体のページ数	256	262	276
	単元のページ数	28	28	32
	代数的証明のページ数	4	5	4
	全体に対する割合	1.5%	1.9%	1.4%

これを見ると、全体的な傾向として、旧教育課程から現行の学習指導要領に沿った教育課程へと移行したことによって、数学という教科自体の時間数が増加し、教科書全体のページが増えているため、それに伴って代数的証明に関して扱ったページも、1ページないし2ページ程度増えているものの、特に今回の教科書の改訂によって、教科書の分量という面では、代数的証明の取り扱いが特に重視されたということは読み取れない。

しかし、各社とも教科書での取り扱いが増加したことによって、これまでの教科書の扱いとは異なるアプローチによる代数的証明の内容の取扱いを行っている部分もあった。

例えば、図1は、G社の第2学年の教科書の代数的証明に関する部分で、代数的証明の書き方を扱ったものである。



【図1：教科書における代数的証明の取り扱い】^{5) p.25}

偶数と奇数の和が奇数になることの一般的な証明を、空欄を埋めることによって完成させる問題である。これまでもこのような課題を第2学年で扱うことはあったが、一般的な証明の書き方を示し説明の内容を理解することに重点がおかれており、実際に書かせることを意図した紙面構成にはなっていなかった。しかし、上記の取り扱いでは、式計算が終わった後、最後の2行において結論部分を正しく表現することを含めて、代数的証明の書き方を指導しようとする意図が読み取れる。学習指導要領において、「文字を用いた式で数量及び数量の関係をとらえ説明できることを理解すること」という記述にとどまっているにもかかわらず、教科書において具体的に書かせることを意図した取り扱いがなされるということは、今回の学習指導要領の改訂、および教科書の改訂において、「言語活動の充実」が強く意識されていることの表れであろう。

2) 教科書で扱われている題材

では、具体的に教科書では、どのような題材を用いて代数的証明に関する学習を行おうとしているのであろうか。表3、表4は、平成24年度版の教科書(3社)をもとに、扱われている題材についてまとめたものである。

【表3：代数的証明の題材(第2学年)】

題材	T社	K社	G社
連続する3つの整数の和			◎○
連続する5つの整数の和	◎		
連続する2つの奇数の和			△
連続する3つの偶数の和	△		
差が3である3つの整数の和			△
2桁の自然数とその数の一の位と十の位を入れかえた数の和	◎	◎	◎
2桁の自然数とその数の一の位と十の位を入れ変えた数の差	○	◎	○
3桁の自然数とその数の一の位と百の位を入れかえた数の差			◇
奇数+奇数=偶数	◇	◎	◎
偶数+奇数=奇数		○	○
偶数+偶数=偶数		△	○

カレンダーの数の並び	◎○	△	
数あてゲーム	◇	◇	
その他(図形関係など)	△		◎△◇

【表4：代数的証明の題材(第3学年)】

題材	T社	K社	G社
連続する奇数の積に1を加えると4の倍数	◎	○	
連続する偶数の積に1を加えると奇数の2乗	△	◎	◎○
連続する奇数の2乗の差は8の倍数			○
連続する2数の2乗の差	○	△	△
連続する3整数の最大数の2乗と最小数の2乗の差			△
連続する3整数の中央の数の2乗から1を引くと残り2数の積			○
2つの奇数の積は奇数			△
道幅×長さ=面積(円)	◎	◎	◎
道幅×長さ=面積(円以外)	○	○	○
十の位が等しく一の位の数の和が10である2つの自然数の積	◎△	◎	◇
十の位の数の和が10で一の位が等しい2つの自然数の積		○	

※表中における記号は、◎：例題レベル、○問レベル、△章末問題レベル、◇コラム等のレベルでの扱いであることを示す。

これを見ると、第2学年、第3学年とも、代数的証明の題材として扱われている命題は、いくつかの大きなカテゴリーに分けることができる。

まず、第2学年では、「連続する整数の和に関する問題」「2桁の自然数の十の位と一の位を入れかえた数との和や差に関する問題」「偶数や奇数の和や差に関する問題」という3つのカテゴリーに分けることができる。

このうち、「2桁の自然数の十の位と一の位を入れかえた数との和や差に関する問題」については、3社とも例題のレベルで取り上げており、重点的な扱いがなされている。この問題は、平成19年度の全国学力・学習状況調査でも出題され、指導の改善のための授業アイデア例などとして示されたものである。

他の2つのカテゴリーの問題については、各社においてその取扱いに差が見られた。「連続する整数の和に関する問題」に関しては、T社とG社のみが扱っており、K社は扱っていない。また、「偶数や奇数の和や差に関する問題」では、K社とG社が例題、問のレベルで扱っているのに対してT社ではコラムでの扱いにとどまっている。また、3つのカテゴリー以外の題材でも、T社、K社がカレンダーや数あてゲームを扱っているのに対して、G社では図形関係の問題を重点的に扱っているなど、教科書による違いを見ることができた。

第3学年では、「連続する整数や奇数・偶数の2乗を含む数の性質に関する問題」「道幅と道の長さの積に関する問題」「ある条件を満たす2位数同士の積に関する問題」という3つのカテゴリーに分けることができる。

第3学年におけるこれらのカテゴリーの題材の扱いに関しては、ほとんど差が見られなかった。「道幅と道の長さの積に関する問題」は3社ともにおいて例題レベル、問レベルで扱われており、「連続する整数や奇数・偶数の2乗を含む数の性質に関する問題」も多少の違いはあるものの、3社ともで例題レベルの扱いがされている。強いて違いを上げるとすれば、G社の教科書では「連続する整数や奇数・偶数の2乗を含む数の性質に関する問題」において様々なバリエーションを扱っている一方で、「ある条件を満たす2位数どうしの積に関する問題」に関しては、コラムでの扱いにとどまっているということであろう。

このように見てみると、細かい題材の違いはあるものの、第2学年、第3学年とも教科書会社によって扱われている題材は大きく異なることはなく、これまでの教科書で扱われてきた定番と言われる問題が出そろっていることが分かる。しかしこのことは、図形領域において扱われる題材が多岐にわたるのに対して、代数的証明で扱われる題材は非常に限られていることを示している。今後、代数的証明の学習内容の改善に当たっては、新たな教材の開発ということも大きな課題となるであろう。

4. 全国学力・学習状況調査における代数的証明の取り扱いと生徒の理解度の現状

ここでは、全国学力・学習状況調査の出題傾向と調査結果を分析することを通して、中学校第2学年における代数的証明に関する学習においてどのような力を身に付けることが期待されているのか、また、そのような課題に対して生徒の理解の現状はどのようにになっているのか、ということについて考察する。

1) 全国学力・学習状況調査の枠組み

全国学力・学習状況調査は、小学校第6学年および中学校第3学年の児童生徒を対象として平成19年度より行われている全国規模の学力調査であり、平成23年度を除いてこれまで5回実施されている。平成21年度調査までの3年間には悉皆調査という形で実施されてきたが、一定規模の調査であれば全国規模の傾向を把握できるとして、平成22年度、24年度については3割程度の児童生徒を対象とした抽出調査となっている。

算数・数学に関する調査は、「身に付けておかなければ後の学年等の学習内容に影響を及ぼす内容や、実生活において不可欠であり常に活用できるようになっていることが望ましい知識・技能など」に関係する「算数A・数学A」と「知識・技能等を実生活の様々な場面に活用する力や、様々な課題解決のための構想を立て実践し評価・改善する力などに関わる内容」に関する「算数B・数学B」とから構成されており、「算数A・数学A」では、選択式や短答式を中心とした知識・技能に関する出題、「算数B・数学B」では、記述形式も含む課題解決力に関する出題がなされている。

調査結果については、正答率等のデータが各自治体の教育委員会や学校単位でフィードバックされることから、いたずらに

競争をあおるとの批判がある一方で、それぞれの問題や生徒の解答傾向について、毎年詳細な分析が行われ、報告書や指導法の改善に向けた授業アイデア集等を通して、学校現場の授業改善のための取り組みが行われている。

代数的証明に関する問題は、中学校第3学年を対象とした「数学B」の中で毎年扱われており、記述形式も含めて、「文字を用いて説明すること」に関する生徒の理解度が調査されている。ここでは、平成19年度調査からこれまでに出题された代数的証明に関する問題の趣旨や生徒の解答傾向等について、各年度の解説資料⁹⁾および報告書等¹⁰⁾を基に分析し、指導法の改善に向けた示唆を得たいと考える。

2) 「代数的証明」に関する出題の概要及び趣旨

代数的証明に関する問題は、これまでの学力・学習状況調査において、毎回出題されている(平成23年度は実施見送り)。次の表5は、これまでの調査において出題された問題の概要をまとめたものである。

【表5：代数的証明に関する問題の概要】

平成19年度	連続する3つの自然数の和が3の倍数になることの説明を読み、連続する5つの自然数の和が5の倍数になることの説明を完成する。
平成20年度	2桁の自然数とその位を入れ替えた数との和が11の倍数になることの説明を完成させ、差の場合どのような数になるかを予想する。
平成21年度	連続する3つの自然数の隣り合う2数を足していく計算フォーマットにおいて、3段目の数が4の倍数になることの説明を完成させるとともに、2段目の数についてわかることを記述する。
平成22年度	連続する3つの奇数の和についての予想に対して反例を挙げ、予想を修正して連続する3つの奇数の和が3の倍数になることの説明を完成させる。また、連続する4つの奇数の場合には和がどのような数になるかを予想する。
平成23年度	連続する3つの自然数の和が中央の数の3倍になることの説明を読み、連続する5つの自然数の和が中央の数の5倍になることの説明を完成する。
平成24年度	連続する3つの自然数の和が3の倍数になることの説明を完成させ、連続する3つの偶数の和がどのような数になるかを予想する。

これを見ると、内容としては、平成20、21年度調査を除いて「連続する整数や連続する奇数の和に関する問題」が扱われており、基本的な代数的証明の方法についての出題が、繰り返し行われていることが分かる。特に、平成22年度以降は、毎年出題の傾向は変化しているものの、題材としてはすべて「連続する自然数の和」に関するものであり、基礎・基本を重視した出題がなされていることが分かる。しかし、これは後述するように、毎年のように出題されているにもかかわらず、正答率はほとんど伸びておらず、代数的証明に関する生徒の理解に課題が多いことの流れでもある。「文字を用いて説明する」ということに関して、どのようなことに困難を感じているのかというこ

とを明らかにするために、出題の視点を変えながら、毎年同じ題材で繰り返し調査をしていると見ることができる。

では、出題の趣旨はどのようになっているのであろうか。下の表6は、これまでに出题された「代数的証明」に関する問題の出題の趣旨をまとめたものである。

【表6：代数的証明に関する問題の出題の趣旨】

平成19年度	自然数性質に関する説明を読み、次のことができるかどうかをみる。 ・説明を振り返って考えること ・発展的に考え、その結果を説明すること
平成20年度	2けたの自然数について予想された事柄を読み、次のことができるかどうかをみる。 ・事柄が成り立つ理由を、方針に基づいて説明すること ・発展的に考え、予想した事柄を説明すること
平成21年度	自然数について予想された事柄を読み、次のことができるかどうかをみる。 ・事柄が成り立つ理由を説明すること ・説明を振り返って考えること
平成22年度	連続する奇数について予想された事柄を読み、次のことができるかどうかをみる。 ・予想された事柄を振り返って考えること ・事柄が成り立つ理由を説明すること ・発展的に考え、成り立つ理由を説明すること
平成23年度	自然数の性質についての説明を読み、次のことができるかどうかをみる。 ・与えられた説明を振り返って考えること ・発展的に考え、事柄が成り立つ理由を説明すること
平成24年度	連続する3つの自然数の和について予想された事柄を読み、次のことができるかどうかをみる。 ・事柄が成り立つ理由を、方針に基づいて説明すること ・発展的に考え、予想した事柄を説明すること

これを見ると、代数的証明に関する出題にあたって、いくつかのキーワードが設定されていることが分かる。これらのキーワードは、全国学力・学習状況調査の「数学B」の出題にあたって様々な領域の問題でも用いられているもので、出題の枠組みの中に、「数学的プロセス」として示されているものである。上記の代数的証明に関する出題の中では、①事柄が成り立つ理由を説明すること、②方針に基づいて説明すること、③説明を振り返って考えること、④発展的に考えること、という4つの「数学的プロセス」が盛り込まれていることが分かる。

表6を見ると、これら4つの「数学的プロセス」が様々な組み合わせられて毎年の出題の趣旨を構成していることが分かる。これら4つの「数学的プロセス」の視点で、どの年度にどの「数学的プロセス」が趣旨に盛り込まれているかをまとめると、表7のようになる。

【表7：出題の趣旨と「数学的プロセス」の関係】

年度	①	②	③	④
平成19年度	○		○	○
平成20年度	○	○		○

平成21年度	○		○	
平成22年度	○		○	○
平成23年度	○		○	○
平成24年度	○	○		○

これを見ると、代数的証明を行うことそのものである「①事柄が成り立つ理由を説明すること」に関しては、毎年出題の趣旨に含まれているものの、代数的証明の構成に関する「②方針に基づいて説明すること」については6回の調査で2回しか趣旨に含まれていない。それに比べて、すでに説明されたものを振り返って証明の構造を考えたり、そこから新たな性質を発見したりする「③説明を振り返って考えること」「④発展的に考えること」がほぼ毎年、趣旨に盛り込まれていることが分かる。これは、中学校第2学年での「文字を用いた説明」の単元が、「図形の証明」の単元に先立って指導されるため、証明としての指導としてよりも、文字を用いた式を変形することや様々な数の性質を見出すことに重点が置かれていることが一つの要因として考えられる。学習指導要領でも「文字を用いた式で数量及び数量の関係をとらえ説明できることを理解すること」となっていることから、積極的に代数的証明そのものを構成するというレベルに踏み込みにくいことが読み取れる。

しかし、個別に問題を見てみると、決して代数的証明の構成に関しての出題がなされていないわけではない。平成22年度調査では、連続する3つの奇数の和についての予想に対して反例を上げて成り立たないことを説明する文章を完成させる出題がなされていたり、平成19年度調査、平成23年度調査では、類似した命題の説明が示されて、それをまねて証明を構成することを意図した出題が試みられている。また、平成23年度調査では、出題の趣旨にこそ「②方針に基づいて説明すること」が含まれていないものの、証明の方針に該当するような、目的に応じた式変形に関する内容が同じ問題の中の小設問として位置づけられていたりするなど、代数的証明の構成のために必要な様々な手立てが問題の中に組み込まれており、「振り返り」や「発展」に偏って出題がなされているわけではないことが分かる。

学習指導要領上は、第2学年の段階で、積極的に代数的証明を構成していくレベルまでは求められていないが、これらの調査において、様々な工夫をしながら代数的証明の構成に関する内容が出題されているということは、言語活動の充実に対応して、代数的証明が重視されていることの表れであろう。

3) 代数的証明に関する問題の正答率と指導上の課題

全国学力・学習状況調査の「数学B」において、毎年、代数的証明に関する問題が出題されており、様々な数学的プロセスに対応した出題の趣旨が設定されていることが分かったが、これらの問題に対する実際の生徒の理解度はどの程度であったのだろうか。ここでは、これまでに実施された調査の調査結果報告書¹⁰⁾の記述をもとに、それぞれの年度における代数的証明に関する出題に対して生徒がどの程度、正答することができたの

か、また、誤答パターン等からどのような学習指導上の課題が指摘されているのかについて考察していく。

【平成 19 年度調査】

平成 19 年度調査では、「連続する 3 つの自然数の和が 3 の倍数になること」に関する太郎さんの説明を読んで、(1)計算結果の $3(n+1)$ から、3 の倍数であること以外にどのようなことが言えるかを答える問題（選択形式）、(2)「連続する 5 つの整数の和が 5 の倍数になること」の説明を完成させる問題（記述形式）が出題されている。

(1)の正答率は 56.0%で、報告書には、「文字式から新たな性質を読み取ることに課題がある」とされている。

また、(2)の正答率は 42.5%であるが、報告書では、最終的な計算式に対して「 $n+2$ が整数なので」という根拠と「 $5(n+2)$ は 5 の倍数である」という結論部分を何らかの形で記述しようとした生徒は 60%程度であったことが示されている。このことは、逆に言えば、40%の生徒は、代数的証明に関して根拠と結論を示す必要性を理解していないと読み取ることができる。調査時期が第 3 学年の 4 月であることを考えると、第 2 学年での論証に関する学習を終えた段階の生徒で、約 40%の生徒が代数的証明のために何を記述する必要があるかを理解していないということになる。

【平成 20 年度調査】

平成 20 年度調査では、「2 桁の自然数とその位の数字を入れかえた数の和は 11 の倍数になる」という直樹さんの予想を読んで、(1)82 の場合にこの予想を確かめる問題（短答式）、(2)この予想が正しいことの説明を完成させる問題（記述形式）、(3)2 桁の自然数とその位の数字を入れかえた数の差について予想できることを答える問題（記述形式）が出題されている。

(1)の正答率は 76.4%であるが、報告書では、110 という計算結果のみを書いているなど、表現が十分でない生徒が 14%いたことが指摘されている。

また、(2)の問題の正答率は 39.7%で、問題中に吹き出しによって証明の方針が示されているものの、平成 19 年度調査のように、証明の手本となる説明の例が示されていなかったことから、若干正答率が下がっている。報告書では、 $11x+11y$ と計算結果だけを記し、根拠と結論について記述していない生徒が 17.9%いたことが指摘されている。

(3)の正答率は 49.2%であり、報告書では、「予想した事柄を「～は…になる。」という形で表現することに課題がある」と指摘されている。

この年度の調査は、3 つの設問中 2 つが記述式であったが、そのどちらも正答率が 50%以下であり、代数的証明についての生徒の理解が十分でないという現状が示されたといえる。

【平成 21 年度調査】

平成 21 年度調査では、連続する 3 つの自然数を入れて隣同士を足して 2 段目、3 段目と数を入れていく計算フォーマットにお

いて、「3 段目の数はいつも 4 の倍数になる」という健治さんの予想を読んで、(1)21, 22, 23 という連続する 3 つの自然数を 1 段目に入れたときの 3 段目を求める問題（短答形式）、(2)「3 段目の数はいつも 4 の倍数になる」という予想が正しいことの説明を完成させる問題（記述形式）、(3)2 段目の 2 数の関係について分かることを答える問題（選択形式）が出題されている。

(1)は、この計算フォーマットの構造を理解できているかの確認問題であり、正答率も 86.0%と高い。

また、(2)はこれまでの出題と同様、4 の倍数になることの証明を完成させる問題であるが、正答率は 41.7%である。報告書では、 $4n+4$ と計算した結果のみを示し、根拠と結論について記述していない生徒が 25.6%いたことが指摘されている。

(3)については、正答率は 58.8%であったが、報告書では、「連続する偶数」や「奇数と偶数」と答えた生徒が 21.6%おり、 $2n+1$ や $2n+3$ という表現から具体的な数がイメージできていないことが指摘されている。

この年度の調査問題は、前 2 年間の調査問題とは異なり、ある種の計算フォーマットを基に、その構造を説明するものであったが、説明する内容としては「4 の倍数になること」であるので、連続する自然数の和に関する問題と本質的には変わっていない。代数的証明を行う設問(2)についても、これまでと変わらない程度の正答率となっている。

【平成 22 年度調査】

平成 22 年度調査では、「連続する 3 つの奇数の和」について健太さんが具体的な奇数から考えている場面を読んで、(1)「連続する 3 つの奇数の和は 9 の倍数になる」という予想が正しくない理由を、反例を挙げて説明する問題（穴埋め・短答形式）、(2)「連続した 3 つの奇数の和は 3 の倍数になる」という修正した予想が正しいことの説明を完成させる問題（記述形式）、(3)「連続した 4 つの奇数」について予想した事柄を答える問題（記述形式）が出題されている。

(1)は、反例を用いて成り立たないことを証明することを扱った問題であり、新しい試みであったが、正答率は 54.8%であった。報告書では、9 の倍数になる例（反例にならないもの）を挙げていた生徒が 10.8%、奇数でないものや連続しないものを挙げていた生徒が 18.1%いたことから、反例の意味やその示し方そのものについての理解が十分でない生徒がいる可能性があることが指摘されている。

(2)は、これまでと同様「3 の倍数になる」ということを示す問題であるが、計算の結果が $6n+3$ となることから、3 の倍数になることが見えにくく、正答率は 26.4%と、非常に低かった。このことは、説明すべき結論から判断し、目的に応じて式変形をすることに課題があることの表れであると言えよう。

(3)の正答率は 59.0%であったが、報告書では「1, 3, 5, 7 の和は 4 の倍数になる」というように、具体数で記述しているものが見られ、一般に成り立つ命題ということの意味が捉えられていない生徒がいるということが指摘されている。

この年度の調査問題では、「反例を挙げて成り立たないことを説明する」ということを試みており、他の年度の調査問題とは異なった傾向を見ることができる。しかし、学習指導要領上、「反例を用いて成り立たないことを説明すること」が明確に位置づけられていないため、各社の教科書で扱われている程度の出題にとどまっているものと考えられる。また、代数的証明を行う部分では、計算結果の文字式を、目的に応じて変形することに課題があることが明らかになっており、「どのような結論を証明しようとするのか」また、「証明するためには何が言えればよいのか」ということについて、学習指導上の改善が必要であることが示唆されている。

【平成 24 年度調査】

平成 24 年度調査では、「連続する 3 つの自然数の和は 3 の倍数になる」という智也さんの予想を読んで、(1)「3 の倍数になることを示すには、3 と自然数の積になることを示せばよい」という方針を読んで、予想が正しいことの説明を完成させる問題(記述形式)、(2)「連続する 3 つの偶数の和」がどのような数になるかを予想して書く問題(記述形式)が出題されている。

(1)は、平成 22 年度調査の結果から、結論を示すために目的に応じて式を変形することに課題があることが明らかになったため、この部分を特に「説明の方針」として示し、説明を完成させる問題であったが、正答率は 38.8%と、これまで同様に低い結果となっている。依然として、代数的証明に関しては課題が多いことが明らかになったと言えよう。

(2)は条件を変更したときにどのようなことが成り立つかを予想する問題であるが、正答率は 57.0%であった。しかし、この中には、「2 の倍数になる」や「3 の倍数になる」と答えたものが 32.4%も含まれており、「6 の倍数になる」と答えられた生徒は、正答者数の半数以下である。また、ここでも「4, 6, 8 の和は 3 の倍数になる」のように具体数で記述しているものが見られ、一般に成り立つ命題ということの意味が捉えられていない生徒がいるということが指摘されている。

この年度の調査問題では、平成 22 年度調査で明らかになった課題をさらに追及しようとする姿勢が見られるが、「説明する命題の結論を把握し、それを示すために目的に応じた式変形を行う」ということに関しては、依然として生徒の理解は厳しい状況にあるといえる。また、自然数に関する様々な命題が一般に成り立つということに関する理解も十分ではない。今後の学習指導の改善に向けて、多くの示唆を残した調査である。

4) 記述問題のタイプと正答率との関係

全国学力・学習状況調査の各年度の問題、および正答率について分析してきたが、最後に、記述問題の正答率と無回答率の関係について言及しておく。

全国学力・学習状況調査では、記述問題に関して「(a)見いだした事柄や事実を説明する問題」「(b)事柄を調べる方法や手順を説明する問題」「(c)事柄が成り立つ理由を説明する問題」と

いう 3 つのタイプを設定している。代数的証明に関するこれまでの出題では、これらのタイプのうち(a)と(c)のタイプの記述問題が出題されている。(a)のタイプとしては、平成 20 年度調査の(3)、平成 22 年度調査の(3)、平成 24 年度調査の(2)がこれに該当する。また、(c)のタイプとしては、全ての年度において出題されており、予想や事柄が正しいことの説明を完成させる問題がこれに該当する。次の表 8、表 9 は、それぞれのタイプ別に、各年度の正答率と無解答率を示したものである。

【表 8：理由を説明する記述問題の正答率と無解答率】

年度	問題の概要	正答率	無解答率
19	連続する 5 つの自然数の和が 5 の倍数になることの説明を完成させる。	42.5%	28.1%
20	2桁の自然数と、その数の十の位と一の位の数を入れかえた数の和が 11 の倍数になることの説明を完成させる。	39.7%	26.8%
21	1段目に連続する3つの自然数を入れたとき、3段目の数が 4 の倍数になることの説明を完成させる。	41.7%	17.2%
22	連続する3つの奇数の和が3の倍数になることの説明を完成させる。	26.4%	27.3%
24	連続する 3 つの自然数の和が 3 の倍数になることの説明を完成させる。	38.8%	22.5%

【表 9：事柄を記述する問題の正答率と無解答率】

年度	問題の概要	正答率	無解答率
20	2桁の自然数とその数の十の位の数と一の位の数を入れかえた数の差について予想した事柄を書く。	49.2%	36.1%
22	連続する 4 つの奇数の和について成り立つ事柄を書く。	59.0%	18.7%
24	連続する 3 つの偶数の和について予想した事柄を書く。	57.0%	23.4%

これらを見ると、「代数的証明」を完成させるタイプの問題に関しては、平成 22 年度調査のみ 26.4%と正答率が低いが、概ねどの年度も 40%前後の正答率で推移している。また、無解答率も 25%前後で推移しており、このことから、第 3 学年の生徒の 4 人に 1 人は「代数的証明」の構成に関して全く手を付けておらず、何らかの形で取り組んでいる生徒の約半数しか代数的証明を正しく構成できていないということが分かる。しかし、これまでの出題では、記述形式はすべて「正しいことの説明を完成させる問題」となっており、数を文字を用いて表す段階、連続する数の和などを式で表す段階まではすでに記述されている状態で、代数式を計算して結果を導き、証明したい結論に合わせて式変形し、根拠と結論を述べることを記述する問題となっている。ということは、数を文字を用いて表す段階からすべてにわたって代数的証明を構成するという点に関しては、

おそらくほとんどの生徒がそのレベルに達していないものと考えられる。今後、全国学力・学習状況調査でどのレベルまで踏み込んで調査がなされるかは分からないが、「代数的証明」に関しては、学習指導上も課題となることが多いと言えるだろう。

また、発展的に考えたり、振り返って考えたりすることによって見出した事柄を、数に関して一般的に成り立つ命題として記述するタイプの問題に関しては、いずれも60%以下の正答率となっており、これについては、命題の一般性、数の性質の捉え方といった面から指導の改善が望まれるであろう。

5. 代数的証明の意義の理解に関する調査研究

代数的証明を構成する能力だけではなく、代数的証明のもつ一般性に関する理解にも着目した研究に、國宗¹¹⁾の行った調査研究がある。ここでは、國宗の調査研究を概観しながら、生徒の代数的証明の意義の理解について考察していく。

1) 「文字式による論証能力」と「文字式による論証のもつ一般性についての理解」

國宗は、代数的証明に関する生徒の理解を、「文字式による論証能力」と「文字式による論証のもつ一般性についての理解」という2つの視点から調査し分析している^{11)p.65-81}。このような視点の設定が必要であること背景には、図形における論証でも同様であるが、実際に証明を書けることと、なぜそのような証明が必要なのかということの理解とは、必ずしも同時に達成されるものではないという生徒の現状がある。國宗の研究では、このような生徒の証明に対する理解のずれを明らかにしようとしているのである。以下、それぞれの視点からの國宗の調査研究およびそれらの間の関係について概観してみよう。

【文字式による論証能力に関する調査】

國宗は「文字式による論証能力」について、以下の表10のような水準を設定している。

【表10:文字式による論証能力の水準】

水準0	無回答、あるいは、問題分を繰り返していたり、説明になっていない。
水準1	文字式を使わずに、具体的な数値を挙げたり、言葉で説明しようとする。
水準2	文字式を使うが、不適切な使い方をする。
水準3	文字式を使って正しく説明する。

このような「文字式による論証能力の水準」を設定し、実際に文字式による証明を書かせる調査問題で、生徒がどの水準にあるのかということをも分析した結果が、下の表11である。

【表11:文字式による論証能力に関する調査結果】

	水準0	水準1	水準2	水準3
中学1年	53%	41%	6%	0%
中学2年	40%	25%	12%	23%
中学3年	22%	18%	12%	48%

これを見ると、文字式を用いない水準1以下の生徒が、中学校第1学年で94%、第2学年で65%、第3学年でも40%いることが分かる。代数的証明に関する学習が第2学年から始まることを考慮しても、代数的証明を行うことが、生徒にとっていかに難しい課題であるかということが分かる。

【文字式による論証のもつ一般性についての理解に関する調査】

國宗は、「文字式による論証のもつ一般性の理解」について、以下の表12のような水準を設定している。

【表12:文字式による論証のもつ一般性についての理解の水準】

水準0	無回答。
水準1	文字を使って証明する意味を理解せず、帰納的な説明の不十分さも指摘できない。
水準2-ア	文字を使って証明する意味は理解していないが、帰納的な説明の不十分さは指摘できる。
水準2-イ	文字式を使って証明する意味は理解しているが、帰納的な説明の不十分さは指摘できない。
水準3	文字式を使って証明する意味を理解し、帰納的な説明の不十分さも指摘できる。

このような「文字式による論証のもつ一般性の理解の水準」を設定し、「奇数と奇数の和は偶数である」という命題に対して示された3つの説明方法を読んで、それぞれ説明として十分であるか否かについて理由も合わせて答えるという調査問題によって調査を行っている。問題に示された3つの説明方法とは、帰納的な説明の不十分さを指摘できるかどうかを見るための「具体的な数値を用いて示している帰納的な説明」と、文字式を使って説明することの意味を理解しているかどうかを見るための「文字を用いて説明しているが、文字の用い方を間違っている説明」「文字を正しく用いた説明」という3つである。調査結果は、下の表13に示したようになっている。

【表13:一般性の理解に関する調査結果】

	水準0	水準1	水準2 ア	水準2 イ	水準3
中学1年	12%	65%	8%	12%	3%
中学2年	7%	35%	6%	23%	29%
中学3年	3%	24%	5%	32%	36%

これを見ると、第1学年から第2学年にかけて、水準1以下の生徒が減少し、水準2以上の生徒が増加することが分かる。しかし、第3学年でも水準3に達する生徒は36%であることが分かる。また、水準2-アと水準2-イを比較すると、どの学年でも水準2-イの生徒が多い。文字を用いて証明することの意味については理解できているが、帰納的な説明の不十分さについては指摘できないという傾向にあることが示されている。このような結果は、図形領域における調査（例えば全国学力・学習状況調査の平成21年度調査「数学A」の⁸⁾や平成23年度調査「数学A」の⁸⁾）でも同様の傾向が示されている。

【「文字式による論証能力」と「文字式による論証のもつ一般性についての理解」との関係】

國宗の研究では、上記の「文字式による論証能力」と「文字式による論証のもつ一般性に関する理解」の調査結果をクロス集計し、生徒の発達水準に関する両者の関係を分析している。

それによると、まず、第1学年から第2学年にかけて、「文字式による論証能力」「文字式による論証のもつ一般性の理解」の両方について、水準2以上の生徒が増加することが指摘されている。これは、図形を含めた証明に関する学習が第2学年から始まることを考慮すれば、予想される結果である。

また、「文字式による論証の力」に比べて「文字式による論証のもつ一般性の理解」は、水準2の占める割合が多く、特に、第3学年では、「文字式による論証能力」が水準3にあるにもかかわらず「文字式による論証のもつ一般性の理解」は水準2以下にとどまっている生徒が少なくないことが指摘されている。つまり、このことは、文字式の証明自体は書けているものの、文字を用いることの必要性やその証明の表している意味については十分理解できていない生徒が一定数いるということを示した結果であるといえる。

6. 本研究のまとめと今後の課題

ここまで、中学校数学科における「代数的証明」の取り扱いや生徒の理解の現状について、学習指導要領における記述、教科書における取り扱い、全国学力・学習状況調査における「代数的証明」に関する出題とその結果、文字を用いた論証の意義に関する調査研究を概観し、分析を行ってきた。ここでは、それらの結果振り返り、中学校における「代数的証明」の取り扱いに関する課題をまとめておきたい。

まず、学習指導要領上は、平成20年3月の改訂によって、「説明し伝えあう活動」など、言語活動の充実が重視されてきたことを受けて、これまで第2学年にのみ記述されていた代数的証明に関する取扱いが第3学年でも記述されるようになるなど、若干ではあるが、重視されてきていることが読み取れた。

また、そのような学習指導要領の改訂を受けて、各社の教科書においても代数的証明に関する内容のページ数が増え、証明を書かせることを意図した紙面構成も見られるようになっていくが、一方で、教科書で扱われている題材については、これまでの教科書で扱われてきた定番の内容にとどまっており、代数的証明に関する新たな教材の開発が待たれるところである。

さらに、全国学力・学習状況調査では、毎回、代数的証明に関する問題が出題されているが、どの年度の調査でも正答率は低く、「代数的証明を構成すること」に関して課題があることが明らかになっている。加えて、これまでの調査では、数を文字を用いて表したり、示すべき事柄を文字を用いた式で表すことについては問われていないことから、これらを含めた完全解答型の代数的証明に関しては、ほとんどの生徒がそのレベルに達していないことが予想される。

最後に、代数的証明に関する理解を、「証明を構成する能力」と「証明の意義の理解」という2つの視点から見た場合、前者

についてはある程度できていても、後者についての理解が十分でない生徒が一定数以上存在するということが明らかになっている。全国学力学習状況調査では、「証明を構成する能力」については調査されているものの、「証明の意義の理解」については、図形領域の問題において一部扱われているのみである。代数的証明においても「証明の意義の理解」に関する調査と合わせて、生徒の理解の現状を総合的に把握することが必要であろう。

以上、本研究において分析してきた結果をまとめてみたが、それらのことから、「代数的証明」に関する学習指導改善のために課題となることは、大きく次の3つが挙げられるであろう。

- (1) 代数的証明に関して扱う多様な教材の開発
- (2) 目的に応じた式変形など、代数的証明の構成に必要なスキルの獲得に向けた学習指導の改善
- (3) 代数的証明の意義について理解するための学習内容の開発および学習指導法の改善

以上の課題のうち、(2)については、全国学力・学習状況調査等を通して少しずつ改善の手立てが示されてきているが、(1)(3)についてはまだまだこれからの課題であるといえる。今後は、この(1)(3)の課題を中心に、研究の具体化を図っていきたい。

参考文献

- 1) 文部科学省：中学校学習指導要領解説 数学編，教育出版，2008年9月。
- 2) 文部科学省：中学校学習指導要領解説 数学編，大阪書籍，2006年11月。
- 3) 藤井齊亮ほか：新しい数学2・3，東京書籍，2012年。
- 4) 岡本和夫ほか：未来へひろがる数学2・3，啓林館，2012年。
- 5) 一松信ほか：中学校数学2・3，学校図書，2012年。
- 6) 杉山吉茂ほか：新編 新しい数学2・3，東京書籍，2010年。
- 7) 岡本和夫ほか：未来へひろがる数学2・3，啓林館，2010年。
- 8) 一松信ほか：中学校数学2・3，学校図書，2010年。
- 9) 国立教育政策研究所教育課程センター：平成19年度～平成24年度 全国学力・学習状況調査 解説資料 中学校 数学，2007年5月，2008年4月，2009年4月，2010年4月，2011年9月，2012年4月。
- 10) 文部科学省・国立教育政策研究所：平成19年度～平成24年度 全国学力・学習状況調査【中学校】報告書，2008年1月，2008年11月，2009年12月，2010年10月，2012年9月。
- 11) 國宗進 編著：確かな理解を目指した文字式の学習指導，中学校数学科・新しい授業づくり5，明治図書，1997年8月。