熊大教育実践研究　第30号，15－22，2013

代数的証明の学習における操作的証明の役割

佐　々　祐　之*

A Role of the Operative Proofs in the Process of Learning Algebraic Proofs

Hiroyuki SASA

Generally, Japanese students learn about algebraic proof at second grade in junior high school. But its teaching activities tend to focus on rather the techniques of expression formulae than sense of meaning of algebraic proofs.

A purpose of this study is to design a learning environment that students think deeply about the sense of meaning of algebraic proofs in school mathematics.

For this purpose, I tried to put one experiment lesson which used the subject of ANNA numbers. This experiment lessons use the operative proofs that E. Ch. Wittmann propounds. From these experiment lessons, I got some suggestions for design of learning environment of algebraic proofs. For example, teacher can intentionally produce situations which students discuss about generality of algebraic proof by using operative proof that use counters and place value table,

Key words: operative proof, ANNA numbers, algebraic proof

1．本研究の目的

平成20年に改訂された中学校学習指導要領が，本年度より移行期を経て完全実施となり，学校現場では，今回の改訂の目玉である「数学的活動の一層の充実」を目指した学習活動が展開されようとしている．これまでも，数学的活動については，学習指導要領解説において，様々な形で強調されてきており，初めて強調されたものではないが，今回の学習指導要領の改訂では，この数学的活動が内容として位置付けられ，これまで以上に数学的活動を重視した学習活動の展開が求められるようになったと言えよう．

中学校学習指導要領に示された数学的活動には，「数や図形の性質などを見いだす活動」「数学を利用する活動」「数学的に説明し伝え合う活動」の３つが示されており，それぞれの活動について第１学年と第２，第３学年に分けて示されている．

中学校数学科における代数的証明の学習は，第２学年で指導されるが，教育課程上，図形の証明に先立って指導されることから，証明ということを前面に出した指導ではないものの，様々な数の性質を文字を用いて表し，説明していくという意味では，数学的活動の３つ目，「数学的な表現を用いて，根拠を明らかにして筋道立てて説明し伝え合う活動」を具現化する単元として重要な役割を果たすものであろう．

しかし，実際には「文字を用いた説明」の単元では，文字を用いて数を表し，代数的な式変形を形式的に行うことに終始し，「証明する」という意識は薄いまま学習活動が展開されているのではないだろうか．全国学力学習状況調査の結果を見ても，数学Ｂにおける代数的証明を記述する問題では，数を文字を用いて表すところまでが示されており，その続きを計算して結論を導くプロセスを完成させるという部分回答形式の問題であるにもかかわらず，その正答率は，42.5％（平成19年度），39.7％（平成20年度），41.7％（平成21年度），26.7％（平成22年度），38.8％（平成24年度）といずれも40％前後で推移しており，代数的証明の内容の定着が十分であるとは言えない．

また，代数的証明を構成することができている生徒も，何のために文字を用いて説明を行うのか，数の性質が一般に成り立つとはどういうことなのか，といったことに関して十分理解しないまま，形式的に代数処理を行い，証明を構成しているということも考えられるのではないだろうか．

本研究では，中学校における代数的証明の学習において，「数学的な表現を用いて，根拠を明らかにして筋道立てて説明し伝え合う活動」を具現化してい

＊ 熊本大学教育学部

くために，ヴィットマンの提唱する操作的証明（Operative proof）を取り入れることによって，証明の一般性について議論する場面を設け，証明の意義の理解を促進させることをねらいとしている．そこで，中学校第２学年の「文字を用いた説明」の単元において，おはじきと位取り表を用いた操作的証明を取り入れた学習環境のデザインを行い，熊本県内の公立中学校において実験授業を行った．本稿では，本研究の枠組みと実際に行った実験授業の概要及び分析の結果を報告するとともに，実験授業から得られた示唆についてまとめることとする．

２．研究の枠組み

國宗（1987，2000）は，中学生の証明の意義理解に関する調査研究を行い，ほとんどの中学生が，図形の性質を証明するために，実験や実測による方法でもよいと考えていたり，実験や実測による方法を演繹的な証明による方法と並列的に捉えていることを明らかにしている．

國宗は，この調査にあたって「証明の意義」の理解を，次の２つの観点から捉えている．

ａ．「論証のもつ一般性」の理解
　①定理は全称命題であることの理解
　②証明には一般性があることの理解
　③図は代表であることの理解
　④実験・実測による方法の特徴の理解
ｂ．「推論のしくみ」の理解
　①仮定・結論，証明の理解
　②根拠となることがら，定義の意味の理解
　③循環論法は不合理であることの理解
　④「体系」の理解

さらに，これら２つの観点から「論証の意義」の理解に関する発達段階として，次のⅠからⅢを設定している．

〔段階Ⅰ〕図形の性質を証明するのに，実験・実測による方法でも十分であると考えている段階．
〔段階Ⅱ〕演繹的に証明しなければならないことの意味を理解している段階．
〔段階Ⅲ〕大局的（体系的）な意味も理解して証明できる段階．

また，このような発達段階に関して，中学校の図形指導では，第Ⅱ段階へ達することを目指すべきであるとしている．

調査研究では，上記の枠組みに沿った調査問題で1983～1986年，1999年の２回にわたって調査を行っているが，いずれの調査でも，発達段階の第Ⅰ段階にとどまっている生徒が，中学校２年生で約90%，中学校３年生で約80%いることが示されている．

このような結果に対して，國宗は，〔段階Ⅰ〕から〔段階Ⅱ〕へ発達を促進させるための指導として，

・実験・実測による方法の特徴を，証明による方法の特徴と比較する．
・特殊な図や証明を取り上げる．
・循環論法を取り上げる．

といった指導が有効であることを示している．これらの指導の重要性については，全国学力学習状況調査においても，証明の一般性について問う問題（平成19年度調査　数学Ａ $\boxed{7}$，平成21年度調査　数学Ａ $\boxed{8}$，平成23年度調査　数学Ａ $\boxed{8}$）や図の代表性に関する問題（平成21年度調査　数学Ａ $\boxed{8}$，平成22年度調査　数学Ａ $\boxed{8}$，平成24年度調査　数学Ａ $\boxed{8}$）や循環論法を修正する問題（平成19年度調査　数学Ｂ $\boxed{4}$）など，再三にわたって出題されており，学校現場での学習指導にも生かされてきている．

國宗のこれらの研究は，図形の証明に関して行われたものであるが，「証明の意義」の理解ということでいえば，一部，図の代表性に関する部分などを除けば，代数的証明の理解においても國宗のいう発達段階は当てはまるものであることは予想できる．実際，國宗は，代数的証明に関する意義の理解に関しても，次のような水準を設定して調査を行っているが，やはり，図形の場合と同様に，ほとんどの中学生が代数的証明の意義の理解については十分なレベルにないことが示されている．

そこで本研究では，代数的証明の学習において，「証明の意義」の理解に関して，〔段階Ⅰ〕から〔段階Ⅱ〕へ発達を促進させるためのいつの指導のアイデアとして，ヴィットマンの提唱する操作的証明と取り入れることを試みた．通常，「文字を用いた説明」における代数的証明の学習では，「２桁の自然数の一の位の数字と十の位の数字を入れ替えた数と元の数との差は９の倍数になる」といった数の性質に関する命題を取り上げ，いくつかの具体的な数で性質を確かめた後は，すぐに２桁の自然数を文字を用いて表すことに進み，代数的計算によって９の倍数になることを示すという，半ば天下り的な指導にならざるを得ない．そこで，本研究では，文字を用いた形式的証明に進む前に，おはじきと位取り表という具体物を用いた操作を基にした説明の活動（操作的証明）を取り入れ，証明の一般性についての議論

を促進させるという実験授業をデザインし実施した．本稿では，その実験授業の分析の概要を報告する．

3．操作的証明とANNA数の現象

⑴　操作的証明の概念

ヴィットマンは，教育研究プロジェクト“mathe 2000”の創設者の一人であり，《“mathe 2000”において持たれる教授と学習の見解は，ピアジェの発生的認識論と心理学による影響が非常に大きい．数学的知識の源は，様々な種類の“対象”において，学習者によって施された“操作”によって見られる》（Wittmann，1996，p. 1）と述べ，数学教育における学習の原理として「操作的原理（Operative principle）」を提唱している．この原理を証明活動に適用させた学習活動が「操作的証明」である．この「操作的証明」の特徴として，ヴィットマンは次の２点を挙げている（Wittmann，1996，p. 6）．

> ①数学的な問題状況の探究活動において統合された証明であること．
> ②適切に表現された数学的対象に及ぼす操作の結果をもとにした証明であること．

①は，操作的証明の概念的位置付けであり，②は学習活動としての操作的証明の実行に関する性格付けである．

つまり，「操作的証明」とは，対象に及ぼす操作の結果をもとに証明を行う学習活動であり，探究，推論，コミュニケーションという一連の活動を伴うものである．そのため，子どもたちの主体的な探究活動を必要とするものであると言える．

⑵　ANNA数のパターンにおける操作的証明

ヴィットマンが，「操作的証明」を説明するために示した例の１つが，今回の実験授業の題材でもあるANNA数という数学的現象である．このANNA数という数学的現象とは「０から９までの異なる２つの整数を用いてつくった２つの数（例えば２と３を用いてつくったANNA数は2332と3223）の差は常に891の倍数になり，その値は891×（最初に選んだ２数の差）となる」というものである．

通常，ANNA数の差のパターンに関する文字を用いた形式的な証明は，次のように行われる．

（証明）最初に選んだ２数を，a，b（a>b）とすると，２つのANNA数は，1000a＋100b＋10b＋a，1000b+100a+10a+bと表わされる．

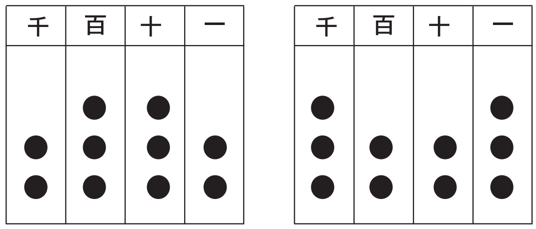
これらの差をとると，

$$
\begin{aligned}
&(1000a+100b+10b+a)-(1000b+100a+10a+b)\\
&=1000a+100b+10b+a-1000b-100a-10a-b\\
&=1000(a-b)+100(b-a)+10(b-a)+(a-b)\\
&=1000(a-b)-100(a-b)-10(a-b)+(a-b)\\
&=(1000-100-10+1)(a-b)\\
&=891(a-b)
\end{aligned}
$$

よって，２つのANNA数の差は，最初に選んだ２数の差の891倍となる．（証明終）

これに対してヴィットマンの提唱する操作的証明では，おはじきと位取り表を用いて次のように行われる．

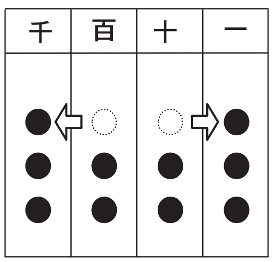
例えば，２と３を用いてつくったANNA数をおはじきと位取り表を用いて表現すると，図１のようになる．



【図１：位取り表による2332，3223の表現】

このようなおはじきと位取り表による数の表現は，日本の教科書ではあまり用いられない．日本の教科書では，一の位の数はブロックで，十の位の数はブロックを10個合わせたスティックで，百の位の数はスティックを10本集めたプレートで，というように，量と対応させて表現される．しかし，代数的な思考への移行という意味においては，上記に示した数の表現方法のほうが，位によって表す単位が異なるという十進位取り記数法の性質を端的に表していると言えるだろう．

ANNA数の現象の操作的証明では，まず，2332を位取り表で表す．これから3223を表すには，図２のように百の位のおはじき１個を千の位に移動させ，十の位のおはじき１個を一の位に移動させればよい．

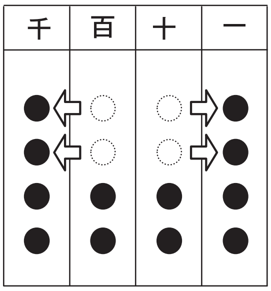


【図２：位取り表でのおはじきの移動】

このとき，百の位から千の位へおはじきを１個移動させる操作によって，「1000－100」だけ値が変化し，十の位から一の位へおはじきを１個移動させる操作によって，「－10＋１」だけ値が変化する．全体としては，「1000－100－10＋１＝891」だけ値が変化したことが理解されるのである．

また，2332と3223のときの操作についての理解は，3443と4334のような他の最初に選んだ２数の差が１のときにおいても，「百の位のおはじき１個を千の位に移動させ，十の位のおはじき１個を一の位に移動させれる」という操作自体は変わらないということから一般化され，これらの場合のANNA数の差は常に891になるという説明を行うのである．

また，最初に選んだ２数の差が１以外の場合にもこの操作的証明を用いることができる．例えば，最初に選んだ２数の差が２の場合では，図３のように「百の位のおはじき１個を千の位に移動させ，十の位のおはじき１個を一の位に移動させる」という先ほどのおはじきの操作を２回行うことで「891×２＝1782」だけ値が変化するということが説明できる．同様に，最初に選んだ２数の差が３の場合は「891×３＝2673」，４の場合は「891×４＝3564」であることが理解される．



【図３：位取り表でのおはじきの移動】

このように，ANNA数の現象における操作的証明では，最初に選んだ２数の差が１の場合，また，最初に選んだ２数の差が１以外の場合について，それぞれ操作を振り返ることを通して，二段階の一般化を行い，「同じ２つの整数からなるANNA数の差は，891×（最初に選んだ２数の差）となる」ということが説明できるのである．

このようなヴィットマンの操作的証明は，もともとは証明の手段を持たない小学校の段階の児童に，「理由付け」の学習活動としての手段を与えることをイメージして考えられたものであるが，このような操作を振り返ることを通した証明の活動は，証明を初めて学習する中学校段階の生徒にも有効に作用するのではないだろうか．中学校第２学年における「文字を用いた説明」の単元では，証明の意味や命題の一般性ということよりも，式をいかに変形していくかということに焦点化される傾向にあることは前述したとおりであるし，証明について本格的に学習する図形の単元でも，「証明の書き方」の指導が中心的であり，証明そのものの意義や証明のもつ一般性に関する学習は十分行われていないというのが現状である．そのような証明の学習の中に操作的証明を取り入れることによって，自らの操作を振り返り，それを一般化するという学習活動を組み込むことによって，証明の意義や証明のもつ一般性の理解に役立つものと考えられる．そこで，本研究における実験授業では，第２学年の「文字を用いた説明」の単元において，このANNA数のパターンとその操作的証明を取り入れ，証明の一般性に関する議論を促進させることを試みた．

４．実験授業の概要

実験授業は，平成24年５月11日から21日にかけて５単位時間，熊本県内の公立中学校１クラス（男子11名，女子９名）で実施した．平成23年度には熊本大学教育学部附属中学校において同様の実験授業を行ったが，前回は操作的証明を取り入れることによって生徒がどのような反応を見せるかということがねらいであったため，操作的証明を取り入れるクラスと通常の学習指導を行うクラスを設けて比較分析を行った（佐々，樋脇，2011）．しかし，ある程度学力レベルの高い附属中学校での実践であったことと，特に分析の視点を特定せずに行った実験授業であったため，今回は，標準的な学力レベルにある公立校での実践とし，さらに，操作的証明を取り入れることによって証明の一般性についての議論をどこまで行うことができるかという視点を設定して実験授業を実施した．また，昨年度実施した附属中学校での実験授業は単元４時間での指導計画で，今回も基本的にはこの流れを変えることなく実験授業を行ったが，学校行事等の都合による短縮授業などにより，実質５単位時間での指導となった．授業の流れの概要は，以下のようなものである．

【表１：学習指導の流れ】

時	学習内容
1	・ANNA 数の現象の探究 　→ANNA 数の現象に出会い，命題化する． ・おはじきと位取り表を用いた操作的証明１ 　→ANNA 数を構成する２数の差が１の場合について，おはじきと位取り表で説明する．

2	・おはじきと位取り表を用いた操作的証明２ →ANNA 数を構成する２数の差が１以外の場合について，おはじきと位取り表で説明する.
3	・ANNA 数の現象の代数的証明 →ANNA 数の現象について，文字を用いた形式的証明を行う.
4	・教科書の課題 →「奇数＋奇数＝偶数」という数の性質を代数的に証明する.
5	・練習 →教科書の練習問題を用いた習熟ための学習 ・小単元末テスト →ANNA 数に類似した課題を含む 20 分程度の小テストを行う.

実験授業の様子はすべてビデオで記録し，教師の発問，生徒の発言等を分析することを通して，証明の一般性についての議論が促進されたか否かについての分析を行った.

５．実験授業から得られた示唆

以下では，実験授業の分析から得られた示唆についていくつかの場面に分けて示すこととする.

⑴ おはじきと位取り表の操作

まず，実験授業を分析する中で，証明の一般性の議論には直接関係ないが，生徒のおはじきの扱い方について，ある傾向がみられた．実験授業の１時間目で2332と3223という２つのANNA数の差が891であることを，おはじきと位取り表を用いて説明するよう教師が指示したところ，生徒たちは，位取り表の上に3223をおはじきで表し，そこから2332を取り除こうとする反応を見せた．この方法は，千の位と一の位についてはおはじきを２つずつ取り除くという操作ができるものの，百の位，十の位から３つのおはじきを取り除くことができないため，上の位から１つ繰り下げて下の位におはじきを10個並べ，そこから３つのおはじきを取り去るということが必要になる．このようなおはじきの操作は，筆算の操作を位取り表の上で再現する操作であるため，筆算再現型のおはじき操作と呼んでいるが，昨年度の附属中学校での実験授業でも見られた反応であり，特におはじきの操作に関して指導していない生徒は，通常，このような反応を見せるということが分かった．実験授業では，次の段階で，教師が2332を位取り表の上に作って，それを3223に作り替えるようにおはじきの操作に関する方向付けを行ったため，生徒は，今回意図した操作的証明を行うことができていた.

つまり，おはじきと位取り表の使い方について特別な指導をしなければ，ANNA数の操作的証明で意図しているような操作的証明は自然に表れるものではなく，ある程度，教師による方向付けが行われる必要があるということである．今回の実験授業では，５単位時間と限られた時間での実験授業であったため，おはじきの操作について十分な基礎的経験を積ませることなく操作的証明を行わせたが，おはじきの操作について行き詰っている生徒に対して,「2332を表した位取り表を3223につくり変えてみてください.」という発問によっておはじきの操作を方向付けすることによって，ほとんどの生徒がANNA数の差のパターンについて意図した操作的証明を行うことができていた．しかし，中には筆算再現型のおはじき操作から脱却できない生徒も見られたことから，ANNA数の学習に入る前に，あらかじめ，おはじきと位取り表を用いた様々な基礎的課題を通して学習経験を積んでおくことが望ましいであろう．ヴィットマンは，そのような学習活動の例として，例えば,「３つのおはじきを３桁の位取り表においてとき，何種類の数を表すことができるか」などを紹介している．このような基礎的な学習経験を積んでいれば，ある程度スムーズな操作的証明への到達が見込めるのではないだろうか．この点に関しては，５単位時間という限られた時間ではなく，ある程度余裕のある指導計画によって実験授業を行うなど，今後の課題としてさらに検証したい.

⑵ 証明の一般性に関する議論

①ANNA数の現象における一般性の特徴

操作的証明を取り入れた学習において，証明の一般性に関する議論を促進するために，今回の実験授業で用いたANNA数という題材は，ある意味で優れた数学的素材であると言える．なぜなら，証明の一般性を議論するに当たっては，単純な「具体から一般」という一段階の構造ではなく，何段階かの一般性の段階があり，その都度，一般性について確認することができることが望ましいが，このANNA数の差に関するパターンには，二重の一般性が含まれており，ANNA数の差に関するパターンを説明していく際に，少なくとも２回は「一般に成り立つ」ということを考える必要があるからである.

まず，一段階目の一般性は,「2332と3223，4554と5445など，最初に選んだ２数の差が１の場合，ANNA数の差は891となる.」ということである．操作的証明では，例えば2332と3223など，具体的な１つの例に関しておはじきの操作を行うことによって，差が891になることを説明する．しかし，その際，例えば2332と3223でなくても，4554と5445，8998と

9889などについても，おはじきの操作としては同じ操作になることから，その差は同様に891になるという操作から得られる一般性を導くことが求められる．

次に二段階目の一般性は，最初に選んだ２数の差が１でない場合に，ANNA数の差は891×（最初に選んだ２数の差）になるという一般性である．操作的証明では，例えば3553と5335という具体例を用いて，最初に選んだ２数の差が２の場合，最初に選んだ２数の差が１の場合の操作を２回繰り返せばよいということを根拠に，ANNA数の差が891×２になることを示すが，同時に差がｎの場合も，同様の操作をｎ回繰り返せばよいということを根拠として，ANNA数の差が891×ｎとなることを説明することが求められる．

今回の実験授業では，この２段階を一般性の議論に利用するため，あえて「最初に選んだ２数の差が１の場合に限定した操作的証明の場面」,「最初に選んだ２数の差が１以外の操作的証明の場面」に分けて授業を構成し，それぞれの場面において「一般に成り立つか」ということを考えさせる場面を設けていった．

このように，ANNA数の差のパターンに関しては，最初に選ぶ２数の選び方によって，二重の一般性の段階があり，操作的証明では，その都度「この操作は同様の別の場合でもできるのか.」ということを確認しながら証明することが求められるのである．これは，操作的証明の最も顕著な特徴であり,「具体的な場合に対する操作の結果をもとに，一般に成り立つことを説明する」という操作的証明の本質を示すものである．

また，おはじきと位取り表で行った操作を別の場合でも同様に行うことができるかどうかを考え，一般に成り立つということを考えていくプロセスは，図形の論証の学習でいう「図の代表性」について考えるプロセスと類似しているといえよう．図形の論証の場合，証明に際して用いる図は，様々な場合を代表する１つの図であり，その意味では１つの具体例であると言える．論証を組み立てていく際に，その代表としての図において，補助線を引いたり記号を書き入れたりして証明を構想していくことになる．このプロセスは，おはじきと位取り表の操作を通して一般的な場合で成り立つことの理由を考えていく操作的証明のプロセスと同様のものであり，その意味では，代数的証明における操作的証明は，図形の論証における図の役割を果たすものであると言えよう．これまで代数的証明の学習では，具体的な数値で確かめるという活動はあっても，そこから一般に成り立つということを考えることが難しいため，文字を用いて表し代数的に式を処理していくという形式的なものにならざるを得なかったが，操作的証明を取り入れることによって，具体的な数値からいきなり記号へと抽象化するのではなく，操作というものを媒介として一般的に成り立つことをイメージするという学習活動が可能となるのではないだろうか.

②文字を用いた代数的証明への移行

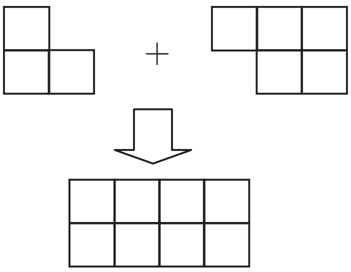
「ANNA数の差に関するパターンの探究」「おはじきと位取り表と用いた操作的証明」「文字を用いた形式的な証明」と学習が進む中で，１つ大きな課題となるのが｢操作的証明から形式的な証明への移行」の場面である．操作的証明によって一般的に成り立つということをイメージできた生徒が，形式的証明を構成するには，形式的証明が必要であるという認識，つまりは，操作的証明では一般的に成り立つことを示すのには不十分であるということの認識が必要となる．操作的証明で一般性についてイメージできているがゆえに，文字を用いて形式的に証明することの必要性を感じにくいということが予想されるが，今回の実験授業で教師は,「書いて説明する」ということを繰り返し求め，形式的証明の必要性を認識させようとしていた．

実験授業の３時間目，一般のANNA数の差のパターンについて操作的証明を行った後，教師はそのパターンの説明をワークシートに書いてまとめるよう指示している．生徒は位取り表におはじきの動きを矢印で書き込むなどして説明をまとめているが，結局，紙面に書いた場合，ある１つの具体例を示しただけになってしまうことに気づき，他の同様の場面でも同じ操作ができることをどのように表現したらよいか戸惑っているようであった．

このようなやり取りの後，教師が文字を使って表してみようと提案し，最初に選んだ２数をａ，ｂとおくところから，確認しながら文字を用いた形式的な証明を完成させていったが，最終的にANNA数の差が891×（ｂ－ａ）となったとき，生徒からは「おぉ！」という声が上がった．通常，天下り的に２つのANNA数を文字で表してその差を計算した場合であれば，おそらくこのような反応は見られなかったであろう．操作的証明を書いて記録しようとして一般的に成り立つことが表現しにくいという経験を経ているからこそ，形式的証明の結果が端的に一般性を示していることに驚いたのであると考えられる．このように，形式的証明のもつ一般性を強調できるという意味でも，代数的証明の学習に操作的証明を取り入れることは有効であると言えよう．

③「奇数＋奇数＝偶数」を扱った場面

ANNA数の学習を終えて４時間目は,「奇数＋奇数＝偶数」となることを説明する学習活動が行われた．ここでは，文字を用いた形式的証明に限定することなく，自由に説明の方法を考えさせたが，一部の生徒は，２列に並べたブロックの図を用いた操作的証明を考案していた．これは，正方形上のブロックを２列に配列したとき，奇数は必ず１個飛び出た部分ができるということから，それを２つ組み合わせると飛び出た部分が打ち消しあい，ちょうど２列のブロックの配列，つまり偶数ができるということを説明するものである．



【図４：ブロックを用いた「奇数＋奇数＝偶数」の説明】

黒板でこの方法によって説明した生徒は，３＋５という場面を用いてこの操作的証明を行ったが，飛び出した部分が合わさって２×４の偶数の列になることは説明できているものの，他の奇数同士の場合も同様の操作が行えることには言及していなかった．この生徒は，１つの具体例でも十分であると考えているという意味で，國宗の言う発達の段階でいえば〔段階Ⅰ〕のレベルにとどまっている生徒であるが，この学習場面で教師から「ほかの奇数の場合も同じことが言えるか」ということを問われて証明の一般性について理解する様子が見られた．このように，操作的証明の段階をとらえて，その都度，証明の一般性について確認していくという活動は,「証明の意義」の理解の段階を〔段階２〕へ引き上げていくために有効な学習活動であるといえよう．そのような学習場面を意図的に設定することができるという意味で，代数的証明の学習に操作的証明を取り入れることは有効であると言えよう．

６．まとめと今後の課題

今回の実験授業を通して，証明の一般性について考える場面を意図的に設定することができたということに関して，代数的証明の学習において操作的証明を取り入れることの１つの有効性を示すことができたと言えよう．しかし，一方では，操作的証明が「具体的な例の操作を通して一般に成り立つことをイメージする」という特性を持つことから，ともすれば，その操作自体で証明の一般性が保証できていると考えてしまったり，そのことによって逆に形式的証明の必要性の認識を弱めてしまうということがあるかもしれない．生徒がそのように証明の一般性について不十分な理解をしてしまわないためには，何らかの学習指導上の工夫，つまり，学習環境デザインとしての工夫を行っていかなければならないだろう．今回の実験授業の中では，教師は,「書いて伝える」ということに向かないという操作的証明の特性をクローズアップすることによって，形式的証明の必要性を強調しようとしていたが，このような教師の指導上の工夫は，この問題点の改善に向けた１つのヒントとなるであろう．これについては，今後も実験授業を重ねつつ，詳細に検討していく必要がある．

また，おはじきと位取り表の操作については，今回の実験授業でも特に問題なく行うことができたが,筆算再現型のおはじき操作から抜け出せない生徒も何人か見られた．これについては，おはじきと位取り表の操作に関しての基礎的な経験を積む学習機会を設けることが１つの改善の方法となるであろうが,そのためには，予備的な学習活動の時間として，今回の５単位時間以外に学習時間を確保することが必要となる．現行の教育課程の中で，代数的証明の学習に関して多くの時間を割くことができない現状を考えると難しい課題ではあるが，関連する他の単元と組み合わせによって時間を調整したり，第１学年の学年末など，時間的に余裕のある時期を利用して新たな学習活動を組み込むなどの工夫を行うことが可能であろう．これについても，具体的な学習環境をデザインし，検証していく必要があるだろう．

以上のような点を今後の課題とし，継続して研究に取り組みたい．

【謝　辞】

今回の実験授業に際しては，水上村立水上中学校の樋脇正幸先生，同中学校第２学年の皆さんのご協力をいただきました．この場を借りて，心より感謝申し上げます．

参考文献

１）文部科学省(2008):「中学校学習指導要領解説　数学編」,教育出版.

2）國宗　進（1987）:「「証明の意義」の理解に関する発達の研究」，日本数学教育学会誌，数学教育学論究，第69巻臨時増刊，Vol. 47・48，pp. 3-23.

3）國宗　進（2000）:「図形の論証に関する理解度の変化」，日本数学教育学会誌，数学教育54-2，第82巻第３号，pp. 2-12.

4）國宗　進編著：確かな理解を目指した文字式の学習指導，中学校数学科・新しい授業づくり５，明治図書，1997年８月.

5）E. Ch. Wittmann (1985): Clinical Interviews embedded in the “philosophy of teaching units” —Ameans of developing teachers' attitudes and skills', in: Christiansen, B.(ed), Systematic Cooperation Between Theory and Practice in mathematics Education, Mini-Conference at ICME5, Adelaide 1984, Copenhagen: Royal Danish School of Education, Dept. of Mathematics, 1985, 18-31.

6）E. Ch. Wittmann (1996): “Operative proofs in Primary Mathematics”, Paper presented to Topic Group 8, “Proofs and proving: Why, when, how?” at the 8th International Congress of Mathematics Education, Seville 1996.

7）Erich Ch. Wittmann (2004): Learning mathematics for teaching mathematics: The notion of operative proof, Paper presented at TSG3 in 10th ICME, 4.-11., July, 2004, Copenhagen, Denmark.

8）E. Ch. Wittmann (2005): “Mathematics as the science of patterns- A guideline for developing mathematics education from early childhood to adulthood”, Plenary lecture presented at the International Colloquium “Mathematical Learning from Early Childhood to Adulthood” organized by the Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathematiques in collaboration with the Instiut de mathematique de i' Universite de Mons-Hainaut, Mons/Belgium, July 7-9.

9）Erich Ch. Wittmann (2009): Operative Proof in Elementary Mathematics, Paper presented at the international conference ICMI Study 19: Proof and Proving in Mathematics Education “Proof and proving in mathematics education”, Taiwan, 10-15. May 2009, organized by ICMI.

10）G. N. Müller/ E. Ch. Wittmann (2004): Das Zahlenbuch, 4. Schuljahr, Klett.

11）E. Ch. Wittmann/ G. N. Müller (2002): Das Zahlenbuch, Lehrerband, Mathematik im 1. Schuljahr, Klett.

12）藤井斉亮ほか（2012）：新しい数学２・３，東京書籍.

13）岡本和夫ほか（2012）：未来へひろがる数学２・３，啓林館.

14）佐々祐之・山本信也（2009）:「数学教育における操作的証明に関する研究—おはじきと位取り表による操作的証明の事例から—」，日本数学教育学会第42回数学教育論文発表会論文集，pp. 553-558.

15）佐々祐之・山本信也（2009）:「数学教育における操作的証明に関する研究—おはじきと位取り表による操作的証明の事例から—」，日本数学教育学会第42回数学教育論文発表会論文集，pp. 553-558.

16）佐々祐之・山本信也（2010）:「数学教育における「操作的証明（Operative proof)」に関する研究—おはじきと位取り表を用いた操作的証明を例として—」，全国数学教育学会誌　数学教育学研究，第16巻第２号，pp. 11-20.

17）佐々祐之・樋脇正幸（2011）:「中学校数学科における操作的証明に関する研究」，日本数学教育学会第44回数学教育論文発表会論文集，pp. 735-740.