

社会環境工学演習（有限要素法による構造力学問題）

松本英敏

環境建設技術系

1 はじめに

社会環境工学演習で大課題が3題出されたが、その一つとして有限要素法による構造力学の演習（4年次）があったのでトライした。皆さんの技術研究の参考になれば幸いである。

2 弾性体解析の仮定

- ・物体は均質，等方な連続体である。
- ・物体はフックの法則に従う弾性体である。
- ・変位は微小であり，2次以上の微小項は無視する。
- ・変形は微小であるので，応力のつり合いは変形前の形状についてのみ考える。

以上の仮定のもとに支配方程式を考える。

2.1 ひずみ-変位式

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad , \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad , \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \quad (1)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \quad , \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \quad , \quad \gamma_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}$$

2.2 フックの法則

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left\{ \varepsilon_x + \frac{\nu}{1-\nu} (\varepsilon_y + \varepsilon_z) \right\} \\ \sigma_y &= \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left\{ \varepsilon_y + \frac{\nu}{1-\nu} (\varepsilon_z + \varepsilon_x) \right\} \\ \sigma_z &= \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left\{ \varepsilon_z + \frac{\nu}{1-\nu} (\varepsilon_x + \varepsilon_y) \right\} \end{aligned} \quad (2)$$

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy} \quad , \quad \tau_{yz} = G\gamma_{yz} \quad , \quad \tau_{zx} = G\gamma_{zx}$$

2.3 仮想仕事の原理（弾性体）

つり合い状態にある弾性体の各点に任意の微小な仮想変位を与えた時，この仮想変位によって，外力および内力のなす仕事の和はゼロである。

$$\{\delta^*\}^T \{P\} = \int_V (\{\varepsilon^*\}^T \{\sigma\} - \{\delta^*\}^T \{F\}) dV \quad (3)$$

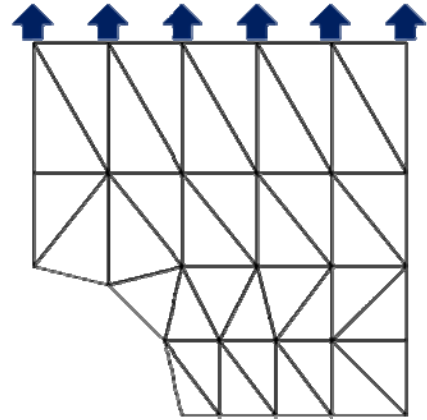


図1 円孔平板概略図

3 有限要素法

偏微分方程式を解く代表的な方法として3つの解法がある。有限差分法，有限要素法，境界要素法などがそれにあたる。ここでは，解析領域を微小要素に分割し，その要素毎に未知数を含む基底関数で支配方程式を近似し，全体領域を重ね合わせ，導かれた連立方程式を解く有限要素法を用いた。

3.1 Bマトリックス

形状関数 $u = \sum_{i=1}^3 N_i u_i$ ， $v = \sum_{i=1}^3 N_i v_i$ を用いて，式(1)に代入するとひずみ-変位式は

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial x} & \frac{\partial N_4}{\partial y} & \frac{\partial N_4}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{bmatrix} \quad (4)$$

一般的には， $\{\varepsilon\} = [B] \{\delta\}$ として書くことができる。

3.2 Dマトリックス

式(2)のフックの法則を用いて，平面ひずみ問題として取り扱おうと $\varepsilon_z = 0$ となり，matrix 化すれば

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad (5)$$

$\{\sigma\} = [D] \{\varepsilon\}$ と書き表される。

3.3 剛性マトリックス

仮想仕事の原理式(3)に式(4),(5)と， $[F] = 0$ として代入すると

$$\{\varepsilon\} = [B] \{\delta\} \rightarrow \{\varepsilon\}^T = \{\delta\}^T [B]^T, \quad \{\sigma\} = [D] \{\varepsilon\} = [D][B] \{\delta\}$$

$$[\delta^*]^T \{P\} = \{\delta^*\}^T \int_V [B]^T [D] [B] \{\delta\} dV, \quad \{P\} = \int_V [B]^T [D] [B] dV \{\delta\}$$

剛性マトリックスは $\{P\} = [K] \{\delta\}$ の関係より $[K] = \int_V [B]^T [D] [B] dV$

と表わされ，数値積分は

$$dV = \det |J| d\xi d\eta d\zeta \quad \text{および} \quad \int_V f(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta = \sum_l \sum_m \sum_n w_l w_m w_n f(\xi, \eta, \zeta) \quad \text{より}$$

$$[K] = \int_V [B]^T [D] [B] dV = \int_V [B]^T [D] [B] |J| d\xi d\eta d\zeta = \sum_l \sum_m \sum_n w_l w_m w_n [B]^T [D] [B] |J|_{lmn}$$

ただし， $|J|_{lmn}$ は jacobian の行列式， w_i はアイソパラメトリック要素の重みである。

4 フローチャート

- ・ヤング率, ポアソン比, 節点座標, 要素の構成, 境界条件, 外力等のデータを入力
- ・B, Dマトリックスより, 剛性マトリックスの計算
- ・境界条件を導入し, 連立方程式を解く
- ・解析変位からひずみ, 応力の算定
- ・解析結果の出力

5 解析結果

28 節点, 36 要素について, 载荷は上部 6 点 (図 1 参照) に 1kgf/mm^2 , 境界条件は左端 x 方向 3 点, 下端 y 方向 5 点を固定とした。ヤング率, ポアソン比, 厚さは $21,000\text{kgf/mm}^2$, 0.3, 1mm で統一した。図 2 の赤線は解析変位である。

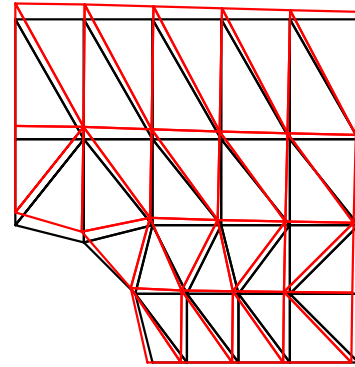


図 2 解析結果 (変位量を 5000 倍に拡大)

5.1 変位解析

表 1 が変位の解析結果である。座標は左下が原点であり, 節点番号も左下から順次右上へと並んでいる。結果を見ると境界条件が満足されており, 下端 y 方向は全てゼロになっている。同様に, x 方向の境界条件も満足していることが判る。

表 1 変位解析結果

節点	dx	dy
1	-0.295150e-03	0.000000e+00
2	-0.344713e-03	0.000000e+00
3	-0.371864e-03	0.000000e+00
4	-0.390272e-03	0.000000e+00
5	-0.418971e-03	0.000000e+00
6	-0.272644e-03	0.332410e-03
7	-0.299087e-03	0.198443e-03
8	-0.325117e-03	0.142755e-03
9	-0.346604e-03	0.107997e-03
10	-0.364895e-03	0.644924e-04
11	0.000000e+00	0.748056e-03
12	-0.119696e-03	0.618939e-03
13	-0.148377e-03	0.434053e-03
14	-0.209659e-03	0.301525e-03
15	-0.257182e-03	0.217553e-03
16	-0.293137e-03	0.142574e-03
17	0.000000e+00	0.781136e-03
18	-0.159543e-04	0.730941e-03
19	-0.539391e-04	0.588839e-03
20	-0.962976e-04	0.459863e-03
21	-0.134213e-03	0.356330e-03
22	-0.165421e-03	0.264131e-03
23	0.000000e+00	0.919681e-03
24	0.434019e-04	0.865707e-03
25	0.559493e-04	0.753976e-03
26	0.436559e-04	0.635599e-03
27	0.193662e-04	0.529752e-03
28	-0.912180e-05	0.435764e-03

5.2 応力解析

今回の課題は, 図 3 に示すように応力集中問題の理論解として, 円孔付近では载荷の 3 倍 (表 2 の 3p) の応力が発生する。表 3 の解析結果より, メッシュの切り方にもよるが, 等分布荷重 1kgf/mm^2 に対して要素 1 で約 3.5 倍, 要素 2 で 2 倍強の結果となっている。

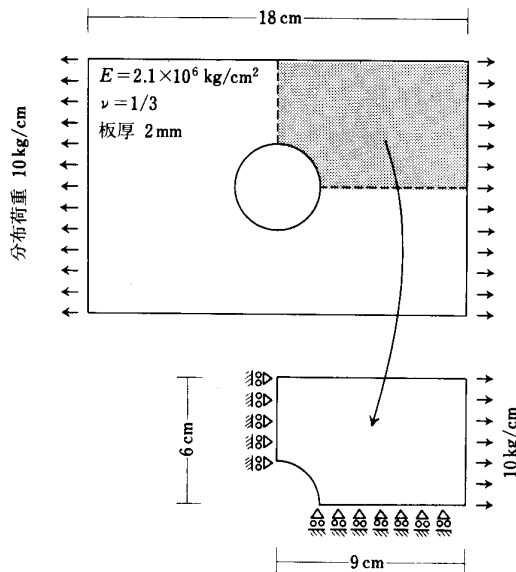


図 3 円孔回りの応力集中

表 2 円孔周りの理論解

r/a	1	2	3	∞
σ_{θ}	$3p$	$1.22p$	$1.07p$	p

式(6)がその理論解である。今回の場合、y 方向への引張りのため表 3 では σ_y に対応する。

$$\sigma_{\theta} = \frac{p}{2} \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right) - \frac{p}{2} \left(1 + \frac{3a^4}{r^4} \right) \cos 2\theta \quad (6)$$

表 3 応力、ひずみ解析結果

要素	σ_x	σ_y	τ_{xy}	ϵ_x	ϵ_y	γ_{xy}
1	0.689050e-02	0.349237e+01	-0.918733e-02	-0.495629e-05	0.166205e-04	-0.113748e-06
2	0.280106e+00	0.216768e+01	-0.537099e+00	-0.176285e-05	0.992215e-05	-0.664979e-05
3	0.269222e+00	0.216442e+01	0.184261e+00	-0.181002e-05	0.992215e-05	0.228133e-05
4	0.936782e-01	0.152703e+01	-0.111079e+00	-0.173538e-05	0.713773e-05	-0.137526e-05
5	0.210944e+00	0.156221e+01	0.188783e+00	-0.122723e-05	0.713773e-05	0.233731e-05
6	0.432794e-01	0.114695e+01	-0.108031e-01	-0.143241e-05	0.539984e-05	-0.133753e-06
7	0.426924e-01	0.114677e+01	0.176354e+00	-0.143495e-05	0.539984e-05	0.218343e-05
8	0.121856e-01	0.680826e+00	0.426924e-01	-0.914581e-06	0.322462e-05	0.528573e-06
9	-0.189396e+00	0.159926e+01	-0.339699e+00	-0.318655e-05	0.788611e-05	-0.420579e-05
10	0.996070e-01	0.156602e+01	-0.183915e+00	-0.176285e-05	0.731494e-05	-0.227704e-05
11	-0.120911e+00	0.174186e+01	-0.503179e-01	-0.306414e-05	0.846729e-05	-0.622983e-06
12	0.848611e-01	0.149764e+01	0.131370e+00	-0.173538e-05	0.701037e-05	0.162649e-05
13	-0.714233e-01	0.142523e+01	0.791761e-01	-0.237616e-05	0.688886e-05	0.980275e-06
14	0.486766e-01	0.116494e+01	0.173967e+00	-0.143241e-05	0.547780e-05	0.215387e-05
15	-0.356260e-01	0.113965e+01	0.583226e-01	-0.179772e-05	0.547780e-05	0.722089e-06
16	0.592239e-01	0.837620e+00	0.114102e+00	-0.914581e-06	0.390406e-05	0.141269e-05
17	-0.924839e-01	0.250122e+00	-0.202712e+00	-0.797717e-06	0.132318e-05	-0.250976e-05
18	-0.923134e+00	0.507075e+00	-0.166748e+00	-0.512027e-05	0.373340e-05	-0.206450e-05
19	-0.271970e+00	0.702424e+00	-0.542735e+00	-0.229856e-05	0.373340e-05	-0.671958e-05
20	-0.964853e-02	0.129731e+01	-0.268767e+00	-0.189924e-05	0.619143e-05	-0.332759e-05
21	-0.278471e+00	0.121666e+01	-0.230106e+00	-0.306414e-05	0.619143e-05	-0.284893e-05
22	-0.502750e-01	0.131496e+01	-0.154618e+00	-0.211792e-05	0.633354e-05	-0.191432e-05
23	-0.109869e+00	0.129708e+01	0.271287e-01	-0.237616e-05	0.633354e-05	0.335879e-06
24	-0.531866e-01	0.114977e+01	-0.208324e-01	-0.189579e-05	0.555106e-05	-0.257925e-06
25	-0.305540e-01	0.115656e+01	0.944836e-01	-0.179772e-05	0.555106e-05	0.116980e-05
26	-0.234607e-01	0.101405e+01	0.402834e-01	-0.156036e-05	0.486231e-05	0.498747e-06
27	0.899564e-01	0.858257e+00	-0.202712e+00	-0.797717e-06	0.395843e-05	-0.250976e-05
28	0.767361e+00	0.103881e+01	-0.809961e-01	0.217009e-05	0.385046e-05	-0.100281e-05
29	-0.171716e+00	0.757082e+00	-0.436896e+00	-0.189924e-05	0.385046e-05	-0.540919e-05
30	0.471423e+00	0.113225e+01	-0.197631e+00	0.627371e-06	0.471821e-05	-0.244687e-05
31	-0.162106e+00	0.942192e+00	-0.267275e+00	-0.211792e-05	0.471821e-05	-0.330912e-05
32	0.205762e+00	0.111614e+01	-0.155093e+00	-0.614668e-06	0.502101e-05	-0.192020e-05
33	-0.898825e-01	0.102745e+01	-0.951474e-01	-0.189579e-05	0.502101e-05	-0.117802e-05
34	0.627674e-01	0.105937e+01	-0.730422e-01	-0.121449e-05	0.495494e-05	-0.904331e-06
35	-0.170482e-01	0.103542e+01	-0.179240e-01	-0.156036e-05	0.495494e-05	-0.221917e-06
36	0.107867e-01	0.103303e+01	-0.188768e-01	-0.142440e-05	0.490380e-05	-0.233713e-06

6 おわりに

演習を振り返って、3 年生までの座学とプログラムの知識では到底できない課題と思える。たぶん大課題を 1 題解くだけでも相当の時間と労力を要するので、3 題説明すべきか、1 題に絞って深く説明すべきかは、今後の課題と言えよう。今回は二次元三角形要素の有限要素解析であったが、このプログラムは二次元四角形要素や三次元立方体要素へと、今後発展していく過程にある。

【参考文献】

- ・ 戸川隼人 著：有限要素法へのガイド，サイエンス社
- ・ 三好俊郎，白鳥正樹 共著：演習有限要素法，サイエンス社