

# 社会環境工学演習を通じた補間と回帰について

環境建設技術系 松本 英敏

## 1. はじめに

補間と回帰、一見同じように捉えられるが、大きな違いは観測点を通るかどうかである。今回、教育支援の一環として4年生の演習に携わったので報告する。

ここでは、補間としてラグランジュ補間、スプライン補間を比較した。また、回帰としては3次多項式を適用し、最小二乗法を用いて連立方程式および重回帰分析により求めた。

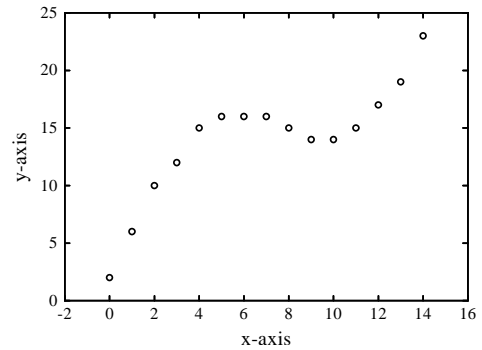


図1 観測点

## 2. ラグランジュ補間

今回は次の様な3次式について補間ならびに回帰を実施した。

$$y_k = a_0 + a_1x_k + a_2x_k^2 + a_3x_k^3 \quad (1)$$

ラグランジュ補間では、式(1)の係数 $a_i$ を次式で求めた。

$$L_k(x) = \prod_{j=0, j \neq k}^n \frac{x - x_j}{x_k - x_j}, \quad y = \sum_{k=0}^n L_k(x)y_k \quad (2)$$

3次式の補間の場合、未知数が4つなので近傍4点の観測値から係数は決定できる。式(2)より観測点を自動抽出し、図2の補間値を求めた。観測点を通っていることが判る。また式(2)は表1より計算できる。近傍の4点抽出は各自で考えていただきたい。近傍は距離で判断するが、2点目を抽出する際に、既存抽出点を対象から除く処理には、少し工夫を要する。

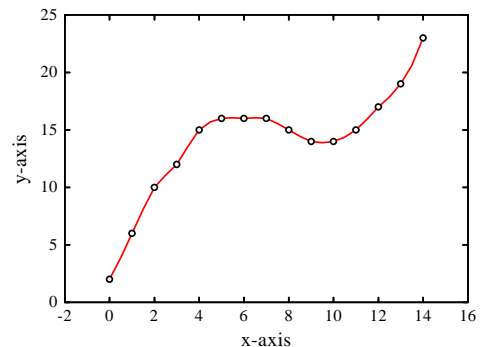


図2 ラグランジュ補間

## 3. スプライン補間

3次スプライン補間については、過去に同様の処理をしており、今回は図1の観測点に適用するのみであった。

詳細は、Web<sup>1),2)</sup>を参照されたい。

$$S_j(x) = a_j + b_j(x - x_j) + c_j(x - x_j)^2 + d_j(x - x_j)^3 \quad (3)$$

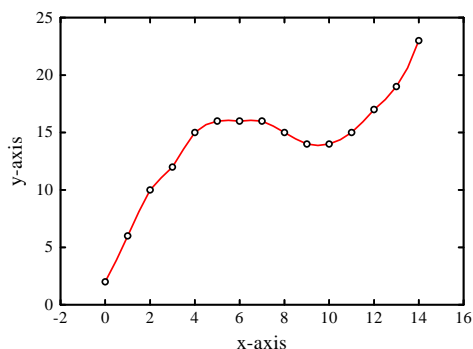


図3 スプライン補間

表1 ラグランジュ補間式

YP=0.
DO 20 K=1,JIS
S1=1.
S2=1.
DO 30 J=1,JIS
IF(K.EQ.J) GOTO 30
S1=S1*(XP -ZX(J))
S2=S2*(ZX(K)-ZX(J))
30 CONTINUE
YP=YP+S1*ZY(K)/S2
20 CONTINUE

図4はスプライン補間(赤線)とラグランジュ補間(青線)の比較である。線が重なっており、ほぼ同じ補間結果になっていることが窺える。

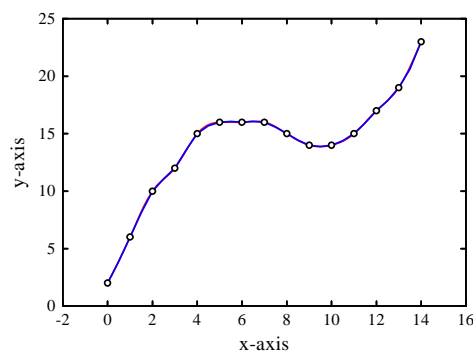


図4 ラグランジュとスプラインの比較

#### 4. 多項式回帰

3次の多項式(1)に最小二乗法を適用すると、連立方程式は次式になる。ここで  $n$  は回帰に用いる観測点の数であり、 $\Sigma$  は観測点の数だけ積分する。

$$\begin{bmatrix} n & \sum x_k & \sum x_k^2 & \sum x_k^3 \\ \sum x_k & \sum x_k^2 & \sum x_k^3 & \sum x_k^4 \\ \sum x_k^2 & \sum x_k^3 & \sum x_k^4 & \sum x_k^5 \\ \sum x_k^3 & \sum x_k^4 & \sum x_k^5 & \sum x_k^6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum y_k \\ \sum x_k y_k \\ \sum x_k^2 y_k \\ \sum x_k^3 y_k \end{bmatrix}$$

(4)

これを `gauss` の消去法で解くことで、係数  $a_i$  を求める。図5は計算結果を図示したものであるが、回帰の場合は必ずしも観測点を通らない。また、次数  $n$  を増やせば精度は上がる。(  $n$  次に対応)

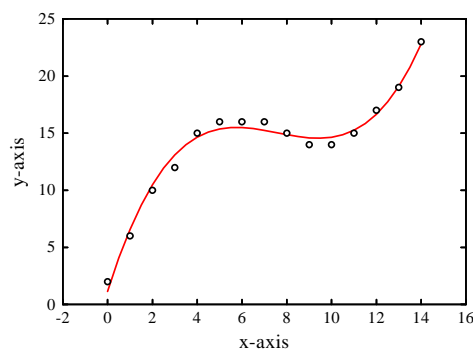


図5 3次多項式

#### 5. 重回帰による適用

式(1)について、重回帰分析<sup>1)</sup>を適用した。同じ最小二乗法であるため、係数  $a_i$  は全く同じで、図化すると当然図5と重なり、解の検証ができた。

分析結果を表2にまとめてみた。決定係数が0.986となり、非常に高い相関性を示している。

表2 重回帰分析結果

#### 6. 最後に

今回は、社会環境工学科における4年生のプログラミング演習の一つとして、補間と回帰の演習課題があったので過去の経験をもとに分析したに過ぎない。

この比較・検討した結果が、皆さまの参考になれば幸いである。

#### 【参考文献】

- 1) <http://www.civil.kumamoto-u.ac.jp/matsu/manual.htm>
- 2) <http://next1.cc.it-hiroshima.ac.jp/MULTIMEDIA/numeanal1/node16.html>

***** 積和 *****			
0.329800e+04	0.173400e+04	0.176300e+05	0.198396e+06
0.173400e+04	0.101500e+04	0.110250e+05	0.127687e+06
0.176300e+05	0.110250e+05	0.127687e+06	0.153983e+07
0.198396e+06	0.127687e+06	0.153983e+07	0.190923e+08
----- 和 -----			
0.210000e+03	0.105000e+03	0.101500e+04	0.110250e+05
***** 偏差積和 *****			
0.358000e+03	0.264000e+03	0.342000e+04	0.440460e+05
0.264000e+03	0.280000e+03	0.392000e+04	0.505120e+05
0.342000e+04	0.392000e+04	0.590053e+05	0.793800e+06
0.440460e+05	0.505120e+05	0.793800e+06	0.109889e+08
***** X 転置 X *****			
0.280000e+03	0.392000e+04	0.505120e+05	
0.392000e+04	0.590053e+05	0.793800e+06	
0.505120e+05	0.793800e+06	0.109889e+08	
***** 逆(X 転置 X) *****			
0.276366e+00	-0.450392e-01	0.198312e-02	
-0.450392e-01	0.794096e-02	-0.366598e-03	
0.198312e-02	-0.366598e-03	0.174570e-04	
***** X 転置 Y *****			
0.264000e+03	0.342000e+04	0.440460e+05	
===== 偏相関係数 =====			
0.114537e+01	0.627491e+01	-0.879432e+00	0.386919e-01
-----			
<< 決定係数 (寄与率) >> 0.986			
<< 重相関係数 >> 0.993			