熊本大学教育学部紀要,
第62号, 289－297, 2013

# 課題探究として証明することに関する実践的研究

佐　々　祐　之

# Action Research on Explorative Proving

Hiroyuki Sasa

（Received October 1, 2013）

The purpose of this research is to develop the curriculum of middle school for learning about proof as an explorative proving, and to verify the educational effect. This research is advanced in the Miyazaaki's reserch project (Miyazaki, Fujita, 2013).

In this paper, I explained the framework of this research first. The learning about proof consists of two viewpoints of a planning and constructing of proof. The fundamental framework of this research is that students develop these two viewpoints, the planning and the constructing of proof, by turns.

After explanation of the framework of research, I designed the specific lesson of an algebraic proof as an explorative proving, and analyzed and reported the practiced result. As a result, I got some suggestion about the design of a lesson which can be used for future research.

**Key words :** explorative prooving, algebraic proof,

## 1. 本研究の目的

平成 20 年 3 月に中学校学習指導要領が改訂されてから 5 年が経過し，各学校段階において，新しい学習指導要領に基づく教育課程が定着しつつある．今回の学習指導要領の改訂では，算数的活動・数学的活動が，基礎的・基本的な知識・技能を確実な定着，数学的な思考力・表現力の育成，算数・数学を学ぶことの楽しさや意義を実感のために重要な役割を果たすものと捉えられており，これまで以上に数学的活動を充実させることが求められているといえよう．

証明に関する学習は，これまでも中学校数学科のカリキュラムにおいて重視されてきた内容であり，今回の学習指導要領の改訂においてもその位置づけは変わっていない．しかし，これまでの証明に関する学習活動を振り返ってみると，時代背景に応じて常に改善が重ねられてきたとはいえ，十分な成果を上げているとは言えない状況にある．例えば，国立教育政策研究所によって行われている全国学力学習状況調査の結果を見ると，数学 B（活用に関する問題）の数や図形の性質を証明する問題に対しては，どの年度も正答率は概ね 4 割前後となっており，証明することに関して十分な学習内容の定着がなされているとは言えないだろう．

このような現状の要因は様々考えられるが，ともすれば，中学校における証明の学習自体が，多くの生徒にとって，通過儀礼的になってしまっており，目的や状況に応じて何をどのように証明すればよいのかについて主体的に思考・判断・表現することが疎かにされているということも考えられる．つまり，中学校における証明の学習指導が，証明を通して数学的に推論する力を身に付けるための学習活動とはなっておらず，証明の書き方の学習にとどまっているということが懸念されるのである．本来，証明に関する学習指導では，帰納的推論や類比的推論を用いて数学的な性質や法則を見出し，それが一般的に成り立つことを証明するために構想を立て，構想に従って証明を構成するとともに，証明を振り返って評価・改善・発展させていくという一連の学習プロセスを通して数学的に推論する力を高めるために行われるものであり，知識としての数学ではなく活動としての数学を具現化することを目的として行われるべきものであろう．

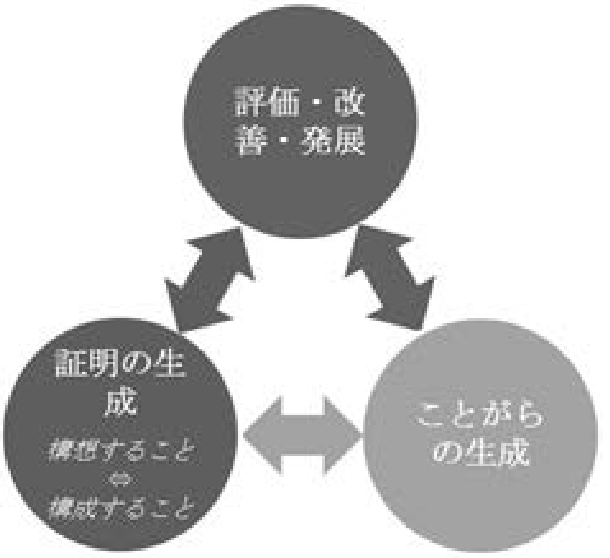
このような問題意識のもと，宮崎を研究代表とする「課題探究として証明することのカリキュラム開発」のプロジェクトでは，中学校段階における証明の学習を総合的に捉え，形式的な証明の書き方に終始する証明の学習ではなく，課題探究として証明の学習指導を展開するためのカリキュラムの開発を目指している（宮崎，藤田，2013）．このプロジェクトでは，中学校の 3 年間を通した数学科の学習指導の中で，証明を構想・構成し評価・改善・発展させていくためのカリ

キュラムの枠組みを構築するだけではなく，具体的な授業を構想し，実践を通して効果を検証することを通してより実効性の高いカリキュラムの構築を目指している．

本研究の目的は，このプロジェクトの一環として，中学校第2学年の領域「数と式」における「文字を用いた説明」の単元における課題探究としての証明の授業を構想し，実験授業を通してその効果を分析することである．現段階ではカリキュラムの枠組みや授業構成の方法などについて議論が進行中であるため，試行的な授業の構想とその実践ではあるが，今後のカリキュラム開発のための基礎的研究として，中学校における代数的証明に関してデザインした授業とその実践の分析の結果を報告するものである．

## 2. 課題探究として証明することのカリキュラムの枠組み

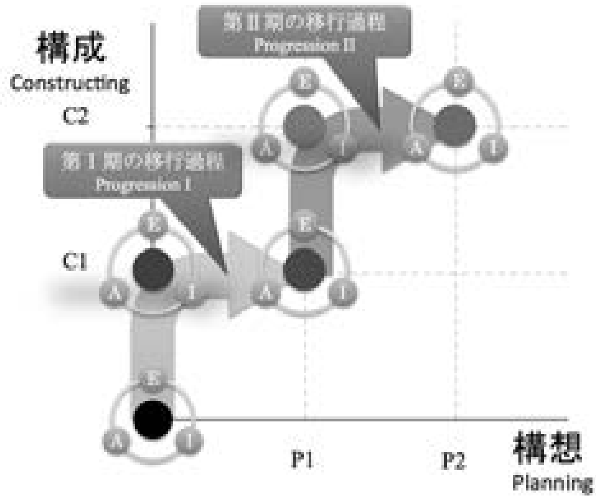
「課題探究として証明することのカリキュラム開発」のプロジェクトでは，カリキュラム開発の基本的な枠組みとして，証明することにみられる「ことがらの生成」「証明の生成（構想／構成）」「評価・改善・発展」という3つの側面とそれらの間の相互作用を課題探究として証明することとして捉えている（図1，Chino et al., 2010）．




（図1：課題探究として証明すること）

これは，課題探究としての証明という学習活動を構想するに当たっては，生徒が構成する証明というプロダクトの質を高めるための学習活動だけではなく，証明すべき事柄を帰納的・類比的に推論するプロセスや，出来上がった証明を振り返ってよりよい証明に改善したり，そこから新たな性質や法則を発見して内容を発展させたりするプロセスも含めて考える必要があることを意味している．

また，このような枠組みのもとでの課題探究として証明することを中学校3年間を通したカリキュラムとして具体化していくために，証明の生成に関して図2に示すように，「証明の構想」と「証明の構成」という2つの視点から学習レベルと設定し，それらの学習レベルの移行と，各段階における「評価・改善・発展」の学習活動をカリキュラムの基本的な流れとして想定している．




（図2：学習レベルの設定）

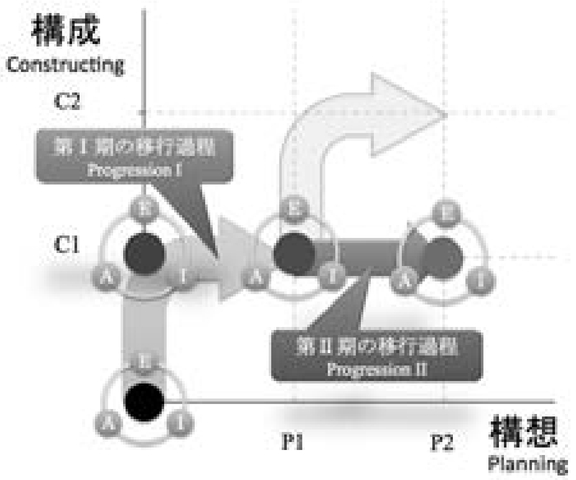
図2では，横軸を「証明の構想」，縦軸を「証明の構成」とし，それぞれにおいて2つの学習レベルを設定している．まず，「証明の構想（Planning）」に関する学習レベルとしては，前提と結論を結びつけるための着想，必要となる対象と方法を捉えるレベル（P1）と，前提と結論を結びつけるために双方から中間命題の関係網を拡充するレベル（P2）とが設定されている．また，「証明の構成（Constructing）」に関する学習レベルとしては，前提と結論の間に命題の演繹的な連鎖を形づくり表現するレベル（C1）と，演繹的な推論を普遍例化と仮言三段論法に分化して前提と結論の間に命題の演繹的な連鎖を形づくり表現するレベル（C2）とが設定されている．これらの２つの視点からの学習レベルに，証明の構想と構成とが未分化である状態（O）を設定するとそれらの組み合わせによって，（O）（C1）（C2）（P1）（P2）（P1，C1）（P1，C2）（P2，C1）（P2，C2）という9つの学習レベルが想定できることになる．

しかし，中学校3年間を通したカリキュラムを構想する場合，これら9つの学習レベルがすべて想定されるわけではない．証明を構想することと構成すること

のレベルが交互に上げていくことを考えるならば，（O）から（P1，C1）を経由して（P2，C2）へと学習レベルが上がることが想定される．また，（O）から（P1，C1）への移行過程においても，前提と結論を結びつける（C1）のレベルを経由せずに，それに必要とされる対象と方法を考察する（P1）のレベルへ至ることはできないため，移行過程としては，（O）から（C1）を経由して（P1，C1）へと移行することになる．（P1，C1）から（P2，C2）への移行過程に関しても，演繹的推論が普遍例化と仮言三段論法に分化する（C2）のレベルを経由せずに，解析的思考において必要条件と十分条件を区別する必要がある（P2）のレベルへ至ることはできないため，移行過程としては，（P1，C1）から（P1，C2）を経由して（P2，C2）へと移行することになる．図 2 では，（O）から（P1，C1）までを第Ⅰ期の移行過程とし，（P1，C1）から（P2，C2）までを第Ⅱ期の移行過程として示している．

また，評価・改善・発展に関しては，それぞれの学習レベルにおいて意図されるため，図中ではそれぞれ（E）：Examining，（I）：Improving，（A）：Advancing という記号で表されている．

上記の枠組みは，主に領域「図形」における証明の生成を想定したものであるが，領域「数と式」における証明の生成，つまり代数的証明の生成については，演繹的な推論を普遍例化と仮言三段論法に分化する（C2）レベルが中学校数学科において必ずしも求められていないため，（C2）レベルへの移行を想定しない図 3 のようなモデルを準用することとなる．




（図 3：領域「数と式」における学習レベルの設定）

### 3. 第 2 学年の領域「数と式」における授業の構想

ここでは，本研究で構想した授業のカリキュラムの枠気味での位置づけ，および具体的な授業の流れについて示す．

#### 1）カリキュラムの枠組みにおける授業の位置づけ

本研究では，「課題探究として証明することのカリキュラム開発」のプロジェクトで設定されたカリキュラムの枠組みをもとに，中学校第 2 学年の領域「数と式」における「文字を用いた説明」の単元における授業を構想し実証的研究を行った．中学校学習指導要領解説数学編では，第 2 学年の領域「数と式」の項目として示されているもののうち，「c. 文字を用いた式でとらえ説明できること」「d. 目的に応じた式の変形」の 2 つを証明することが考察の対象や方法として位置づけられていると考えられる．そこで，これらの項目を一つとして，前述の学習レベルにおける（P1，C1）から（P2，C1）への移行および，（P2，C1）における評価・改善・発展（EIA）が意図される授業を構想した．

題材は「連続する自然数の和について成り立つ性質」で 2 単位時間の授業を構想した．連続する 3 つの自然数の和について成り立つ性質を予想し，それが成り立つ理由を説明する中で，式の意図的な変形の仕方について，結論を示すためによりよく表現したり，文字の用い方を工夫したりするなどして証明することを評価・改善していくことを意図した．また，連続する 5 つの自然数の和について発展的に考察することを通して，連続する自然数の和に共通する性質を統合的に見いだす活動も取り入れている．

#### 2）授業の流れ

構想した 2 単位時間分の授業の流れは，以下のようなものである．

**①連続する 3 つの自然数の和について成り立つ性質を予想する．**

連続する 3 つの自然数の和について，どのような性質があるかを帰納的に予想し，「連続する 3 つの自然数の和は 3 の倍数になる．」という予想を立てる．

**②予想した性質が成り立つ子をと証明するための構想を立てる．**

予想した性質が，どんな連続した 3 つの自然数の場合にも成り立つことを示すためにはどのようにすればよいかを考える．その際，「連続する 3 つの自然数は，一般にどのように表されるのか.」という教師の発問により，「連続する 3 つの自然数を文字を用いて表し，

それらの和を計算してみる.」という証明の構想を立てる.

③予想した性質の証明し，それを振り返っての評価・改善する.

②で立てた証明の構想をもとに以下のように証明を書く.

> 連続する 3 つの自然数のうち，最も小さいものを n とすると，連続する 3 つの自然数は，n，n+1，n+2 と表される.
> したがって，連続する 3 つの自然数の和は，
> $n + (n + 1) + (n + 2) = 3n + 3$

ここで，3 つの連続する自然数の和を計算した結果の $3n + 3$ がどのようなことを意味しているかを考え，3 の倍数であるという結論を示すためには，3 ×（自然数）という形に表現したほうがよいことに気づき，証明を修正する．その際，計算結果の 3（n + 1）における（n + 1）が連続する 3 つの自然数の真ん中の数であることから，連続する 3 つの自然数の和が 3 の倍数であるというだけではなく，連続する 3 つの自然数の真ん中の数の 3 倍になっているということにも気づき，命題の見方を変更する．この段階で，教師は，計算式で終わることなく証明された事柄を結論として記述することなど，証明の記述の仕方に関する指導を行い，以下のように証明を完成させる.

> 連続する 3 つの自然数のうち，最も小さいものを n とすると，連続する 3 つの自然数は，n，n+1，n+2 と表される.
> したがって，連続する 3 つの自然数の和は，
> $n + (n + 1) + (n + 2)$
> $= 3n + 3$
> $= 3(n+1)$
> ここで $n + 1$ は連続する 3 つの自然数の真ん中の数なので，$3(n + 1)$ は真ん中の数の 3 倍である.
> したがって，連続する 3 つの自然数の和は，真ん中の数の 3 倍になる.

④証明の構想及び構成を修正する.

教師が「真ん中の数の 3 倍であることをより簡潔な式で表すことができないか.」という発問によって，「連続する 3 つの自然数の表し方を，n − 1，n，n + 1 とする.」というアイデアを引き出し，以下のように証明を修正する.

> 連続する 3 つの自然数のうち，真ん中の数を n とすると，連続する 3 つの自然数は，n − 1，n，n+1 と表される.
> したがって，連続する 3 つの自然数の和は，
> $(n - 1) + n + (n + 1) = 3n$
> ここで n は連続する 3 つの自然数の真ん中の数なので，3n は真ん中の数の 3 倍である.
> したがって，連続する 3 つの自然数の和は，真ん中の数の 3 倍になる.

⑤関連の発展課題に取り組む

連続する 3 つの自然数の和に関する性質の関連問題として，連続する 5 つの自然数の和について成り立つ性質を考える.

まず，連続する 3 つの自然数の場合と同様に，帰納的に性質を予想し，「連続する 5 つの自然数の和は，真ん中の数の 5 倍になる.」という予想を立てる.

次に，連続する 3 つの自然数の和のときと同様に考えて，連続する 5 つの自然数を文字で表し，それらの和を計算するという証明の構想を立て，以下のように証明する.

> 連続する 5 つの自然数のうち，最も小さいものを n とすると，連続する 5 つの自然数は，n，n+1，n+2，n + 3，n + 4 と表される.
> したがって，連続する 5 つの自然数の和は，
> $n + (n + 1) + (n + 2) + (n + 3) + (n + 4)$
> $= 5n + 10$
> $= 5(n+2)$
> ここで $n + 2$ は連続する 5 つの自然数の真ん中の数なので，$5(n + 2)$ は真ん中の数の 5 倍である.
> したがって，連続する 5 つの自然数の和は，真ん中の数の 5 倍になる.

さらに，証明を振り返って，真ん中の数の 5 倍であることを示すためには，連続する 5 つの自然数の真ん中の数を n と置いたほうが分かりやすく表現できることに気づき，証明を修正する．その際，真ん中の数を n とすると，連続する 5 つの自然数が n − 2，n − 1，n，n + 1，n + 2 と表されることから，これらが自然数であるためには n の範囲は 3 以上でなければならないことにも気づき，証明に書き加える．なお，この時点で連続する 3 つの自然数の和に関する証明のときにも同様のことがいえるので，遡って証明に加筆する必要があることに気づき，以前の証明も合わせて修正する．ここで，n の範囲の制限については，連続する 3 つの自然数の和についての性質を証明する段階ですでに生徒が気づくことが予想されるが，その場合には，連続する 3 つの自然数の和についての証明の段階で n の範囲の制限について触れ，証明を修正することとする.

> 連続する 5 つの自然数のうち，真ん中の数を n とすると，連続する 5 つの自然数は，n − 2，n − 1，

n，n + 1，n + 2 と表される．（n は 3 以上の自然数）
したがって，連続する 3 つの自然数の和は，
$(n-2)+(n-1)+n+(n+1)+(n+2)=5n$
ここで n は連続する 5 つの自然数の真ん中の数のなので，5n は真ん中の数の 5 倍である．
したがって，連続する 5 つの自然数の和は，真ん中の数の 5 倍になる．

⑥さらに発展課題に取り組む

連続する 3 つの自然数，5 つの自然数の和について成り立つ性質を考察したことをもとに，さらに発展的な課題に取り組む．ここでは，連続する 4 つの自然数の和について成り立つ性質について考える．

これまでと同様に，連続する 4 つの自然数の和について成り立つ性質を帰納的に予想し，「連続する 4 つの自然数の和は，真ん中の 2 つの数の平均の 4 倍である．」という予想を立てる．このとき，偶数個の連続する自然数では奇数個の連続する自然数のときのように「真ん中の数」が存在しないため，予想に困難を感じる生徒も多いと思われるが，十分に時間をかけて性質を見つけさせることによって，連続する 4 つの自然数の和について成り立つ性質を予想させる．

連続する 4 つの自然数を文字で表してそれらの和を計算するという証明の方針を立て，証明を構成する．その際，連続する 4 つの自然数には真ん中の数が存在しないため，最も小さいものを n として証明を行う．

連続する 4 つの自然数のうち，最も小さいものを n とすると，連続する 4 つの自然数は，n，n + 1，n + 2，n + 3 と表される．
したがって，連続する 5 つの自然数の和は，
$n+(n+1)+(n+2)+(n+3)$
$=4n+6$

ここで，結論を示すためには，計算結果の 4n + 6 をどのように変形する必要があるかを考え，「真ん中の 2 つの数の平均の 4 倍」という結論を示すために，$4\times[\{(n+1)+(n+2)\}/2]$ という形に変形する必要があることに気づき，証明を最後まで完成させる．

連続する 4 つの自然数のうち，最も小さいものを n とすると，連続する 4 つの自然数は，n，n + 1，n + 2，n + 3 と表される．
したがって，連続する 5 つの自然数の和は，
$n+(n+1)+(n+2)+(n+3)$
$=4n+6$
$=4\times(n+3/2)$
$=4\times\{(2n+3)/2\}$
$=4\times[\{(n+1)+(n+2)\}/2]$
ここで，（n + 1），（n + 2）は，真ん中の 2 つの自然数なので，$4\times[\{(n+1)+(n+2)\}/2]$ は，真ん中の 2 つの自然数の平均の 4 倍である．
したがって，連続する 4 つの自然数の和は，真ん中の 2 数の平均の 4 倍になる．

この課題は，授業の進行状況によってはレポート課題として生徒各自に探究させることも考えられるが，さらなる発展的な要素を含むため，可能であれば授業時間内に扱いたい．

例えば，連続する 4 つの自然数の和が真ん中の 2 数の平均の 4 倍となることを証明した後に，連続する自然数の個数が奇数個の場合と偶数個の場合とを統合的に見て一般化するという学習活動が考えられる．場合分けによって「連続する n 個の自然数の和は，n が奇数のときは真ん中の数の数の n 倍，n が偶数のときは真ん中の 2 数の平均の n 倍になる．」というように統合することも考えられるが，最初と最後の数に着目して，「連続する n 個の自然数の和は，最初と最後の自然数の平均の n 倍になる．」もしくは，「最初と最後の自然数の和の n/2 倍になる．」などとすれば，連続する自然数の個数が奇数個，偶数個の場合によらず，1 つの命題として統合することができる．

## 4. 附属中学校における授業の実践と考察

ここでは，構想した授業を熊本大学教育学部附属中学校において実践した結果を分析し，報告する．

### 1）授業実践の概要

構想した授業の実践は，平成 25 年 6 月に，附属中学校第 2 学年の 2 クラスを対象として行った．対象クラス，実施時期の詳細については，以下の通りである．

【対象生徒】
附属中学校第 2 学年 1 組 39 名（男子 19 名, 女子 20 名）
附属中学校第 2 学年 3 組 38 名（男子 18 名, 女子 20 名）

【授業実施時期】
第 2 学年 1 組：1 時間目，平成 25 年 6 月 18 日（火）
2 時間目，平成 25 年 6 月 21 日（金）
第 2 学年 3 組：1 時間目，平成 25 年 6 月 19 日（水）
2 時間目，平成 25 年 6 月 20 日（木）

対象となった 2 クラスについては，熊本大学教育学部の附属中学校のクラスであるため，学力的には公立中学校よりもかなり高いレベルにある生徒が多かった．授業進度としては，すでに領域「数と式」の「文字を用いた説明」の単元を一通り学習し終えている時期ではあったが，この単元の学習時期がちょうど教育実習

期間となっていたため,「連続する自然数の和に関する性質」の題材についてはこの時点では扱わず，教育実習が終わってから本授業実践において初めて扱うこととした．とはいえ,「偶数と奇数の和」や「位の数を入れかえた2桁の数の和」などの題材は，教育実習期間中にすでに学習しており,「文字を用いた説明」に関する内容が全く初めてではなく，むしろ一通り学習し終えた後に復習として取り組むという形となった.

また，熊本大学教育学部附属中学校の数学科では，普段の数学の授業においてもレポート作成の学習活動を積極的に取り入れており，生徒は，学期に1度は学習した題材について，学習内容を振り返ってまとめたり，学習した内容を発展させたりしたことをレポートとしてまとめる経験をしている．そのため，今回の授業実践に合わせても，2単位時間の授業実践が終わった後に,「連続する自然数の和」に関するレポートの作成をお願いした.

今回の授業実践で授業を行った教師は，教師経験が20年近くあるベテランの教員で，普段の授業でも対象となった2クラスを担当しており，個々の生徒の学力レベルや性格等について十分把握している教師であった.

授業実施に当たっては，十分な時間を取ることができなかったため，授業実践の実施前に，前述した授業の流れをプリントとして示し，短時間で授業コンセプト等の説明を行った．その際，特に説明で重点を置いたのは，今回の授業実践の目的は，文字を用いた説明の場面において，ただ単に文字で表して計算するだけではなく,「証明の道筋を構想させる」ことを重視したいということ，また，証明して終わりとするのではなく,「証明したものを振り返ってよりよい証明に書き換えたり，発展させて新しい性質を見いだしたりする」場面を意図的に作り出したいということであった.

また，プリントとして示した授業の流れについては，生徒の実態を考慮せずに作成されたものであるため,「証明の道筋を構想する」「証明を振り返って修正したり発展させたりする」という2点を抑えた上で，生徒の実態に応じて適宜変更してもらってもよいことを伝えておいた.

授業実践を行った2クラス4時間については，全てビデオカメラで撮影し，それぞれの授業についてプロトコルを作成し，実際の授業場面と対比させながら分析を行った.

### 2）授業実践の分析から得られた示唆

授業実践と結果の分析を通して，今後の研究に向けていくつかの示唆を得ることができた．今回の授業実践で見られた特徴等をまとめ，考察を行う.

#### ①生徒の学力レベルと授業展開とのギャップ

まず，授業実践を分析して分かることは，対象となった附属中学校の生徒の学力レベルが高く,「文字を用いた説明」の単元についてもすでに学習済みであることなどから，証明の構想の段階がすでに生徒の中で暗黙のうちになされていて，それを授業で顕在化することが難しかったということである．例えば，最初に連続する3つの自然数の和について帰納的に予想し,「連続する3つの自然数の和は3の倍数になる」という予想を立てた後に，証明の方針として連続する3つの自然数を文字であらわしてみる場面において，ほとんどの生徒が連続する3つの自然数を，$n-1$，$n$，$n+1$と表現していた．これは，それらの和を計算した際に，最終的にどのような式になるかを予想した上で，最初の文字の置き方を考えているためであり，ある意味で証明の構想を生徒各自の中で行っているということに他ならない．それだけに，証明の構想のプロセスを授業において顕在化させることは難しかったといえよう.

実際の授業場面では，最初から連続する3つの自然数を$n-1$，$n$，$n+1$とおいてしまうと，計算結果のところで3×（自然数）という形に整理することの必要性を強調しにくくなるため，教師が機転を利かせて,「ある教科書の模範解答には次のように書かれていました.」という状況を設定し，連続する3つの自然数を$n$，$n+1$，$n+2$とおいてそれらの和を計算している証明を板書し，計算結果の$3n+3$をなぜ$3(n+1)$と書き換える必要があるのかを生徒に問うなどして，証明をよりよく修正する場面を作り出していた.

また，構想した授業のプランにおいては，連続する3つの自然数の和について，最初の段階では「3の倍数になる」という予想を立てて証明を行い，証明を振り返って「真ん中の数の3倍になる」ということに改めて気づくという流れを想定していたが，これについても附属中学校の生徒にとっては，証明を振り返って改めて気づくまでもなく，相当数の生徒が，予想の段階から「連続する3つの自然数の和は真ん中の数の3倍になる」という予想を立てていた．教師は，証明した後に命題を読み替えるというプロセスを踏みたかったために，あえて「連続する3つの自然数の和は3の倍数になる」という予想を取り上げて授業を展開したが，証明後に「3の倍数になる」という部分を「真ん中の数の3倍になる」と読み替える場面では，証明の中の計算の部分等については書き換える必要はなく，結論部分のみを修正すればよいことに気づいていた．つまり，計算結果の$3\times(n+1)$の部分を「真ん中の数の3倍」と読み取ることに困難を感じる生徒はい

なかったということである．

授業実践を行った2クラスとも同様の反応であったため，文字を用いた証明における計算結果の読み取りと命題の読み替えのプロセスについては，附属中学校の生徒の学力レベルからくる結果なのか，また，「文字を用いた説明」の単元が未習である生徒でも同様なのかということについては，今回の授業実践の分析からは判断ができなかった．公立中学校で数学指導に当たっている教師等にも聞き取りをしながら，授業プランの変更等を行う必要があると考えられる．

さらに，構想した授業プランでは，2単位時間の配分として，「連続する3つの自然数の和について成り立つ性質」の部分で，証明の構想（「文字で表現して計算する」という構想），振り返っての評価・改善（計算結果を「3×（自然数）」と表すこと」や結論を「真ん中の数の3倍」と読み替えること）で1単位時間，「連続する5つの自然数の和について成り立つ性質」に発展させて1単位時間と想定し，「連続する4つの自然数の和について成り立つ性質」については，レポート課題の扱いとするよう構想していたが，前述したように，証明の構想の段階が顕在化しにくかったことや，証明を振り返って結論を読み替える場面で困難を感じる生徒がいなかったことなどから，予想以上に速く授業が展開し，結果的には，「5つの連続する自然数の和について成り立つ性質」までを1単位時間で終え，2時間目は，「連続する4つの自然数の和について成り立つ性質」および，「連続する自然数の和について成り立つ性質を統合的に見ること」を扱うという展開となった．「文字を用いた説明」の単元が未習の生徒であれば，ここまで速い展開で授業を進めることは難しいと思われるが，授業構想のための予備的な授業実践としては，連続する自然数の個数が奇数個の場合と偶数個の場合を統合的に見る場面まで扱えたことは有益であった．

以上のように，今回の授業実践では，当初構想したような授業展開どおりには授業は進まなかったが，その要因としては，対象となった附属中学校の生徒の学力レベルが高かったことと，「文字を用いた説明」の単元の学習が一通り終わった後のタイミングでの授業実践だったことが考えられる．今後，授業プランを修正していく際には，標準的な学力レベルの生徒に対して数学指導を行っている教師の意見等も参考にしながら，生徒の実態を的確にとらえた授業展開としていく必要がある．

②条件変更による発展と命題の統合

①で考察したように，授業実践では当初構想したよりもかなり速いテンポで授業が展開していったため，授業プランでは課題レポートの扱いとして考えていた「連続する4つの自然数の和について成り立つ性質」の題材を，両クラスにおいて2時間目に扱うことができた．その結果，連続する自然数の個数が奇数個の場合と偶数個の場合の統合的な見方まで含めて，生徒の多様な発想を引き出すことができた．

まず，「連続する4つの自然数について成り立つ性質」について，連続する3つの自然数の場合と同様に，帰納的に予想している段階で，生徒からは様々な気づきが挙げられた．最も多かったのは「連続する4つの自然数の和は，2番目と3番目の和の2倍になる」というものであった．前時の連続する3つの自然数の場合や連続する5つの自然数の場合を参考に，できるだけ類似した結論になるように考え出されたものであると言えよう．これ以外にも「連続する4つの自然数の和は，1番目と4番目の和の2倍になる」といったものや「連続する4つの自然数の和は，真ん中の2つの平均の4倍になる」など，連続する自然数の個数が奇数個の場合から発展的に考えた命題が予想されていた．連続する自然数の個数が奇数個の場合には，それらの連続する自然数の和が，（真ん中の数）×（連続する自然数の個数）と一般化されるが，連続する自然数の個数が偶数個の場合は，「真ん中の数」にあたる数がないため，生徒たちはどのように表現するかを考えていたようであるが，このような思考は，後半の「連続する自然数の和について成り立つ性質を統合的に見る」場面において有効に機能すると考えられる．

しかし，一方では全く別の観点から連続する4つの自然数の和について考察したものもあり，ある生徒は，「連続する4つの自然数の和は，3番目と4番目の積から，1番目と2番目の積を引いた差になっている」という予想を立てていた．授業記録からは，この生徒が帰納的にこのような予想をしたのか，また，連続する4つの自然数を文字で置いたものをさまざまに計算操作してこのような発想に至ったのかは分からなかったが，実際に証明するとなると，連続する4つの自然数を$n$，$n+1$，$n+2$，$n+3$とおいた上で，$(n+2)(n+3)-n(n+1)$という式計算をする必要が出てくるため，内容的には中学校第3学年での学習内容ということになり，中学校第2学年の内容として扱うことは難しいであろう．しかし，「連続する自然数の和について成り立つ性質」という題材が，中学校第2学年，第3学年を通して扱うことのできる内容豊かな題材であるということが示されたと言えよう．

また，一方のクラスの2時間目の後半では，「連続する4つの自然数の和について成り立つ性質」について証明したのち，「連続する自然数の個数が$n$個のとき，どのような性質が成り立つか．」という課題に取り組んだ．つまり，連続する自然数の個数が奇数個の

場合と偶数個の場合を統合的に見ることができないかを探る授業である．

この場面では，初め，多くの生徒が「n が奇数の場合は，連続する n 個の自然数の和は，真ん中の数の n 倍になり，n が偶数個の場合は，連続する n 個の自然数の和は，真ん中の 2 つの数の平均の n 倍になる．」というように，場合分けを用いた表現によって統合しようとしていた．

しかし，グループでの議論の時間を経た後，ある生徒は，「連続する n 個の自然数の和は，n 個の自然数の中央値の n 倍になる．」という表現で，連続する自然数の個数が奇数個の場合と偶数個の場合を統合した．「中央値」は，第 1 学年の領域「資料の活用」における学習内容であり，実際に教科書では「資料の個数が奇数の場合は，真ん中の数が中央値です．資料の個数が偶数個の場合は，中央に並ぶ 2 つの値の平均をとって中央値とします．」と定義されている．生徒は，「中央値」という概念を連続する自然数の和について成り立つ性質の場面に用いれば，場合分けの必要なしに，連続する自然数の和について成り立つ性質を統合的に表現することができると考えたのである．連続する n 個の自然数を，資料の活用でいうところの資料としてみるかどうかは議論の分かれるところであろうが，既習の数学の知識を積極的に活用しようとした生徒の発想は，授業で取り上げるべき価値のあるものであろう．

この場面は，ある意味で「課題探究として証明すること」の想定する範囲を超えるものであるかもしれない．なぜなら，「課題探究として証明すること」では，「ことがらの生成」「証明の生成」「評価・改善・発展」という 3 つの側面とそれらの間の相互作用をも含めて，学習活動を広くとらえているが，ここでいう「評価・改善・発展」における「発展」とは，あくまで証明を振り返ってそこから見えてくる新たな性質の発見であったり，新たな証明へのアイデアの発見であったりするものであり，この場面で見られたような，「条件変更に伴う新たな性質の発見」という意味での発展は含まれていない．しかし，ある課題を解決した後に，条件と変更して発展的に考えたり，一般化したりするプロセスが，課題探究の基本的な姿勢であることを考えるならば，「発展」自体が「証明の振り返り」の場面に限定される必要はなく，むしろ，今回のような「物事を統合的に見る」などの場面を通して，証明自体を作り変えていくような学習活動の展開も視野に入れておく必要があるだろう．今回の授業実践において見られたこのような学習活動の展開は，今後，「課題探究として証明すること」の射程を再考するうえで大きな材料になると考えられる．

③授業コンセプトの説明と教師の発問の質

今回の授業実践では，附属中学校の教師に授業を依頼し実践してもらったが，授業のコンセプト等の説明に十分な時間をとることができなかったことは大きな反省点である．本稿の前半で説明した「課題探究として証明すること」の基本的な枠組みや，証明の学習における学習レベルの設定とその移行過程，評価・改善・発展の捉え方などは，短時間の説明では理解することは難しい．それゆえに，それらの理解が十分でないまま今回の授業実践を行った結果，証明の構想や構成，振り返りの場面などにおいて，授業の意図が十分に伝わっておらず，授業者自身が苦労する結果となった場面も多かった．

しかし，そのような状況での授業実践であったが，それによって今後の授業構想において重視しなければならない点等が明らかになってきた部分もある．例えば，証明の構想や構成を行う場面においては，教師の発問の質を変えていかなければならないということである．今回の授業実践の対象となった附属中学校のように生徒の学力レベルが高い場合は特に，発問し生徒が答えたことに対してその理由を詳細に説明させる部分が省略される傾向にある．これは，答えた生徒の発言に対して，ほとんどの生徒がその意味を理解できてしまうために，理由の詳細な説明を求めていると，授業自体の雰囲気が停滞してくるためである．多くの生徒が理解できている状況では，ある程度のテンポで授業を進めていくほうが，生徒にとってもストレスがないため，教師はあえて基本的なことの理由を問おうとはせず，授業が進んでしまう傾向にあると言えよう．

今回の授業実践でも，例えば，「連続する 3 つの自然数の和が 3 の倍数になる」ことを証明する構想を立てる段階で，生徒が連続する自然数を「n，n + 1，n + 2」とおいて計算するというアイデアを発言したとき，「なぜそのようにしようと思ったのか？」「連続する自然数はなぜそのように表すことができるのか？」などの発問を教師は行わなかった．もちろん，事前の打ち合わせでこのような発問を意図的に行ってもらうようには説明していなかったので，授業実践を行った教師は，これらの発問に対しては，ほとんどの生徒が理解しているために，改めて授業の場で取り上げる必要はないと判断して発問をしなかったのである．しかし実践を終えて気づいたことではあるが，証明の構想や構成ということを念頭に置いた授業展開を考えるならば，一見，当たり前に思えることを，あえて発問して理由を述べさせるような活動は重要な意味を持ってくる．今回の「課題探究として証明すること」のねらいが，証明を構想したり構成したりするプロセスを顕在化させ，証明することに主体的に取り組むことを含

むことを考えれば，証明の構想や構成のプロセスにおける教師の発問の質を変化させていくことは必要不可欠な作業であろう．その意味でも，今後の授業実践においては，「課題探究として証明すること」のコンセプトを実際の授業を行う教師と共通理解した上で，授業を実践していくこと，また，授業プラン事態を組み立てていく段階から協働的に取り組んでいくことが必要であると言える．

## 5. 本研究のまとめと今後の課題

本研究では，宮崎を代表とする「課題探究として証明することのカリキュラム開発」のプロジェクトの一環として，中学校第 2 学年の領域「数と式」における代数的証明の学習に関して，「連続する自然数の和について成り立つ性質」を題材とした授業を構想し，これを実践した結果を分析し報告した．

授業実践を行った附属中学校の生徒の学力レベルが高かったことや「文字を用いた説明」について既習の状態での授業実践だったこともあり，十分な検証を行えたわけではないが，今後の授業プランの修正等に向けていくつかの示唆を得ることができた．

特に，本研究の枠組みにおける「評価・改善・発展」問う学習活動の「発展」については，単に証明を振り返って発展させる側面に限らず，条件変更によって発展的に考えるという場面も考慮に入れていく必要があることや，今回の授業実践において扱った「連続する自然数の和について成り立つ性質」については，「連続する自然数の個数が奇数個の場合と偶数個の場合を統合的に見る」という統合の場面としての扱いが可能であること，また，中学校第 3 学年の内容にまでわたって発展的に学習できる題材であることなど，教材の質について考察を深めることができた．

また，「課題探究として証明すること」に関する授業を構想するためには，授業の構想段階から現場教師との連携を密にとりながら，学習活動の具体化を行っていく必要があることなども今回の授業実践を通してより明らかになったと言えよう．

今後は，今回の授業実践で得られた示唆をもとに，中学校第 2 学年の領域「数と式」における代数的証明の分野において，「課題探究として証明すること」の学習活動を具体化していくこととなるが，附属中学校での授業実践をベースとして，標準的な学力レベルの公立中学校を想定した授業プランを策定し，効果を検証していくことが課題であろう．そのために，今回，授業実践をお願いした附属中学校の教師と公立中学校で数学科の学習指導に当たっている教師にも協力を要請し，「連続する自然数の和に関して成り立つ性質」を題材とした授業プランの構想を具体化していきたい．また，中学校第 2 学年に限定せず，中学校第 1 学年から第 3 学年を通してどのような学習活動が展開可能であるのか，また，「課題探究として証明すること」の学習レベルやその移行を領域「数と式」における代数的証明の学習においてどのように具体化していくのか，ということについても考察していく必要がある．これらの点については，今後の課題とし，研究を進めていきたい．

## 謝辞

本研究における授業実践では，熊本大学教育学部附属中学校の日方和光先生をはじめ，2 年 1 組，2 年 3 組の生徒の皆さんに多大なご協力をいただきました．この場を借りて心より感謝申し上げます．

## 付記

本研究は，平成 24 ～ 27 年度科学研究費補助金（基盤研究 B，研究代表：宮崎樹夫，課題番号：23330255）による研究である．

## 参考文献

1）文部科学省（2008）：中学校学習指導要領解説　数学編，教育出版．
2）国立教育政策研究所教育課程センター（2007 ～ 2013）：平成 19 年度～平成 25 年度　全国学力・学習状況調査　解説資料　中学校　数学．
3）文部科学省・国立教育政策研究所（2008 ～ 2013）：平成 19 年度～平成 25 年度　全国学力・学習状況調査【中学校】報告書．
4）宮崎樹夫，藤田太郎（2013）：課題探究として証明することのカリキュラム開発　～我が国の中学校数学科における必要性とこれまでの成果～，日本数学教育学会第 1 回春期研究大会論文集，pp1-8.
5）Chino, K., Fujita, T., Komatsu, K., Makino, T., Miyakawa,T., Miyazaki, M., Tsujiyama, Y.（2010）. An assessment framework for students' abilities/competencies in proving. Proceedings of EARCOME5（Vol. 2, pp.416-423）. Tsukuba: Inamoto Printig Co. Ltd.
6）宮崎樹夫，佐々祐之，辻山洋介（2013）：課題探究として証明することのカリキュラム開発　～中学校第二学年数学科の領域「数と式」及び「図形」における学習の構想～，日本数学教育学会第 1 回春期研究大会論文集，pp17−24.
7）岡本和夫ほか：未来へひろがる数学 2，啓林館，2012 年.