熊本大学教育学部紀要
第64号, 311－316, 2015

幾何学の発見的学習に関するいくつかの考察

伊藤　仁一[*]・中尾　温[†]

Some Studies of Heuristic Learning of Geometry

Jin-ichi Itoh and Atsushi Nakao

（Received October 1, 2015）

In this paper we show three learning materials (examples) of the heuristic learning as one of the active leaning, which we did with an undergraduate student (second author). The first is some extension of the barycenter (or several centers) of triangles (originally H. Hamanaka). The second is also one of the trials to make the power of point with respect to quadratic curves instead of circles (inspired from H. Nakazato's work with respect to parabolas). The third is heuristic learning by using ICT, for example, rediscovering of Hervey's point, Steiner's circle and Lambert's thoerem, and perhaps new theorems about circumcenters of triangles made by tangents lines of a parabola. Finally we discuss on the meaning or problems of heuristic learning for undergraduate students.

Key words : heuristic learning, left (right) barycenter of triangle, power point of quadratics, Hervey's point

1　はじめに

新しい学びのスタイルとして，アクティブ・ラーニングの必要性が最近いろいろなところで聞かれる．ここでは，アクティブ・ラーニングの一例として，教育学部の学部生 (セカンドオーサー）と幾何の題材について，私が関わった発見的学習の事例を３つ紹介する．

１つ目は，三角形の中心として少し変則的なものを探そうとする試みで，兵庫教育大学で濱中裕明氏が始めたものと聞いている．２つ目は，方べきの定理として円に関する結果として知られているものを２次曲線に関しても拡張してみようという試みで，中里仁謙氏の放物線の方べきの定理に刺激されてたものである．３つ目は，最近はやりの ICT を用いての発見的学習として， Hervey 点の再発見に関わるもので，発見に至った経緯や関連する知られていないであろう結果，放物線の接線によってできるいくつかの三角形の外心の配置について報告する．

最後に大学生に対しての発見的学習の意味や問題点について考察する．

2　三角形の重心 (および中心) のある種の拡張

三角形の１頂点から対辺に中線を下ろし，その中線の足を P_1 とおくと，もとの三角形は中線を挟んだ左右２つの三角形に分割することができる．ここで，左右どちらかの三角形を選び，P_1 から対辺に中線を下ろし，その中線の足を P_2 とおく．これを繰り返していくと，P_k は三角形内のある１点に収束する．

定義 1. 三角形 ABC について，まず点 A から対辺に中線を下ろし，その後常に左側の三角形の対辺に中線を下ろし続

* 熊本大学教育学部数学教室　j-itoh@kumamoto-u.ac.jp
† 熊本大学教育学部

けた場合の収束点を，点 A に対する**左重心**と呼ぶ．常に右側の三角形を選んだ場合は，**右重心**と呼ぶ．

定理 1. O$(0,0)$,A(a,b),B(c,d) からなる三角形 OAB の O に対する左重心は $(\frac{2a+c}{5},\frac{2b+d}{5})$．ただし，O，A，B はこの順番で三角形の内点を中心に反時計回りに並んでいるものとする．

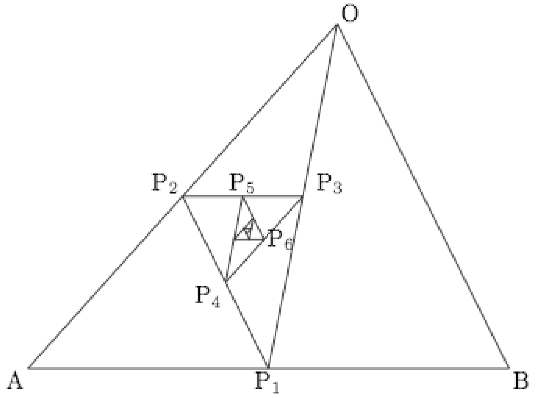

図 1　O に対する左重心

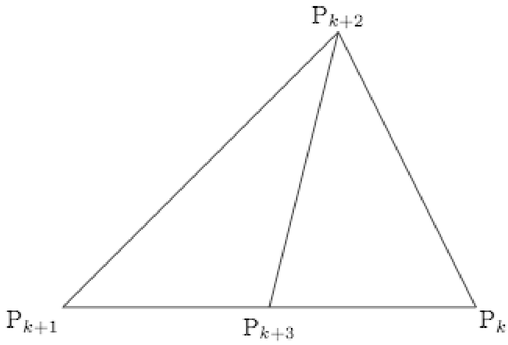

図 2　P_k，P_{k+1}，P_{k+2}，P_{k+3} の並び

Proof. k 番目の中線の足を $\mathrm{P}_k(x_k,y_k)$ とおく．

P_k,P_{k+1},P_{k+2},P_{k+3} の位置関係は図 2 の通りであるため，以下の漸化式が成り立つ．

$$2x_{k+3}-x_{k+1}-x_k=0,\ x_1=\frac{a+c}{2},\ x_2=\frac{a}{2},\ x_3=\frac{a+c}{4}$$

これを解くと，

$$x_k=\frac{2^{k+2}-(2+i)(-1-i)^k-(2-i)(-1+i)^k}{5\cdot 2^{k+1}}a+\frac{2^{k+1}-(1-2i)(-1-i)^k-(1+2i)(-1+i)^k}{5\cdot 2^{k+1}}c$$

であり，

$$\lim_{k\to\infty}x_k=\frac{2a+c}{5}$$

となる．よって，△OAB の O に対する左重心の x 座標は $\frac{2a+c}{5}$ となる．y 座標についても同様に導ける．　□

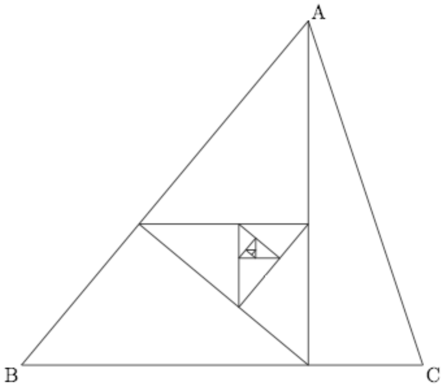

図 3　A に対する左垂心

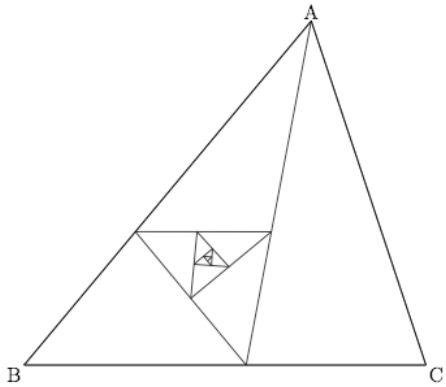

図 4　A に対する左内心

この左 (右) 重心の他に，中線でなく垂線を引くことで得られる**左 (右) 垂心**（図 3）や，角の 2 等分線を引くことで得られる**左 (右) 内心**（図 4）についても考えることができる．当然，頂点から対辺に何らかの意味のある 3 直線が一点で交わるというタイプのものはすべて可能であると思われる．例えば，Nagel 点や Gergonne 点等である．

更に，外心についても，３直線が三角形を作るものとし新たな垂直２等分線の左右どちらの直線を選ぶかで３角形を決めることとすれば定義はできそうであるが，収束するかどうかは問題となるであろう．

3　方べきの定理の２次曲線への拡張の試み

以下の定理を東京出版の中里仁謙氏から聞いた ([8]).

定理 2. 放物線 C と点 P をとり，点 P を通る直線 l と放物線 C の交点を Q，R とする．また，P，Q，R の準線への正射影を P'，Q'，R' とする，このとき，$\mathrm{P'Q'}\cdot\mathrm{P'R'}$ は l の傾きによらず一定である．

Proof. $\mathrm{C}_3 : y = ax^2$，$\mathrm{P}(x_0, y_0)$，l の傾きを m として示す．

C と $l : y = m(x - x_0) + y_0$ の交点 Q，R の x 座標 q，$r(q < r)$ は，計算により，

$$q = \frac{m - \sqrt{m^2 - 4a(mx_0 - y_0)}}{2a}\ , r = \frac{m + \sqrt{m^2 - 4a(mx_0 - y_0)}}{2a}$$

と表される．よって，

$$\begin{aligned}\mathrm{P'Q'}\cdot\mathrm{P'R'} &= |x_0 - q||x_0 - r| \\ &= \left|x_0^2 - \frac{m}{a}x_0 + \frac{4a(mx_0 - y_0)}{4a^2}\right| \\ &= \left|x_0^2 - \frac{y_0}{a}\right| : \mathrm{const}\end{aligned}$$

□

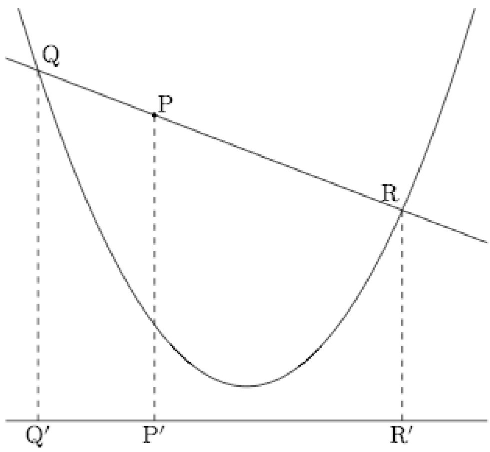

図５　放物線の方べきの定理（１）

放物線についてしか成立しないということもありうるが少し視点を変えれば一般の２次曲線すべてに成立するものを学生に考察してもらった．ヒントとして幾何学大辞典 ([6]) にあった，「有心円錐曲線において任意の P を通る弦を QR とし，中心 O を通りそれに平行な直径を AB とすれば，$\mathrm{PQ}\cdot\mathrm{PR}/\mathrm{OA}^2$ は QR の方向に関せず一定である.」という定理があることを教えたが，後は，学生自ら以下の様な定理を作り，証明するに至った．

定理 3. 楕円 C_1 と点 P，点 A をとり，点 P を通る直線 l と楕円 C_1 の交点を Q，R とする．また，点 A を通り l と平行な直線と楕円 C_1 の交点を B，C とする．このとき，$\dfrac{\mathrm{PQ}\cdot\mathrm{PR}}{\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC}}$ は l の傾きによらず一定である．

Proof. $\mathrm{C}_1 : \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$，$\mathrm{P}(x_1, y_1)$，$\mathrm{A}(x_2, y_2)$，$l$ の傾きを m として示す．

P，Q，R，A，B，C の x 軸への正射影を P'，Q'，R'，A'，B'，C' とすると，定理２と同様にして，

$$\mathrm{P'Q'}\cdot\mathrm{P'R'} = \left|\frac{b^2x_1^2 + a^2y_1^2 - a^2b^2}{a^2m^2 + b^2}\right|\ , \mathrm{A'B'}\cdot\mathrm{A'C'} = \left|\frac{b^2x_2^2 + a^2y_2^2 - a^2b^2}{a^2m^2 + b^2}\right|$$

が得られる．よって，

$$\frac{\mathrm{P'Q'}\cdot\mathrm{P'R'}}{\mathrm{A'B'}\cdot\mathrm{A'C'}}=\left|\frac{b^2x_1^2+a^2y_1^2-a^2b^2}{b^2x_2^2+a^2y_2^2-a^2b^2}\right|$$

となり，これは l の傾き m によらず一定である．

$\theta=\tan^{-1}m$ とおくと，

$$\mathrm{PQ}=\mathrm{P'Q'}\sec\theta,\ \mathrm{PR}=\mathrm{P'R'}\sec\theta,\ \mathrm{AB}=\mathrm{A'B'}\sec\theta,\ \mathrm{AC}=\mathrm{A'C'}\sec\theta$$

と表される．従って，

$$\frac{\mathrm{PQ}\cdot\mathrm{PR}}{\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC}}=\frac{\mathrm{P'Q'}\sec\theta\cdot\mathrm{P'R'}\sec\theta}{\mathrm{A'B'}\sec\theta\cdot\mathrm{A'C'}\sec\theta}=\frac{\mathrm{P'Q'}\cdot\mathrm{P'R'}}{\mathrm{A'B'}\cdot\mathrm{A'C'}}:\mathrm{const}$$

□

定理 3 と同様の手順で，以下の定理 4，定理 5 も示すことができる．

定理 4. 双曲線 C_2 と点 P，点 A をとり，点 P を通る直線 l と双曲線 C_2 の交点を Q，R とする．また，点 A を通り l と平行な直線と双曲線 C_2 の交点を B，C とする．このとき，$\dfrac{\mathrm{PQ}\cdot\mathrm{PR}}{\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC}}$ は l の傾きによらず一定である．

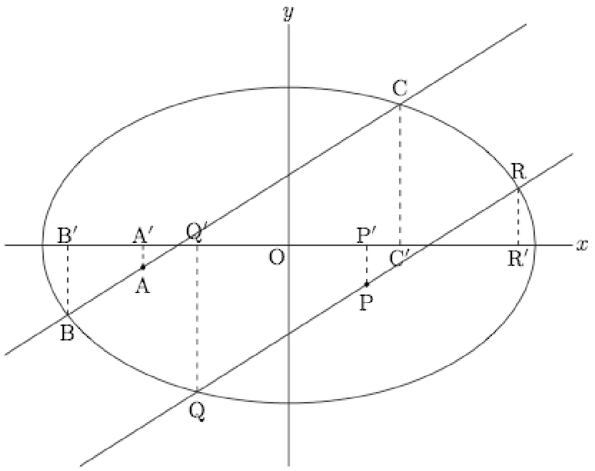

図 6　楕円の方べきの定理

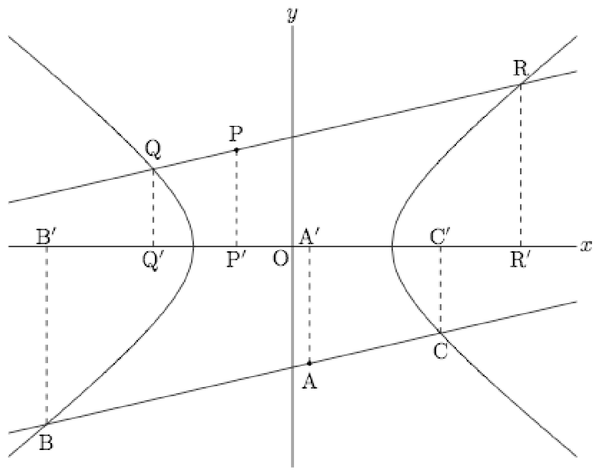

図 7　双曲線の方べきの定理

定理 5. 放物線 C_3 と点 P，A をとり，点 P を通る直線 l と放物線 C_3 の交点を Q，R とする．また，点 A を通り l と平行な直線と放物線 C_3 の交点を B，C とする．このとき，$\dfrac{\mathrm{PQ}\cdot\mathrm{PR}}{\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC}}$ は l の傾きによらず一定である．

4 Hervey 点の再発見

昭和３０年代までは Hervey によって再発見された以下の様な定理が比較的良く知られていたようである．（１９世紀後半のヨーロッパで知られていた経緯については [6, 7] を参照.）

定理 6. 任意の 4 直線線からなる 4 つの三角形について，各三角形の垂心と外心を結ぶ線分の垂直二等分線はすべて 1 点で交わる．

現在では忘れられており，ある人から，「放物線の 4 接線に対して成り立つということが，昔は，広く知れ渡っていたようだ.」と，聞いた．図形ソフトのシンデレラを使って，大学生に調べてもらったところ，成り立っていそうである．放物線に対して成り立つ性質として聞いたことが幸いしていたのであるが，Hervey の定理の新たな証明に至った．

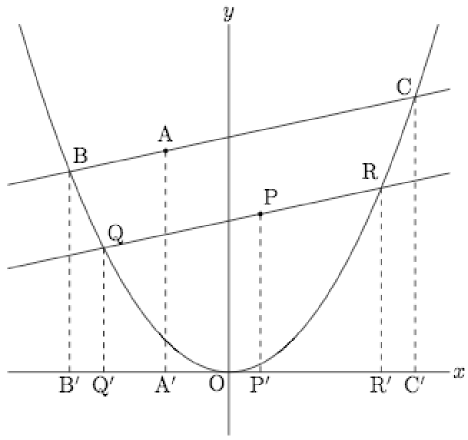

図８　放物線の方べきの定理（２）

シンデレラにおける放物線の描き方としてその焦点と準線が表示されている．そのため，放物線の接線からからできる三角形の垂心が準線上にあるという性質 (J. Steiner の定理) に学生自ら容易に気付くことができた．ここでもし可能ならば，外接円を描いてみるように指導し，放物線の焦点を通る (H. Lambert の定理）に気付かせられると良いのではないかと思う．また，任意の４直線に接する放物線が存在するとか，任意の放物線が相似であるというようなことに学生が気付くことは難しいと思われるので，新たな証明に至るためには，大学教員の介在も重要な点であろうと思われる．４接線からできる４つの３角形の外心が，同一円周上にあること（この円は Steiner 円と呼ばれる）も学生自ら気付いていたようである．理想としては，この円を Steiner 円と呼ばれることを教えて，任意の４直線の場合にもそのようになるかを考えさせるように指導するのが望ましい．

更に，任意の４直線からできる４つの三角形の外接円はすべて一点 (Steiner 点）で交わることに，大学教員が気付き， F. Morley の定理としてして知られている以下の性質に導くべきであろう．５直線に対して，その４直線毎にできる５つの Steiner 点は同一円周上にあり，６直線の場合には，５直線からできるそれらの６つの円が１点で交わる．このことが n 本の場合に拡張される．

実際，放物線の接線に関しては，以下の性質を学生自ら気付き，証明することもできた．

定理 7. 与えられた放物線の接線からできる全ての完全四辺形の Steiner 円は，その焦点で交わる．

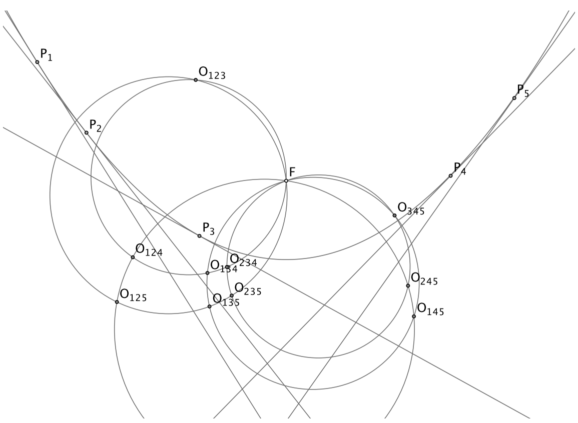

図９　放物線の５接線に対する Steiner 円

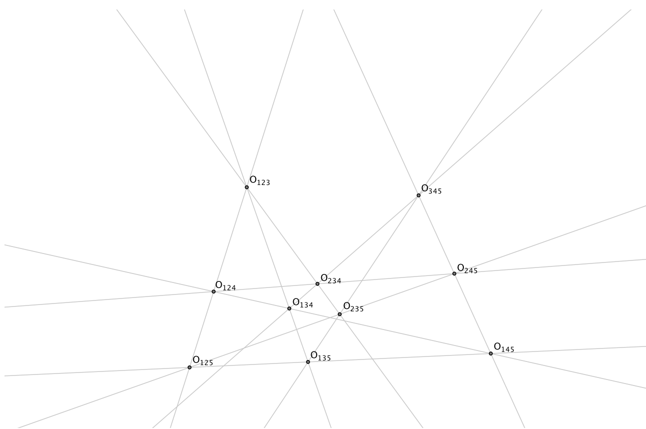

図 10　放物線の５接線に対する外心の並び

既に知られている可能性は十分あるが，今のところ見つけられない．更に，一般の５直線に関しても，その４直線からできる５つの Steiner 円は，一点で交わることが， シンデレラでは確認されている．勿論，上述の Morley の定理の類推から，６直線に対して，その５直線からできる上記の５つの Steiner 円の交点が同一円周上に乗ってほしいが，そ

のようにはならないことを，シンデレラで確認している．

また，放物線の5接線からできる三角形の外心の配置について，以下の様な興味深い性質も発見でき，証明を与えた([5])．

定理 8. 放物線の固定した2接線と他の接線からできる三角形の外心は同一直線上にある．

5 最後に（少しばかりの考察)

学校教育における発見学習としては J. S. ブルーナーによる研究 ([9]) から長い伝統があるが，大学，大学院の研究という観点からは，あまり見受けられない．彼の発見学習では,「構造」,「レディネス」,「直観」が重要なキーワードであろうと思われる．数学である以上その背後に構造があるのは当然であが，注意しなければいけないことは，あまり特殊なものに関して何かを見つけ出すことに意味があるとは思えないことであり，指導者の数学的センスが最も需要ではないかと思われる．レディネスに関しては，最近の大学生に備わっているかは，少しばかり疑問ではあるが，それなりの質の学生なら問題ないと思われる．最後の直観については，これが最大の問題であろう．ただ，ICT を用いる発見的学習に関しては，本来なら補助線に気付くことが幾何学的直観と言われるようなものであるが，正確な図を描くことも直観的な発見を促すものであり，ICT が正確な図を描くということで，大変役立つものと言える．

G. ポリアによる「数学の問題の発見的解き方」という有名な本 ([10]) がある．ここで彼は，多くの数学の問題についての発見的解き方の解説をおこなっており，今回の論文では3つの問題について発見的学習の事例として解説したものである．重要なこととしてはその問題の背後に如何に多くの数学が点かいしているかということであると考える．1つ目の問題は，三角形の中心については，C. Kimberling のリスト ([2]) によって 6000 以上の中心が知られており，それらを再発見することも興味深いが，少しは新しいことをととしても試みと言える．2つ目の問題は，円の方べきの定理は中学校の数学の範囲でありながら，数学オリンピックの問題にも関連するものが非常に多く，円だけの特別な性質でもよいが，少しばかりの拡張を考えるということに，その本来の意味を見いだせるものと思われる．3つ目の ICT を用いた発見的学習は，計算機の進化に伴い，今後更にその必要性を増してくるものと思われる．また，今回は取り上げられなかったが，中学生が授業中に発見した (末永ライン）([3]) のような発見も重要である．

参考文献

[1] Cinderella.2 日本語版 https://sites.google.com/site/cinderellajapan/

[2] C. Kimberling: Encyclopedia of triangle centers, http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html.

[3] 伊藤仁一, 堀尾直史, 山下雄太郎: ICT 活用の図形学習の授業における生徒の発見とその一般化, 2015 年度数学教育学会春季年会発表論文集, 155-157.

[4] 伊藤仁一, 中尾温: 平面幾何の発見的学習に関するいくつかの事例, 日本教科内容学会第2回研究大会プログラム要旨集 (2015), 25-26.

[5] 伊藤仁一, 中尾温: ICT を用いた平面幾何の発見的学習に関するいくつかの事例, 日本教科内容学会誌, 投稿準備中.

[6] 伊藤仁一, 平面幾何の ICT を用いた発見的学習の可能性, じっきょう数学資料, No. 71(2015), 1-5, 実教出版

[7] 岩田至康編: 幾何学大辞典全6巻, 補巻 I, II, 1971-1993 槇書店.

[8] 中里仁謙: 不思議なかけ算 ～ 方べきの定理から ～, 高校への数学, 2014 年 11 月号, 53-55, 東京出版.

[9] J. S. ブルーナー (鈴木, 佐藤訳), 教育の過程, 1963, 岩波出版

[10] G. ポリア (柴垣, 金山訳), 数学の問題の発見的解き方, 第1巻，第2巻, 1964, みすず書房