

# 生徒に考えさせるテクノロジーを用いた数学教材の研究

伊藤 仁一\*・堀尾 直文†

## Research on mathematics teaching materials using technology to let students think

Jin-ichi Itoh and Naofumi Horio

(Received September 30, 2016)

Nowadays, mathematics teaching materials to let students think has been required. It is possible to use technology not just as calculating machines, but as a thinking tools, such as the students have questions and want to solve them by themselves. In this paper, we show several mathematics teaching materials to let students think, for example, some mathematics teaching materials in planar geometry using dynamic geometry software (in this class, a student found an unexpected discovery), some mathematics teaching materials to drawing graphs by walking using graphing calculators linked destination sensors, and some mathematics teaching materials of repeating decimal of interesting sequence using computer algebra systems are also useful to let them think, e.t.c.

**Key words** : mathematics teaching materials, dynamic geometry software, graphing calculator, computer algebra system

### 1. はじめに

これまでも学校現場では、例えば、井上正允([4])によるスピログラフを題材とした数学教材やM.C. エッシャーの作品を数学教材としたものなど、様々に生徒に考えさせる授業が実践されてきており、その事例は多く見られる([6], [7], [10])。これらはテクノロジーを用いなくても行われてきたことではあるが、学校現場に普及しているテクノロジーを教師がうまく使うことで、生徒たちが数学を楽しく学び、能力を伸ばすことができる。昨今では学校現場においてアクティブ・ラーニングとの関連で「ICTを利用した授業」が求められている。また、大学生を対象としたICTを用いたアクティブ・ラーニングの事例としては、[2]がある。

確かに現在では機器類は処理速度が速く、機能も豊富で安価になり、学校に電子黒板やプロジェクタ、コンピュータ、タブレットなどの配置が進み、大変使いやすくなった。工夫次第で様々な授業展開が考えられるはずである。にもかかわらず、テクノロジーを用いた数学教育は十分に広がっているとはいえない。これはもちろん、生徒側に原因があるのではなく、教師側に以下のような意識があるからではないだろうか。「計算に電卓を使うなんて！計算は自分の頭でするものだ」という誤解。「新たなことを覚えるのは大変！」という未知のものへの抵抗感。「準備や片付けが大変。途中でトラブルがあったら大変！」という機器使用への拒否感。などである。教師たちの誤解を解き、抵抗感や拒否感を乗り越えてもらい、授業で積極的に使用してもらうことで得られる教育効果は非常に大きい。

そこで本稿では中等学校における、教師にとって導入しやすいと思われる「生徒に考えさせるテクノロジーを用いた数学教材」をいくつか提案する。

数学科でテクノロジーを用いた授業を行う場合、その利用方法に以下のようなタイプが考えられる。「使うとわかりやすい、使うと便利」タイプ。これは、「電子紙芝居」や「フラッシュカード」など、電子黒板などを使っ

\* 熊本大学教育学部数学教室 j-itoh@kumamoto-u.ac.jp

† 熊本大学大学院教育学研究科 holynet@me.com

た一斉授業でよく用いられるタイプである。これまでテクノロジーのない状況では応用紙を使うなど別の方法でできていたのだが、機器によって手軽に授業で使えるようになった。ただし、テクノロジーがなくても授業は成立する。次に、「使わないと大変、使わないとできない」タイプ。これは、統計でインターネットのウェブページを参照して大量のデータを扱ったり、紙の上を書いていた幾何図形を動的に扱って示したりするタイプである。テクノロジーの進化によって実現できるようになった。そして、これらの先にあり、今後期待したいのが「使うと授業が変わる、生徒が考える」タイプである。生徒に示したり操作させたりするなどして生徒の中に問いを生まれさせ、おのずと解決したくなるような課題を与えることのできる道具としてテクノロジーを使うことができる。

なお、本稿で述べる「テクノロジー」としては、以下のものを想定している。

- ・ハードウェア：パソコン、タブレット、グラフ電卓など
- ・ソフトウェア：動的幾何ソフトウェア、数式処理ソフトウェア、数式処理サイトなど
- ・周辺機器：プロジェクタ、電子黒板、プリンタ、3Dプリンタ
- ・ネット環境：インターネット接続

## 2. 授業で使えるソフトウェア、ハードウェアの例

ここで、数ある数学教育用のソフトウェアやハードウェアの中から、これまで実際に授業で実践したり研究したりしてみて、授業で「使える」と判断した例を分類してリストアップする。

### 2.1. 「図形」領域で使える動的幾何ソフト

動的幾何ソフトウェア (Dynamic Geometry Software) とは、パソコンやタブレット、スマートフォンの画面に描いた主に平面図形の点や辺を、マウスやタッチパッド、タッチパネルを操作して「動かす」(形や位置を変える) ことのできるソフトウェアである。「作図ツール」とも呼ばれるが、「作図」が目的ではない。点や辺を動かしても変わらない性質、変わる性質を見出し、そのことについて考える手がかりとなる。または、計算して求めた結果や予想を確認するために使う ([1])。

### 2.2. 「関数」領域で使えるグラフ電卓

グラフ電卓は、スマートフォンくらいの大きさの本体を持つが、スマートフォンよりも頑丈で手軽に数学が扱える機械である。その性能は、計算機能においては一般の電卓が扱うことのできない分数や指数が扱えるのももちろん、大学でも使えるレベルの計算ができる。また、その名の通りグラフを扱うことができるので、式を入力して描かれた正確なグラフを見ながら考えることができる。さらに、数式処理ソフトウェアや作図ツールさえ搭載したモデルも存在する。すなわち、実はその名の与える印象をはるかに超え、カバンに入れて持ち運ぶことができる数学用コンピュータと言っても過言ではない。

そしてグラフ電卓単体の機能を使うだけでも数々の数学を扱えるが、グラフ電卓に距離センサーをつなぐ。距離センサーは、10分の1秒や20分の1秒など設定された時間刻みでセンサーから物体までの距離を測り、その時々データをグラフ電卓に送る。このデータで時間×距離グラフを作成するプログラムを使うと、歩いてグラフを描かせることができる。『あるグラフを描くにはどう歩くといいか』、また、『ある歩き方をした時のグラフはどう描かれるか』という問いが立てられる。

### 2.3. 「数と式」領域で使える数式処理サイト、数式処理ソフトウェア

通常の電卓でもグラフ電卓でも表示できる桁数は10～12桁程度であるが、長い循環節を持つ循環小数などグラフ電卓でも扱えないほどの桁数を扱うときなど、数式処理ソフトウェアが威力を発揮する。インターネット上には市販の高額なソフトウェアと同様の機能を持ちながら無料で使えるものもある。また、グラフ電卓を購入すると、同じ機能を持つソフトウェアも同梱されており、これをコンピュータにインストールすることで、コンピュータでグラフ電卓と同じことをさせることもできる。

### 2.4. 「資料の活用」領域で使えるウェブサイト

以前は「資料の整理」という名称だったこの領域の名称が、指導要領改訂によって「資料の活用」と変更になった。文部科学省のホームページには、『この領域の名称を「資料の活用」としたのは、これまでの中学校数学科における確率や統計の内容の指導が、資料の「整理」に重きをおく傾向があったことを見直し、整理した結果を用いて考えたり判断したりすることの指導を重視することを明示するためである。』とある。資料の活用領域では、インターネット上に公開されている膨大なデータの中から適切なデータを見つけ出して授業で使うとよい。例えば、「総務省統計局」のサイトには、国勢調査のデータと他のデータを併せてどのようなことがわかるかを示してある。その他にもアイデア次第で使える素材は一般企業のページなどを探せばあちらこちらに見つけることができる。

### 2.5. 「図形」領域で使える教具を自分で作ることができる3Dプリンタ

空間図形を中学生に教える際には、紙や黒板で表した2次元の図だけでは十分に理解させるのは困難である。できるだけ立体模型を示して色々な方向から眺めさせたりしながら理解を深めさせたい。しかし、生徒に見せたり操作させる教具を購入しようとする、通常はかなり高い価格となり、しかも目の前の生徒たちに適したものでないこともある。最近では3Dプリンタの価格が下がり、性能は上がってきたので学校備品としてや個人で購入することもできる環境になってきた。これを使って教師が自分が教える生徒に合った立体模型を作成することもテクノロジー利用の一つである。

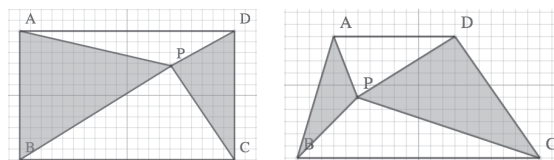
## 3. テクノロジーを用いた数学授業の実例

前章の各例について、実例を挙げる。中でも特に効果があると思われる1～3について詳しく述べることにする。

### 3.1. 動的幾何ソフトを用いた「図形」領域教材

作図ツール「GC」を使って中学校3年生で以下の授業を行った。生徒に提示した課題は次の通りである。「四角形ABCDと、その内部に任意の点Pがある。四角形ABCDが①長方形、②台形のそれぞれの場合、 $\triangle ABP + \triangle DCP$ が四角形ABCDの面積の半分になるのは点Pがどこにあるときか」([8])。

この授業は、面積の測定機能と軌跡の記録機能を使って点Pの分布を探させ、その分布の理由を考えさせようとする授業展開で行った。解答は、①長方形ではABCDの内部のどこでも、②台形ではABとCDの中点を結んだ線分上、となる。①で内部のどこであっても条件を満たすことが意外性を持ち、さらにその後台形で考えると線分になることがさら



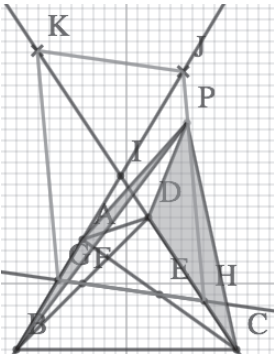
課題の図. 点Pは自由に動かせる

に興味深い課題である。生徒たちに力があれば、ABCDを③一般の四角形にすると、点Pの集合は対角線AC、BDのそれぞれの中点を結んだ直線のうち四角形の内部の線分となり、これがすべての場合を包括するので、発展的に扱える課題である。この日の授業では、評価の観点を「数学的な関心・意欲・態度」に置き、本時の目標を「数学的活動を通して、図形の性質の面白さや楽しさを味わうことができる」、「条件が変わっても変わらない値や性質があることに気づき、そうなる理由を理解し、利用することができる」として、②までを扱った。

この授業の終了間際に、数学が苦手な生徒の一人、末永龍宝くんが、「外部にも点がある」と指摘した。彼は内部の点という条件を頭に入れずに（無視して？）、外部に発見した点を追いかけていたのである。この授業終了後の授業研究会では末永くんの発言のことが大きな話題になった。授業の最中には、彼が気づいた点というのはGCの面積測定機能で面積がマイナスの値として処理されたことによって起きたものだと思っていたが、違っていた。課題の条件を拡張して点Pを内部に限らないようにしてGCで点を記録してみると、彼の指摘した点は2本の平行な線として存在したので、GC活用研究会メーリングリスト内で「末永ライン」と命名して探究を続けた。その結果、平行線だと思われた「末永ライン」は平行四辺形として存在することがわかり、その後、一般の四角形の場合にも「末永ライン」が平行四辺形として存在することが分かった。メーリングリスト内ではさらに3次元に拡張した場合には面「末永サーフェス」として存在するのではないかという予想も提起され、後日その存在が証明とともに明らかとなった([3])。

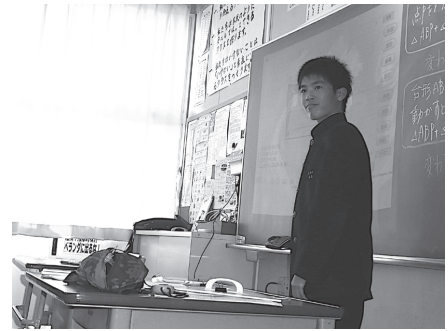
この授業ではタブレット端末を4人4台（1人あたり1台で4人グループ）の環境で行い、授業でタブレット





四角形 GHJK が  
「未永ライン」

を扱ったのは2時間目だったが、生徒たちは自分のノートや教科書のように、自分一人で課題を探究したり、自分の画面を隣の生徒に見せたり、隣の生徒のタブレットの画面に指を伸ばして操作しながらアドバイスしたりして使いこなしていた ([16]).



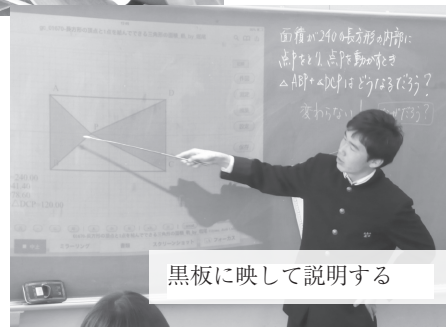
ストローフレームの外周で表される八面体が「未永サーフェス」を表したもの

自分のタブレットを友達に示す

各自で追究する



友達のタブレットに手を伸ばして説明する

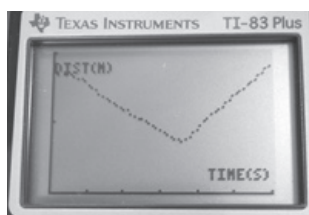


黒板に映して説明する

### 3.2. グラフ電卓を用いた「関数」領域教材

グラフ電卓を距離センサーとつないで生徒が歩いた動きをグラフに表してくれるセットを使った『グラフを歩く』授業は1996年から中学1年生の関数の導入部分で行っているのだが、いつも好評である([11], [12], [13], [14])。センサーは物体までの距離を測り、グラフ電卓に送って時間-距離グラフを自動で作成する。黒板の前に1名の生徒を呼び、センサーから離れるように歩いてもらう。すると右上がりのグラフが描かれることになる。これを全員に確認させたあとで、様々な形のグラフを「歩いて」描かせる授業である。班で話し合いさせて描きたいグラフを選ばせると、大抵は横一直線のグラフを選ぶ。じっとしていれば描けることを見抜くのである。他にも途中で傾きの変わるグラフや、山や谷の形のグラフを描くにはどうしたら良いのか、生徒たちは頭の中で考え、班で意見を交換し合い、実際にやってみて、時には失敗してやり直しながら、傾きが速さを表すことや、傾きの方向がセンサーに向かうか離れるかを表すことを理解することができる。この授業を行ったあとには、ダイアグラムの問題に対する理解が良い。また、定期試験で各教室を回り生徒たちの前でやって見せた動きをグラフに描かせる「リスニングテスト」ならぬ「ウォッチングテスト」を行っており、できはまずまずである。さらに、年度末に小学校に出かけて6年生に行う『出前授業』でも2012年度から4年連続で行った。児童の感想では、「算数は苦手だと思っていたけど、中学校の授業が楽しみになりました。」「算数は好きです。中学校ではすごいことを勉強するんだなと思いました。しっかり勉強したいと思います。」と、小学生の興味を惹き付けたことがわかる。

中学3年生では、台車を使って斜面を転がしたり、ボールを跳ねさせたりする実験を行い、センサーで捉えた動きをグラフ化し、『2乗に比例する関数』を実感させる授業を行った([15])。いずれも、グラフ電卓と距離センサーを使って目の前の「運動」から関数関係を取り出して手軽にグラフ化させることで、生徒にとってとらえにくい「関数」が身近なものになり、生徒が自から考えるようになるのである。



### 3.3. 数式処理サイトを用いた「数と式」領域教材

$1 \div 9801$  の計算結果は、198桁ある循環節が秩序ある数列になっており、小学生から高校生くらいまでを対象に様々な展開を考えることができ、数学的に興味深い。到底電卓では扱えない桁であるが、数式処理サイト「WolframAlpha」を使えば考えることができる。

The screenshot shows the WolframAlpha interface. At the top, the logo reads "WolframAlpha computational knowledge engine". Below it, the input field contains "1/9801". The results section shows "Decimal approximation:" followed by the long decimal sequence "0.000102030405060708091011121314151617181920212223242526272...". A "More digits" button is visible to the right of the sequence.

入力して最初に返ってきた結果では、表示される桁は短い。それでも一般の電卓よりもかなり長い。じっと見ていると、どうも数が順に並んでいるようだ。この後はどう続くのか、予想してみる。そして、More digits と書かれた部分をクリックすると、続きの桁が表示される。

Decimal approximation: Fewer digits More digits

0.0001020304050607080910111213141516171819202122232425262728293031`.  
 323334353637383940414243444546474849505152535455565758596061626`.  
 364656667686970717273747576777879808182838485868788899091929394`.  
 959697990001020304050607080910111213...

「0. 00 01 02 03 04 05 ……」と小数点以下に循環節として二桁の数が00から99まで順に並んでいるのが見えてくる。さらによく観察してみると、循環節の中に98だけ「ない」のである。これらの現象の理由は以下のとおりである。

$\frac{1}{9801} = \frac{1}{99^2}$ である。 $\frac{1}{99^2} = 0.000102030405 \dots 969799$ であることを示す。

(左辺) =  $\frac{1}{(10^2-1)^2}$

右辺の循環節は $2 \times 99$ 桁である。  
 右辺を $a$ とおくと、 $a = 0.000102030405 \dots 969799 = 0.000102030405 \dots 9697990001 \dots$

$$10^{2 \times 99} a = 102030405 \dots 969799.0001 \dots$$

下の式から上の式を引くと、 $(10^{2 \times 99} - 1)a = 102030405 \dots 969799$  となり、

$$a = \frac{102030405 \dots 969799}{10^{2 \times 99} - 1} = \frac{000102030405 \dots 969799}{9999999999 \dots 999999}$$

さらに、 $a \times 10^2 - a = \frac{0102030405 \dots 96979900}{9999999999 \dots 999999} - \frac{000102030405 \dots 969799}{9999999999 \dots 999999} = \frac{010101010101 \dots 010101}{9999999999 \dots 999999} = \frac{1}{99} \dots \textcircled{1}$

だから、 $a(10^2 - 1) = \frac{1}{10^2 - 1}$  となり、

$$(右辺) = a = \frac{1}{(10^2 - 1)^2} = (左辺)$$

ここで、 $\textcircled{1}$ の後ろから2つ目の分数の分子の形にするために、循環節の後ろから2つ目にあたる98はなく、97の後にすぐ99が来るのである。

同様のことが、 $\frac{1}{9^2}$  や  $\frac{1}{999^2}$  などにも言え、証明できる。

この現象を教材とした授業実践はこれからであるが、教材化・授業化のための視点として次のように考えた。

(ア) 一部に手を加えるとどうなるか

① 循環節の中の数列を長くする

0. 000 001 002 003 004 005 …… にするには1を何で割るといいか。その時に循環節の中に存在しない特定の数列があるか。そうだとすると何か。

② 循環節の中の数列を短くする

0. 0 1 2 3 4 5 …… にするには1を何で割るといいか。その時に循環節の中に存在しない特定の数列があるか。そうだとすると何か。

(イ) 理由を考える

①  $1 \div 9801$  の値がなぜこの結果になるのか

9801を素因数分解してみる。手作業でもできるが、Wolfram Alphaで計算させることもできる。

② 循環節の中に特定の数列がないのはなぜか

これも、因数に手がかりがありそうである。1を9で割ってみる。11で割ってみる。81で割ってみる。



(ウ) 別のタイプはないのか

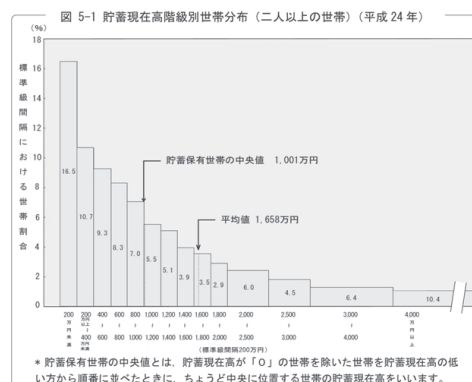
他にも秩序正しい循環節を持つ除法はないか。

いずれの場合も、手計算とテクノロジー利用の双方を組み合わせたい。紙と鉛筆で筆算を行うことは、商と余りを確認しながら計算を進めることができるので大切な作業である。しかし、桁が大きくなるとコンピュータの出番である。思いついた数を Wolfram Alpha に入力し、結果を確かめてみる。コンピュータへの入力なら簡単に試行錯誤ができる。予想と違ったらやり直せばいい。入力する数を考えるときに規則性に基づいて思考するであろうし、理由を考えるのはコンピュータではない。生徒の頭脳である ([17])。

### 3.4. その他の教材

#### 3.4.1. 総務省統計局のページの統計データを使った「資料の活用」領域教材

生徒たちは平均値には慣れていても、中央値や最頻値を理解するのは難しいようである。大人でさえ統計データを平均値で考えようとする人が多いので、捉えるのが難しいのかもしれない。これには実感を持てる実データを利用するのがよい。極端に高い貯蓄現在高を持つ人たちがいるために、資料全体の平均値を引き上げている実例である。中央値はずっと低く、こちらの方が実感に近いだろう。他にも、インターネットを使えば統計データを活用できる力を育てるのに格好の実データが手軽に手に入るので、とても役立つ。

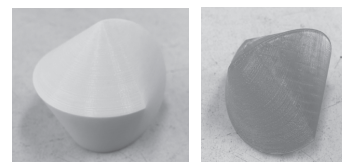
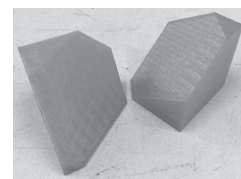


#### 3.4.2. 「図形」領域で使える 3Dプリンタで作成した教具

立体の切断面を手にとって確かめることができるように、立方体を切断面が三角形、ひし形、五角形、六角形になるように切断した立体模型を作成した。切断面の辺が作る角度の状態を捉えるのには非常に役立つ。

さらに、模型の動きによって生徒たちが「面白いな、不思議だな。どうしてかな？」と興味を持って考えるきっかけにさせることもできる。「スフェリコン」という立体は、転がすと興味深い動きをする。これを3Dプリンタで作成し、実際に転がさせてみる。まずはその動きに興味を持った生徒たちは、次に手に持って状態を確認しながらこの動きの理由を考えることになる。さらには計測した値を元に計算することによって表面積を求めることもできる。

また、平面図形でも、例えばタングラムのようなパズルを与えて生徒に操作活動をさせることもあるが、紙を使わせるよりも、やや厚みと剛性のあるものの方が扱いやすいので、これも3Dプリンタで作ってみた。これらの制作物はまだ生徒には示していないが、現場教師たちに紹介したところ、非常に好意的に受け入れられた。



## 4. おわりに

今から十数年前、アメリカの教育現場でのグラフ電卓の利用を進めていたオハイオ州立大学のフランク・デマナ教授(当時)の講演で次のような話があった。「日本の空港に着いたら女子高生が携帯電話を耳に当てて話しながら歩いていた。驚いたよ。アメリカで携帯電話を持ち歩いているのはエリートビジネスマンかマフィアだ。日本は凄い国だ。アメリカの女子高生は携帯電話は持っていないが、グラフ電卓をバッグに入れて学校の数学の授業で使っているよ。」これは、テクノロジーを子どものおもちゃにしている国と学習の道具に使っている国では、もたらされる次の時代の国民の知性の格差は大きく広がっていくだろうという痛烈な皮肉であった。現在では日本の状況はさらに深刻になってしまっているようだ。経営学者のドラッカー ([9]) は、印刷技術というかつての技術革新がもたらした重要な教訓として、《技術自体の変化よりも、それが教育や学校のあり方、内容、焦点に引き起こす変化のほうが重要だということである。》また、《技術は重要である。しかしそれは、従来やってき

たことを、もっとうまくやれるようにしてくれるからではない。何か新しいことをせざるをえなくしてくれるからである。》と述べている。このことは現代でいえば、ICT技術が学校にもたらす変化を表現しているのではないだろうか。学校教育法では、「生涯にわたり学習する基盤が培われるよう、基礎的な知識及び技能を習得させるとともに、これらを活用して課題を解決するために必要な思考力、判断力、表現力その他の能力をはぐくみ、主体的に学習に取り組む態度を養うことに、特に意を用いなければならない」と定められた（学校教育法第30条第2項、第49条、第62条等）。このことを受けて、多くの学校ではドリル練習に回帰してしまっているようだが、それはここに示された理念を正しく捉えているとはいえないのではないか。本稿で示したように、テクノロジーを用いることによって授業が大きく変化する可能性があると思われる。今後、学校現場でテクノロジーを用いた数学教材の研究が進み、生徒たちに学校教育法の期待する能力をはぐくみ、主体的に学習に取り組む態度が養われることが望まれる。

### 参考文献

- [1] 飯島康之ほか、コンピュータで数学授業を変えよう－作図ツール GC による図形の指導、明治図書、1995
- [2] 伊藤仁一・中尾温、ICT を用いた平面幾何の発見的学習に関するいくつかの事例、日本教科内容学会誌 第2巻第1号、111-118、2016
- [3] 伊藤仁一・堀尾直史・山下雄太郎、ICT 活用の図形学習の授業における生徒の発見とその一般化、2015 年度数学教育学会春季年会発表論文集、155-157、2015
- [4] 井上正允、本日オープン！数学美術館、数学ワンダーランド3、国土社、1995
- [5] 学校教育法、最終改正：平成二八年五月二〇日法律第四七号
- [6] 國本景亀・山本信也共訳、算数・数学 授業改善から教育改革へ-PISA を乗り越えて：生命論的観点からの改革プログラム、東洋館出版社、2004
- [7] J.W. スティグラー・J. ヒーバート共著、湊三郎訳、日本の算数・数学教育に学べ、教育出版、2002
- [8] 地曳善敬ほか、図形が動く授業が変わる－平面図形の探求学習事例集、明治図書、1999
- [9] P.F. ドラッカー著、上田惇生訳、ポスト資本主義社会、ダイヤモンド社、1993
- [10] G. ポリア著、柴垣和三雄・金山靖夫共訳、数学の問題の発見的解き方1、みすず書房、1964
- [11] 堀尾直史、グラフ電卓+距離センサーで「グラフを歩く?」、T<sup>3</sup> Japan 第1回年会誌、10-13、1997
- [12] 堀尾直史、テクノロジーで身近な数学を授業に、教育科学数学教育、明治図書、63-70、1998.5
- [13] 堀尾直史、関数指導に生かすグラフ電卓の効果的な活用、教育科学数学教育、明治図書、64-67、2001.2
- [14] 堀尾直史、グラフを「歩く」!～自ら学び、考える力を育成する文房具「グラフ電卓」、数学教室、国土社、53-59、2002.3
- [15] 堀尾直史、「関数」の授業を活かすグラフ電卓の利用、教育科学数学教育、明治図書、70-74、2002.8
- [16] 堀尾直史、数学が苦手な生徒による予期せぬ発見「末永ライン」さらには「末永サーフェス」、T<sup>3</sup> Japan 第19回年会誌、150-155、2015
- [17] 堀尾直史、 $1 \div 9801$  の規則性を WolframAlpha で、T<sup>3</sup> Japan 第20回年会誌、36-39、2016