

## 多孔パイプを持つ消音器の減音効果の解析\*

西村 壮平\*<sup>1</sup> 西村 強\*<sup>2</sup> 矢野 隆\*<sup>3</sup>

**【要旨】** エンジンからの脈動気流を平滑化し、更に騒音レベルの増大の起因となる気流の速度を低減するのに有効であるため、消音器内には多孔パイプが広く用いられている。多孔パイプを使用する場合、問題となるのは消音器内部で異なる共振が発生し、それに従い挿入損失が低下することである。本論文では、多孔パイプを消音器の空洞に装置しない場合と装着する場合についての消音器内部の共振を理論及び実験結果で示す。更に、挿入損失を改善するための尾管の設置方法について述べる。

キーワード 共振, 挿入損失, 多孔パイプ, だ円空洞

Resonance, Insertion loss, Perforated pipe, Elliptical chamber

### 1. ま え が き

現在の自動車用消音器において多孔パイプを使用しないものはほとんどないという事実から、多孔パイプは非常に重要な役割を果たしている。これはエンジンからの脈動気流を平滑化し、更に騒音レベルの増大に起因する気流の速度を低減する働き等を持っている。多孔パイプの効果の実証や理論解析に関する研究は、30 数年前から現在に至るまで様々な研究が行われている。福田は多孔パイプの効果を実験的に確認し、また、使用上の問題点を指摘した [1, 2]。理論解析においては Sullivan の論文から始まり、これらは円筒空洞内に一本の多孔パイプを装着したものをモデルとし、それについての消音効果評価指標である挿入損失、あるいは透過損失を求めたものである [3-8]。しかし、これらの論文は平面波の周波数領域で解析を行っているにも関わらずこの周波数領域が明確に記されていない。

実用されている消音器は、低周波数成分の音圧レベルを抑えるため消音器の容積、つまり空洞部を大きくしなければならない。その結果、低周波数領域においても半径方向の音圧成分の共振が生じ、これまでの平面波を取り扱う 1 次元モデルでは特性の解析が不十分である。すなわち、平面波のみならず消音効果の低下

に起因する半径方向の共振に対する解析も考慮する必要がある。そこで本論文では、Sullivan と同様のモデルである 1 本の多孔パイプを消音器の空洞内に装着した場合の減音効果を上述に挙げた課題を考慮しつつ理論的及び実験的に解明する。更に、多孔パイプを使用する場合、消音器内部で異なる共振が発生し、それに従い挿入損失が低下するため、これを改善するための尾管の設置方法についても述べる。なお、本論文では解析を簡単にするため脈動気流に対する効果を考慮しない。

### 2. 理 論 計 算

#### 2.1 減音効果

消音器を付けないときと付けるときの放射音のパワーレベルをそれぞれ  $P'$  及び  $P$  とすると、挿入損失は次式のように定義される [9]。

$$IL = 10 \log(P'/P) \quad (1)$$

消音器系全体の四端子定数 ( $A, B, C, D$ ) を用いて、定速度音源の場合、式 (1) は

$$IL = 20 \log \frac{D}{D'} + 10 \log \frac{R'}{R} \quad (2)$$

となる。上式のダッシュの付いた項は消音器設置前の値を示し、 $R$  は尾管出口の音響放射抵抗を示す。

ここで、図-1 に示す入力管、空洞、尾管をもつ消音器において、空洞部の面積が尾管面積に比べて十分に大きい場合の  $D$  定数は次式のように求められる [9]。

$$D = (\cos kl_1)(C_w)(jZ_3 \sin kl_0) \quad (3)$$

式中の  $k$  は波長定数、 $Z_3$  は尾管の特性インピーダンス、 $l_1$  と  $l_0$  は入力管及び尾管の長さを表す。上式の右辺の第 1 項と第 3 項はそれぞれ入力管及び尾管の特性

\* Acoustical analysis of the noise reduction effect caused by the mufflers having perforated pipe, by Sohei Nishimura, Tsuyoshi Nishimura and Takashi Yano.

\*<sup>1</sup> 熊本大学大学院自然科学研究科

\*<sup>2</sup> 崇城大学工学部

\*<sup>3</sup> 熊本大学工学部

(問合せ: 西村壮平 〒 860-8555 熊本市黒髪 2-39-1 熊本大学大学院自然科学研究科環境共生科学専攻 矢野研究室 e-mail: sohei0627@msn.com)

(2004年10月7日受付, 2005年4月15日採録決定)

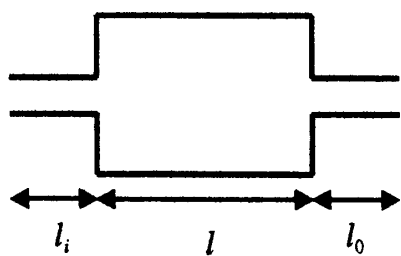


図-1 一般的な消音器の構成

を表し、第2項は空胴の四端子定数の  $C$  定数である。減音効果を高めるためには、上式の  $D$  定数、すなわち空胴の  $C$  定数をできる限り大きくなるような消音システムの設計にする必要がある。

## 2.2 空胴の $C$ 定数の計算

消音器の空胴の入口の音圧と体積速度を  $P_i, U_i$ 、出口のそれらを  $P_o, U_o$  とすれば空胴の四端子定数  $C$  は、 $U_o = 0$  の条件で  $C = U_i/P_o$  として定義される。この定数  $C$  を求めるための計算モデルを図-2 に示す。長さ  $l$ 、離心率  $e_w$  のだ円形空胴で、その入力側端面の中心に離心率  $e_0$  の入口を有する。空胴の出力側は、微小な開口が出力側端面の中心に設置される。ここで、空胴の四端子定数  $C$  を求めるため、その出口の体積速度を 0 とする。空胴内には、厚みが十分薄く孔が一様に分布している離心率  $e_p$  のだ円型の多孔パイプが装着され、その焦点は空胴、入口の焦点と共有している。

多孔パイプの内と外の速度ポテンシャルを  $\phi_{in}, \phi_{out}$  とする。入口から入った音波は長軸及び短軸に対して対称分布のため  $\phi_{in}$  は  $\eta$  に対して偶関数であり、従って  $\phi_{in}$  の一般解は次式となる [10]。

$$\phi_{in} = (A_i \exp(\mu z) + B_i \exp(-\mu z)) \times \sum_{m=0}^{\infty} C_m C e_m(\xi, s) c e_m(\eta, s) \quad (4)$$

一方、速度ポテンシャル  $\phi_{out}$  は軸対称の項の他に、非対称の項も存在するため、その一般解は

$$\phi_{out} = (A_o \exp(\mu z) + B_o \exp(-\mu z)) \times \left( \sum_{m=0}^{\infty} C_m^0 C e_m(\xi, s) c e_m(\eta, s) + \sum_{m=0}^{\infty} S_{m+1}^0 S e_{m+1}(\xi, s) s e_{m+1}(\eta, s) \right) \quad (5)$$

となる。ただし、

$$s = \frac{q^2}{4} (k^2 + \mu^2) \quad (6)$$

$k = \omega/c$  は波長定数、 $q$  はだ円の焦点と中心との距

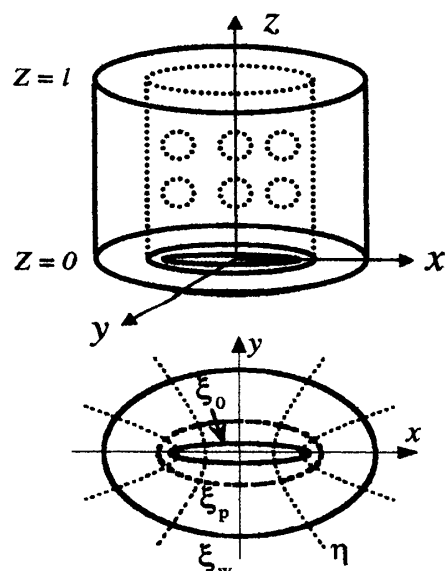


図-2 計算モデル

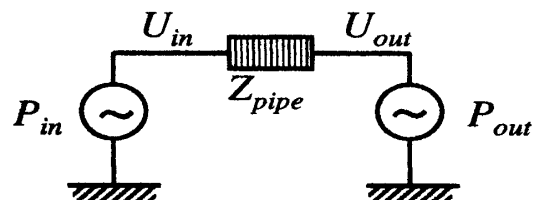


図-3 多孔質面上の等価回路

離  $c e_m(\eta, s)$ ,  $C e_m(\xi, s)$  は  $m$  次の偶関数マシユー及び変形マシユー関数、 $s e_m(\eta, s)$ ,  $S e_m(\xi, s)$  は奇関数マシユー及び変形マシユー関数である。その他の記号は定数である。

空胴の入口の  $z$  方向の気体粒子速度を  $V_0$  とし、また、 $V_\xi, V_z$  をそれぞれ  $\xi$  と  $z$  方向の気体粒子速度とする。空胴内でのエネルギーが無損失の場合、境界条件は次のようになる。まず、多孔パイプの内側の速度ポテンシャル  $\phi_{in}$  に対し

$$[1] z = 0 \text{ で } V_z = -\frac{\partial \phi_{in}}{\partial z} = V_0 F_0(\xi, \eta) \quad (7)$$

$$[2] z = l \text{ で } V_z = -\frac{\partial \phi_{in}}{\partial z} = 0 \quad (8)$$

ここで、式(7)における  $F_0(\xi, \eta)$  は入口面上で1、その他の領域では0となる関数である。次に多孔パイプの外側の速度ポテンシャル  $\phi_{out}$  に対し

$$[3] \xi = \xi_w \text{ で } V_\xi = -\frac{\partial \phi_{out}}{\partial \xi} = 0 \quad (9)$$

$$[4] z = l \text{ で } V_\xi = -\frac{\partial \phi_{out}}{\partial \xi} = 0 \quad (10)$$

続いて、多孔パイプ表面の境界条件を求める。図-3 に示す  $P_{in}, U_{in}$  及び  $P_{out}, U_{out}$  はそれぞれ多孔パイプの内と外の音圧及び体積速度とする。多孔パイプの離散的に分布している孔は、等価的な一つの微小孔と

し、そのインピーダンスを  $Z_{\text{pipe}}$  とすれば、多孔パイプ表面上、すなわち  $\xi = \xi_p$  では

$$P_{\text{in}} = P_{\text{out}} + Z_{\text{pipe}} U_{\text{out}} \quad (11)$$

$$U_{\text{in}} = U_{\text{out}} \quad (12)$$

の関係が成り立つ。一方、音圧  $P$  及び体積速度  $U$  と速度ポテンシャル  $\phi$  との関係はそれぞれ、 $P = jk\rho c\phi$ 、 $U = \partial\phi/\partial\xi$  であるから式 (11) と式 (12) は

$$[5] \quad \xi = \xi_p \text{ で } \phi_{\text{in}} - \phi_{\text{out}} = \frac{Z_{\text{pipe}}}{jk\rho c} \frac{\partial\phi_{\text{out}}}{\partial\xi} \quad (13)$$

$$[6] \quad \xi = \xi_p \text{ で } \partial\phi_{\text{in}}/\partial\xi = \partial\phi_{\text{out}}/\partial\xi \quad (14)$$

と書ける。

上述の六つの境界条件から多孔パイプ内側と外側の速度ポテンシャル  $\phi_{\text{in}}$ 、 $\phi_{\text{out}}$  は、付録の式 (A.11) 及び式 (A.20) のように求められ、また、それぞれの四端子定数  $C$  は付録の式 (A.26) 及び式 (A.27) のように求められる。

空洞内でのエネルギーの損失を考慮した場合、四端子定数の式における  $k$  を  $k - j\alpha$  ( $\alpha$ : 減衰定数) と書き換えれば簡単に得られる。すなわち、空洞の出口側における多孔パイプの内側と外側の四端子定数  $C_w^{\text{in}}$  と  $C_w^{\text{out}}$  は次式となる。

$$C_w^{\text{in}} = \frac{1}{Z_w} \left\{ \frac{1}{\sinh(\alpha + jk)l} - \sum (\alpha + jk) \frac{H_{m,i}}{GS_{m,i}} \times \Delta_{\text{in}} \Theta_m(\xi, \eta, s_{m,i}) \right\} \quad (15)$$

$$C_w^{\text{out}} = \frac{1}{Z_w} \left\{ \frac{1}{\sinh(\alpha + jk)l} - \sum (\alpha + jk) \frac{H_{m,i}}{GS_{m,i}} \times \Delta_{\text{out}} \Theta_m(\xi, \eta, s_{m,i}) \right\} \quad (16)$$

ただし

$$GS_{m,i} = \mu_{m,i} \sinh \mu_{m,i} l + \tilde{Z}_{m,i} \overline{\mu_{m+1,i}} \sinh \overline{\mu_{m+1,i}} l \quad (17)$$

$$\mu_{m,i} = \frac{1}{a_w} \sqrt{\lambda_{m,i}^2 - (ka_w)^2 + j2a_w^2 \alpha k} \quad (18)$$

$$\overline{\mu_{m+1,i}} = \frac{1}{a_w} \sqrt{\lambda_{m+1,i}^2 - (ka_w)^2 + j2a_w^2 \alpha k} \quad (19)$$

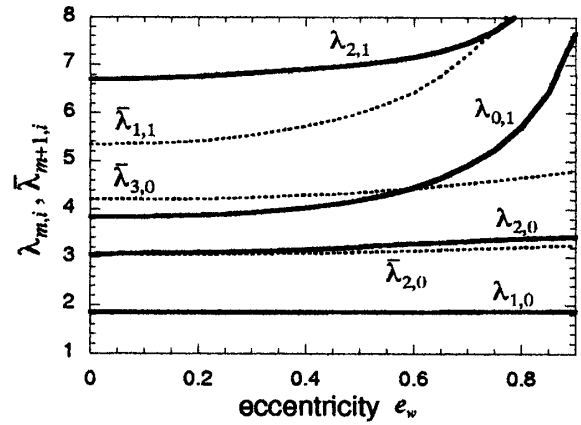


図-4 離心率  $e_w$  と定数  $\lambda_{m,i}$ 、 $\overline{\lambda_{m+1,i}}$

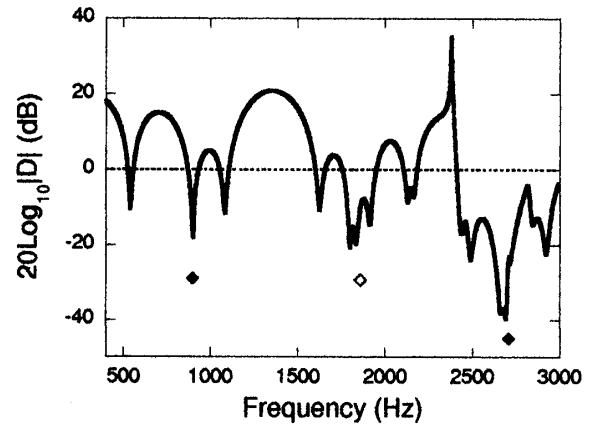


図-5 多孔パイプを挿入しない空洞の式 (23) の計算 ( $e_w = 0.6$ ,  $a_w = 10$  cm,  $l = 30$  cm,  $l_i = l_o = 10$  cm)

$$\Delta_{\text{in}} = 1 + \tilde{Z}_{m,i} \quad (20)$$

$$\Delta_{\text{out}} = (1 - Z_{pn} \Gamma_{m,i}) \Delta_{\text{in}} \quad (21)$$

$$\Theta_m(\xi, \eta, s_{m,i}) = C e_m(\xi, s_{m,i}) c e_m(\eta, s_{m,i}) \quad (22)$$

$Z_w$  は空洞の特性インピーダンス、 $a_w$  は空洞の長軸の半長、記号  $\sum$  は  $\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty}$  の  $m=i=0$  を除いた項を表す。また、 $\lambda_{m,i}$  と  $\overline{\lambda_{m+1,i}}$  は定数で、空洞の離心率  $e_w$  との関係を表すと図-4 のようになる [11]。その他の記号は付録に与えられる。なお、 $\tilde{Z}_{m,i}$  は付録の式 (A.12) に与えられ、多孔パイプのインピーダンスに関する定数である。

### 3. 考 察

1 本の多孔パイプを持つ空洞の四端子定数  $C$  は式 (15) 及び式 (16) のように求められる。これらは (0,0) モードの軸方向の音圧成分と  $(m,i)$  モードの半径方向の音圧成分の重ね合わせから構成されている。ここで、多孔パイプの音響特性を検討するため、空洞内にこれを装着しない場合と装着する場合について考える。

まず、多孔パイプを装着しない場合の式 (3) の計算例を図-5 に示す。式 (3) の定数  $D$  は、図-1 の消音器の尾管の出力が開放したときの入出力の体積速度の比を表しており、本計算では、次式のようにデシベルで表す。

$$20 \log |D| = 20 \log |\cos kl_i| + 20 \log |C_w| + 20 \log |Z_3 \sin kl_0| \quad (23)$$

また、式中の  $C_w$  定数を

$$20 \log |C_w^{\text{in}}| = 20 \log \left| \frac{1}{Z_w} \left/ \left\{ \frac{1}{\sinh(\alpha + jk)l} - \sum (\alpha + jk) \times \frac{H_{m,i}}{\mu_{m,i} \sinh \mu_{m,i}l} \Theta_m(\xi, \eta, s_{m,i}) \right\} \right. \right| \quad (24)$$

とした。これは、式 (15) において多孔パイプに関する項  $\tilde{Z}_{m,i}$  を 0 にすることによって得られた式である。使用する空胴の寸法は  $e_w = 0.6$ ,  $a_w = 10$  cm,  $l = 30$  cm, であり、入力管の長さ  $l_i$  及び尾管の長さ  $l_0$  は、空胴の特性にできるだけ影響を及ぼさないように 10 cm にした。図-5 の谷の部分は消音効果のない範囲であり、その起因となるものは、消音器の入力管、空胴及び尾管部による共振である。図中の ◆印は入力管、◇印は尾管の共振を示し、その他の領域は空胴内の共振である。空胴の共振については、まず式 (24) の軸方向音圧成分の分母  $\sinh(\alpha + jk)l$  が 0 になる周波数で共振を引き起こす。すなわち、

$$\sinh(\alpha + jk)l = 0 \\ \therefore f = (nc/2l) \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (25)$$

のときである。同様に、半径方向の音圧成分は分母の  $\mu_{m,i} \sinh \mu_{m,i}l$  が 0 になる周波数で共振を引き起こす。すなわち

$$\mu_{m,i} \sinh \mu_{m,i}l = 0 \\ \therefore f_{m,i} = \frac{c}{2\pi a_w} \sqrt{\lambda_{m,i}^2 + (n\pi a_w/l)^2} \quad (26)$$

のときである。図-6 の上図は式 (25) 及び式 (26) の計算例を示す。なお、図を見易くするために  $\sin kl$  の値を 10 倍にし、 $\mu_{m,i} \sinh \mu_{m,i}l$  の多くのモードの内、始めに現れるモード (2,0), (0,1) のみを図示した。なお、入力管、尾管の位置がそれぞれ空胴の中心にあるため音圧は長軸及び短軸に対して対称分布をしているのでモード (1,0) の共振は現れない [11]。

図-6 の下図は式 (24) の計算例を示す。破線及び細線はそれぞれ上記のモードの特性を表し、太い実線は

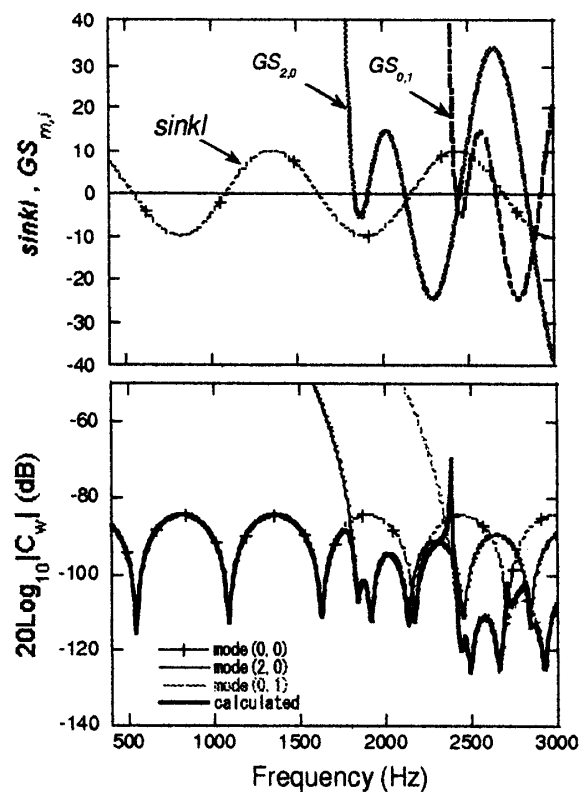


図-6 空胴の共振周波数と  $C$  定数の計算

これらの合成を表している。計算では、減衰定数  $\alpha$  は次式のように用いた [12]。

$$\alpha = 0.02203 \sqrt{f/2cr_0} \quad (27)$$

式中の  $r_0$  は円筒の半径であるが、本研究では円形の長軸と短軸の半長の平均値を用いた。これによる空胴の  $C$  定数の計算値と実測値の比較を図-7 に示す。1,600 Hz 附近の (2,0) モードの第 1 共振以降の周波数領域において若干のレベル差が生じるのは、3,200 Hz 附近の (2,1) モードの影響と平面波領域で実測された上式での減衰定数  $\alpha$  によるものと考えられる。なお、実験では図-8 の実験装置を用いた。空胴の入口側に音源を接し、2本のマイクロホンを空胴の入出力側に装着する。入口部のマイク 1 の音圧を  $P_A$  とし、マイク 2 の音圧を  $P_B$  とすれば、これらの関係は次式となる [9]。

$$20 \log |C_w^{\text{in}}| = 20 \log |P_B/P_A| - 20 \log |Z_0 \sin kl_m| \quad (28)$$

ただし、 $Z_0$  は入力管の特性インピーダンス、 $l_m$  はマイク 1 の位置から空胴の入口までの距離である。

次に、多孔パイプを空胴に装着した場合、式 (15) 又は式 (16) に示されるように、その軸方向成分の共振は式 (24) と同じであるが、半径方向成分の共振は

$$GS_{m,i} = \mu_{m,i} \sinh \mu_{m,i}l + \tilde{Z}_{m,i} \overline{\mu_{m+1,i}} \sinh \overline{\mu_{m+1,i}}l = 0 \quad (29)$$

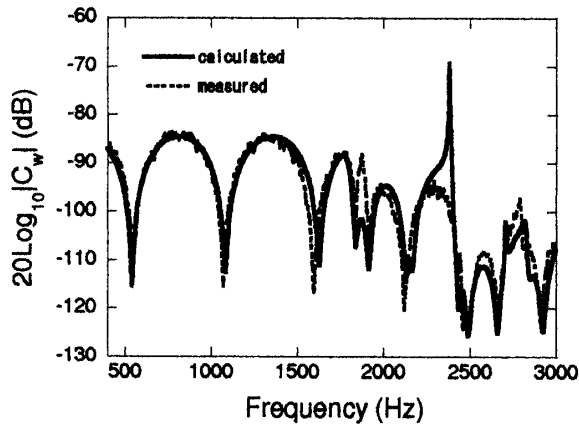
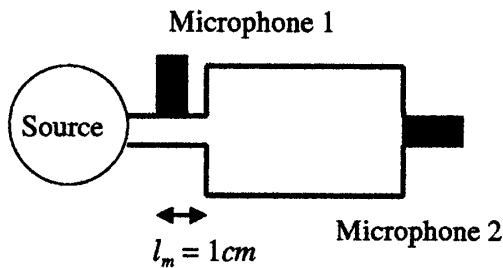
図-7 空胴のみの  $C$  定数の計算値と実測値

図-8 実験装置

のとき生じる。ここで、 $GS_{m,i}$  の共振周波数について考えると、第 1 項である  $\mu_{m,i} \sinh \mu_{m,i}l$  が第 2 項と比べて、はるかに大きい場合には、

$$GS_{m,i} \simeq \mu_{m,i} \sinh \mu_{m,i}l = 0$$

となり、その共振周波数は

$$\therefore f_{m,i}^{(1)} = \frac{c}{2\pi a_w} \sqrt{\lambda_{m,i}^2 + (n\pi a_w/l)^2} \quad (30)$$

すなわち、多孔パイプを挿入しないときの式 (26) と同様である。逆に、第 2 項が第 1 項に比べてはるかに大きい場合には、

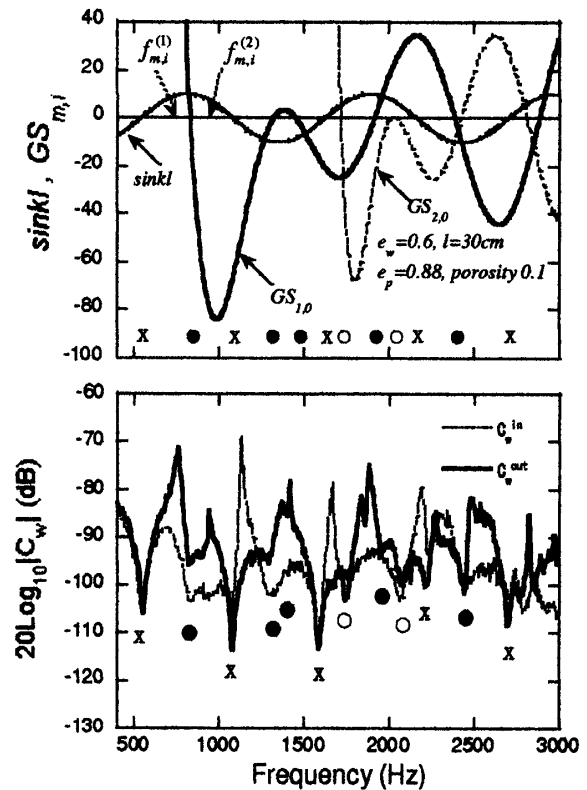
$$GS_{m,i} \simeq \overline{\mu_{m+1,i}} \sinh \overline{\mu_{m+1,i}}l = 0$$

となり、その共振周波数は

$$\therefore f_{m,i}^{(2)} = \frac{c}{2\pi a_w} \sqrt{\lambda_{m+1,i}^2 + (n\pi a_w/l)^2} \quad (31)$$

となる。よって、 $GS_{m,i}$  の共振周波数は  $f_{m,i}^{(1)}$  と  $f_{m,i}^{(2)}$  の間に生じる。

図-9 の上図は式 (25) 及び式 (29) の計算例を示す。使用した多孔パイプは口径 6 mm の孔を一様に分布したもので、長軸は 30 cm、離心率 0.88、開口率、すなわち全体の表面積に対するの孔の総面積は 10% である。なお、図を見易くするために  $\sin kl$  の値を 10 倍にし、 $GS_{m,i}$  の多くのモードの内、始めに現れるモード (1,0)、(2,0) のみを図示した。多孔パイプを装着し

図-9 多孔質エレメントを持つ空胴の共振周波数と  $C$  定数の実測値

た場合、モード (1,0) の第 1 共振が 830 Hz 附近に現れるため平面波の周波数領域が装着しない場合と比べて狭くなっている。この共振は式 (17) に示されるように  $\tilde{Z}_{1,0}$  の値、すなわち多孔パイプの形状、開孔率等によって変化する。

上述の共振周波数を検証するため空胴の定数  $C$  の計測を行い、その結果を図-9 の下図に示す。図の点線は出力音圧を空胴の中心位置で、実線は中心位置から 8 cm 離れた場所で計測した結果である。言い換えれば前者は多孔パイプの中、後者は外の音圧であり、よって点線  $C_w^{\text{in}}$  と実線  $C_w^{\text{out}}$  の実測値は本理論の式 (15) と式 (16) に相当する。図-9 の下図の × 印、● 印及び ○ 印はそれぞれモード (0,0)、モード (1,0) 及びモード (2,0) の共振周波数を示す。これらは上図の × 印、● 印及び ○ 印と比較的に対応している。なお、図-9 の下図の  $C_w^{\text{in}}$  と  $C_w^{\text{out}}$  の共振周波数は理論で示されるように同じであるが、図では  $C_w^{\text{in}}$  の共振が明確に現れないところがある。これは、出力音圧は複数のモードのレベルの重ね合わせによって構成されているため、あるモードの共振レベルが他のモードのレベルに比べて小さい場合はその共振レベルが現れないのである。

図-10 は式 (24) の  $C_w^{\text{in}}$  の計算値と実測値の比較を示した図である。計算では、多孔パイプのインピーダンス  $Z_{\text{pipe}}$  は次式を用いた [付録参照]。

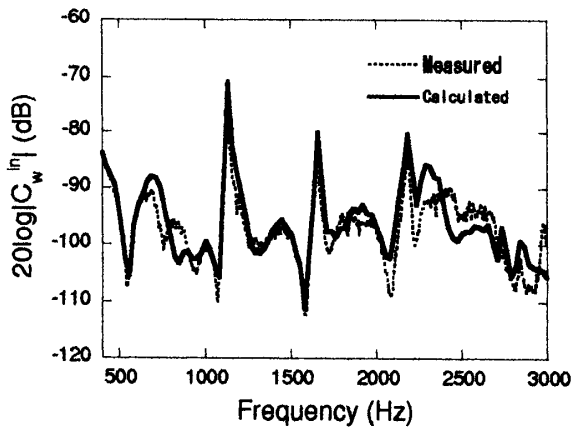


図-10 多孔パイプを持つ空胴の計算値と実測値

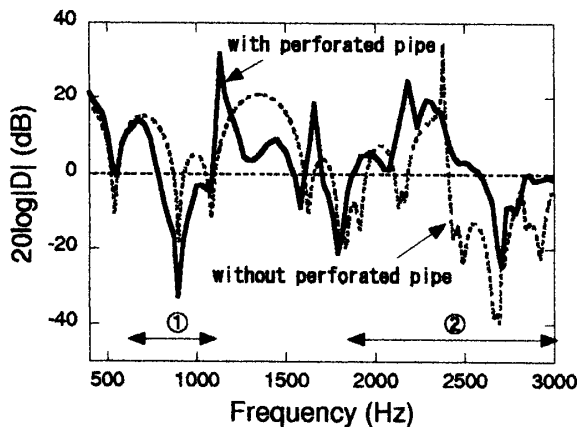


図-11 多孔パイプの有無による空胴の音響特性

$$Z_{\text{pipe}} = \frac{\rho c}{S_f} [6 \times 10^{-3} + jk(t + 0.75d_h)] / \sigma \quad (32)$$

ここでは、 $S_f$  はパイプの表面積、 $t$  はパイプの厚み、 $d_h$  は孔の口径、 $\sigma$  は開孔率を表す。図の実線の計算値と点線の実測値は、2,000 Hz 付近までの周波数領域において比較的一致している。それ以上の周波数領域でレベル差が生じるのはこの領域における式 (32) の  $Z_{\text{pipe}}$  が不適切であると思われる。

次に、多孔パイプの有無による効果について考える。図-11 は多孔パイプを装着しないときの図-5 と装着したときの図-10 を重ね合わせた図である。600 Hz から 1,100 Hz の周波数領域①では、モード (1,0) の共振のため多孔パイプを装着したときの  $D$  特性が小さくなっている。しかし、1,850 Hz から 3,000 Hz の周波数領域②ではかなり改善されている。これは多孔パイプは半径方向音圧成分の低減効果があることを示している。

最後に、出力位置を変化させたときの  $D$  特性を図-12 に示している。点線は出力を空胴の中心位置  $\circ$  に、太線は空胴中心から 11 cm 離れた位置  $\bullet$  に装着したときの特性である。本理論では、前者は式 (15)、後者は式 (16) に対応している。両式の違いは式 (20) の  $\Delta_{\text{in}}$  と式 (21) の  $\Delta_{\text{out}}$  であり、これらは分子に現れるため出

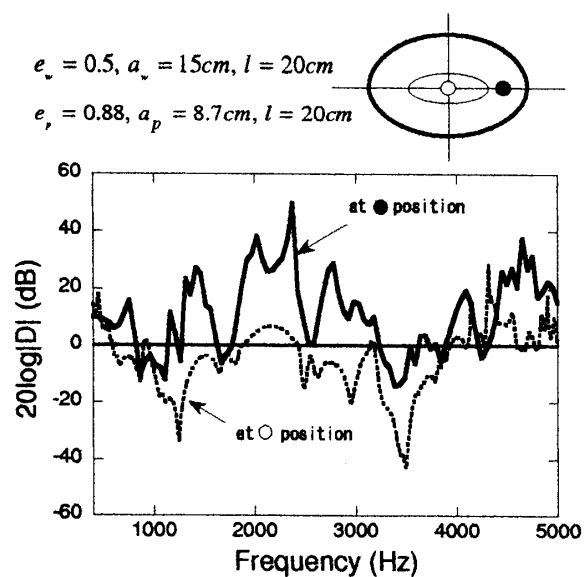


図-12 出力位置によるレベル差

力音圧レベルに影響を及ぼす。 $\Delta_{\text{out}}$  は常に  $\Delta_{\text{in}}$  よりも小さいことより  $\bullet$  位置から出力音圧を取り出した方が有効的である。更に、両式の分子に  $\Theta_m(\xi, \eta, s_{m,i})$  の項が存在し、これは式 (22) に示されるように  $\xi$  及び  $\eta$ 、すなわち空胴出口面上の位置の関数である。従って、任意の  $(m, i)$  モード音圧レベルを低減させる場合、 $\Theta_m(\xi, \eta, s_{m,i})$  が最小値になるような出力位置を選定すればよい。図-12 では、(1,0) モードの  $\Theta_1(\xi, \eta, s_{1,0})$  が最小となるように  $\bullet$  位置を選定した。出力音圧は複数のモードの音圧成分の重ね合わせであるから、あるモードが小さくなると全体のレベルも低下することになる。

#### 4. む す び

多孔パイプの効果を検討するため、これを消音器の空胴に装着しない場合と装着した場合についての理論計算及び実験結果を示した。理論計算では、まず挿入損失に大きく影響される消音器全体の四端子定数  $D$  を波動方程式より求めた。次に、得られた解析結果に基づいて挿入損失の低下に起因される空胴内部の共振を求めた。多孔パイプを空胴に装着したとき、装着しない場合と比べて (1, 0) モードの半径方向音圧成分の共振によって平面波の周波数帯域が狭くなると共に、挿入損失が小さくなっている。一方、多孔パイプは半径方向の音圧成分の共振レベルに対する低減効果があり、これを用いることによって挿入損失が高い周波数領域においてはかなり改善される。また、(1, 0) モードの共振レベルは尾管の設置位置により低減できることを理論及び実験で示した。

実際の消音器では、多孔パイプ及び消音器の空胴の断面は共に円形、あるいはいずれかが円形であるが、

本論文の解析モデルとしてはともにだ円形を使用した。本解析が可能であれば、前者は離心率を 0 にすることによって簡単に求めることができる。言うまでもなく逆の場合は不可能である。後者の解析は困難もしくは不可能と予想されるが一般的な特性はそれほど大きく変わらないと考えられ、従って幾つかの実験結果を本理論解析の補正として加えればその音響特性も容易に得られると思われる。

### 文 献

- [1] 福田基一, “内燃機関の排気消音器に関する基礎研究 (第 1 報, 理論的考察),” 機械学会論文集, pp. 1167-1173 (1960).
- [2] 福田基一, “内燃機関の排気消音器に関する基礎研究 (第 2 報, 尾管の長さ, 径および数の及ぼす影響),” 機械学会論文集, pp. 966-973 (1962).
- [3] J.W. Sullivan and M.J. Crocker, “Analysis of concentric tube resonators having unpartitioned cavities,” *J. Acoust. Soc. Am.*, **64**, 207-215 (1978).
- [4] J.W. Sullivan, “A method for modeling perforated tube muffler components. 1. Theory,” *J. Acoust. Soc. Am.*, **66**, 772-788 (1979).
- [5] K.S. Peat, “A numerical decoupling analysis of perforated pipe silencer elements,” *J. Sound Vib.*, **123**, 199-212 (1988).
- [6] H. Luo, C.C. Tse and Y.N. Chen, “Modeling and applications of partially perforated intruding tube mufflers,” *Appl. Acoust.*, **44**, 99-116 (1995).
- [7] C.N. Wang, “A numerical scheme for the analysis of perforated intruding tube muffler components,” *Appl. Acoust.*, **44**, 275-286 (1995).
- [8] G.R. Gogate and M.L. Munjal, “Analytical and experimental aeroacoustic studies of open-ended three-duct perforated elements used in mufflers,” *J. Acoust. Soc. Am.*, **97**, 2917-2927 (1995).
- [9] 福田基一, 奥田襄介, 騒音対策と消音設計 (共立出版, 東京, 1973), pp. 173, 179, 196.
- [10] N. McLachlan, *Theory and Application of Mathieu Function* (Clarendon Press, Oxford, 1951).
- [11] N.M. Cuong and J. Okda, “On fitting position of inlet and outlet pipes to elliptic cylindrical muffler chambers,” *J. Acoust. Soc. Jpn. (E)*, **2**, 71-78 (1981).
- [12] ASTM E1050-86, “Standard test method for impedance and absorption of acoustical materials using a tube, two microphones, and a digital frequency analysis system,” American Society for Testing Materials, Philadelphia, PA (1986).
- [13] M.L. Munjal, *Acoustics of Ducts and Mufflers* (John Wiley & Sons, New York, 1987).

### 付 録

(1) 多孔パイプ内側と外側の速度ポテンシャルの計算

まず, 式 (8) の条件 [2] より

$$B_i = A_i \exp(2\mu l) \quad (\text{A.1})$$

これを式 (5) に代入すれば次式が得られる。

$$\phi_{\text{in}} = \sum_{m=0}^{\infty} A_i f(z, \mu) C e_m(\xi, s) c e_m(\eta, s) \quad (\text{A.2})$$

ただし

$$f(z, \mu) = \exp(\mu z) + \exp(2\mu l) \exp(-\mu z) \quad (\text{A.3})$$

である。同様に, 式 (10) の境界条件 [4] より  $B_0$  を求め, 式 (5) に代入すれば

$$\begin{aligned} \phi_{\text{out}} = & \sum_{m=0}^{\infty} C_m^0 f(z, \mu) C e_m(\xi, s) c e_m(\eta, s) \\ & + \sum_{m=0}^{\infty} S_{m+1}^0 f(z, \mu) S e_{m+1}(\xi, s) \\ & \times s e_{m+1}(\eta, s) \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

となる。次に, 式 (9) の境界条件 [3] より

$$\begin{aligned} & \sum_{m=0}^{\infty} C_m^0 f(z, \mu) C e'_m(\xi_w, s) c e_m(\eta, s) \\ & + \sum_{m=0}^{\infty} S_{m+1}^0 f(z, \mu) S e'_{m+1}(\xi_w, s) s e_{m+1}(\eta, s) \\ & = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

となり, 上式が成り立つために

$$C e'_m(\xi_w, s) = \left. \frac{\partial C e_m(\xi, s)}{\partial \xi} \right|_{\xi=\xi_w} = 0 \quad (\text{A.6})$$

及び

$$S e'_{m+1}(\xi_w, s) = \left. \frac{\partial S e_{m+1}(\xi, s)}{\partial \xi} \right|_{\xi=\xi_w} = 0 \quad (\text{A.7})$$

の必要がある。この両式の正根を  $s_{m,i}$  及び  $\overline{s_{m+1,i}}$  ( $i = 0, 1, 2, \dots$ ) とし, また, これらに対応する  $\mu$  を  $\mu_{m,i}$  及び  $\overline{\mu_{m+1,i}}$  とすれば,  $\phi_{\text{in}}^a$  と  $\phi_{\text{in}}^b$  は次式のようにになる。

$$\begin{aligned} \phi_{\text{in}} = & \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} A_{m,i} f(z, \mu_{m,i}) \\ & C e_m(\xi, s_{m,i}) c e_m(\eta, s_{m,i}) \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

$$\begin{aligned} \phi_{\text{out}} = & \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} C_{m,i} f(z, \mu_{m,i}) C e_m(\xi, s_{m,i}) \\ & c e_m(\eta, s_{m,i}) + \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} (S_{m+1,i} f(z, \overline{\mu_{m+1,i}}) \\ & S e_{m+1}(\xi, \overline{s_{m+1,i}}) s e_{m+1}(\eta, \overline{s_{m+1,i}})) \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

次に, 式 (13) の境界条件 [5] より  $A_{m,i}$  を算出し, 更に, 式 (14) の境界条件 [6] 及び式 (7) の境界条件 [1] を適用すれば次の関係式を得る。

$$\begin{aligned} & C_{m,i} f'(z, \mu_{m,i}) C e_m(\xi, s_{m,i}) c e_m(\eta, s_{m,i}) \Big|_{z=0} \\ & = -V_0 F_0(\xi, \eta) \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

## 多孔パイプを持つ消音器の減音効果の解析

上式の定数  $C_{m,i}$  を求めるため両辺に  $Ce_m(\xi, s_{m,i})ce_m(\eta, s_{m,i})(\cosh 2\xi - \cos 2\eta)$  を掛けて、 $\xi$  を  $0 \sim \xi_w$  について、 $\eta$  を  $0 \sim 2\pi$  について積分する。最終的に、 $\phi_{in}$  は次式のようになる。

$$\phi_{in} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} V_0 H_{m,i} \Delta_{in} \Theta_m(\xi, \eta, s_{m,i}) / \left( \frac{\mu_{m,i} \sinh \mu_{m,i} l}{\cosh \mu_{m,i} (l-z)} + \tilde{Z}_{m,i} \frac{\overline{\mu_{m+1,i}} \sinh \overline{\mu_{m+1,i}} l}{\cosh \overline{\mu_{m+1,i}} (l-z)} \right) \quad (\text{A.11})$$

ただし

$$\tilde{Z}_{m,i} = \frac{Z_{pn}(c_2 + Z_{pn})}{(c_1 + Z_{pn})(c_1 - c_2 - Z_{pn})} \quad (\text{A.12})$$

$$Z_{pn} = \frac{Z_{pipe}}{(jk\rho c)} \quad (\text{A.13})$$

$$c_1 = \frac{Ce_m(\xi_p, s_{m,i})}{Ce'_m(\xi_p, s_{m,i})} \quad (\text{A.14})$$

$$c_2 = \frac{Se_{m+1}(\xi_p, \overline{s_{m+1,i}})}{Se'_{m+1}(\xi_p, \overline{s_{m+1,i}})} \quad (\text{A.15})$$

$$\Delta_{in} = (1 + \tilde{Z}_{m,i}) \quad (\text{A.16})$$

$$\Theta_m(\xi, \eta, s_{m,i}) = Ce_m(\xi, s_{m,i})ce_m(\eta, s_{m,i}) \quad (\text{A.17})$$

$$H_{m,i} = \frac{\int_0^{\xi_0} \int_0^{2\pi} \Theta_m(\xi, \eta, s_{m,i}) g(\xi, \eta) d\xi d\eta}{\int_0^{\xi_w} \int_0^{2\pi} \Theta_m^2(\xi, \eta, s_{m,i}) g(\xi, \eta) d\xi d\eta} \quad (\text{A.18})$$

$$g(\xi, \eta) = \cosh 2\xi - \cos 2\eta \quad (\text{A.19})$$

同様の計算方法で  $\phi_{out}$  は次式のように求められる

$$\phi_{out} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} V_0 H_{m,i} \Delta_{out} \Theta_m(\xi, \eta, s_{m,i}) / \left( \frac{\mu_{m,i} \sinh \mu_{m,i} l}{\cosh \mu_{m,i} (l-z)} + \tilde{Z}_{m,i} \frac{\overline{\mu_{m+1,i}} \sinh \overline{\mu_{m+1,i}} l}{\cosh \overline{\mu_{m+1,i}} (l-z)} \right) \quad (\text{A.20})$$

ただし、

$$\Delta_{out} = \{1 - Z_{pipe} \Gamma_{m,i} / (jk\rho c)\} \Delta_{in} \quad (\text{A.21})$$

$$\Gamma_{m,i} = \frac{1}{(c_1 - c_2)} \times \left( 1 - \frac{Ce'_m(\xi, s_{m,i}) Se_m(\xi, s_{m,i})}{Ce_m(\xi, s_{m,i}) Se'_m(\xi, s_{m,i})} \right) \quad (\text{A.22})$$

(2) 空胴の出口側の四端子定数  $C$  の計算

ここで、まず式 (A.11) の  $\phi_{in}$  に対応した空胴の出口側の音圧  $P_{in}^l$  を求める。 $U_0 = V_0 S_0$  を入口の体積速度とすれば、次式により  $P_{in}^l$  は

$$P_{in}^l = jk\rho c(\phi_{in})_{z=l} = jZ_w U_0 \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{kH_{m,i}}{GS_{m,i}} \times \Delta_{in} \Theta_m(\xi, \eta, s_{m,i}) \quad (\text{A.23})$$

となる。

ただし、

$$GS_{m,i} = \mu_{m,i} \sinh \mu_{m,i} l + \tilde{Z}_{m,i} \overline{\mu_{m+1,i}} \sinh \overline{\mu_{m+1,i}} l \quad (\text{A.24})$$

更に、 $m = i = 0$  の項を展開すれば

$$P_{in}^l = jZ_w U_0 \left\{ -\frac{1}{\sin kl} + \sum \frac{kH_{m,i}}{GS_{m,i}} \Delta_{in} \Theta_m(\xi, \eta, s_{m,i}) \right\} \quad (\text{A.25})$$

となる。次に、四端子定数  $C$  を求めると

$$C = \frac{U_0}{P_{in}^l} = j \frac{1}{Z_w} / \left\{ \frac{1}{\sin kl} - \sum \left( \frac{kH_{m,i} \Delta_{in} \Theta_m(\xi, \eta, s_{m,i})}{\mu_{m,i} \sinh \mu_{m,i} l} + \frac{kH_{m,i} \Delta_{in} \Theta_m(\xi, \eta, s_{m,i})}{\tilde{Z}_{m,i} \overline{\mu_{m+1,i}} \sinh \overline{\mu_{m+1,i}} l} \right) \right\} \quad (\text{A.26})$$

となる。同様に  $P_{out}^l$  は次式のようになる。

$$C = \frac{U_0}{P_{out}^l} = j \frac{1}{Z_w} / \left\{ \frac{1}{\sin kl} - \sum \left( \frac{kH_{m,i} \Delta_{out} \Theta_m(\xi, \eta, s_{m,i})}{\mu_{m,i} \sinh \mu_{m,i} l} + \frac{kH_{m,i} \Delta_{out} \Theta_m(\xi, \eta, s_{m,i})}{\tilde{Z}_{m,i} \overline{\mu_{m+1,i}} \sinh \overline{\mu_{m+1,i}} l} \right) \right\} \quad (\text{A.27})$$

## (3) 孔あきパイプのインピーダンスについて

本論文では次のようにして孔あきパイプのインピーダンス  $Z_{pipe}$  を定式化した。孔あきパイプの厚みを  $t$ 、パイプの内側の音圧、体積速度をそれぞれ  $P_i$ 、 $U_i$  とし、パイプの外側を  $P_0$ 、 $U_0$  とする。パイプの表面積を  $S_f$  とし、パイプには複数の孔が一様にあけられ、それらの孔の全面積を  $S_h$  とする。一般に孔の直径が波長に比べて十分に小さい場合、孔を通過する波は平面波と考えられる。従って減衰定数  $\alpha$  を考慮した四端子定数は



$$\begin{bmatrix} P_i \\ U_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh(\alpha + jk)t & Z_h \sinh(\alpha + jk)t \\ Z_h^{-1} \sinh(\alpha + jk)t & \cosh(\alpha + jk)t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_0 \\ U_0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.28})$$

となる。ただし、 $Z_h = \rho c / S_h$  である。従って、パイプの内側から見たインピーダンスは

$$\begin{aligned} Z_{\text{pipe}} &= \frac{P_i}{U_i} \simeq Z_h \tanh(\alpha + jk)t \\ &\simeq Z_h(\alpha + jk)t \end{aligned} \quad (\text{A.29})$$

として求められる。上式に開口率  $S_h/S_f$  を導入し、更にパイプの等価な厚み  $t_0 = t + 0.75d$  ( $d$ : 孔の直径) 及び参考文献 [13] の  $\alpha$  を考慮すれば、孔あきパイプのインピーダンスは次式のようにになる。

$$Z_{\text{pipe}} = \frac{\rho c}{S_f} [6 \times 10^{-3} + jk(t + 0.75d_h)] / \sigma \quad (\text{A.30})$$