

数理モデルの援用による数学授業開発

谷川 智幸^{*1}・井上 直哉^{*2}・澁谷 明人^{*3}

Developing Mathematical Studies Lessons by means of Mathematical Modeling

Tomoyuki TANIGAWA, Naoya INOUE and Akihito SHIBUYA

Abstract

The object of this paper is to show that it is useful to apply mathematical modeling (a class of first order differential equations) to mathematics education. Specifically, through students in high school learn mathematical modelling appearing in social or natural phenomena they are able to appreciate the value of calculus, and to foster their attitude toward to making use of the acquired mathematical understanding and ability for their thinking and judging.

キーワード：大学と高等学校の連携 微分方程式 数学に対する興味・関心 数学のよさ
数学の日常生活に対する有用性

1. 本研究の目的

高等学校学習指導要領解説数学編理数編([3])によると、高等学校における数学教育の意義について、次のようなことが記述されている。

国際化や情報化が進展し、また科学技術の発展が著しい今日、これらの社会の変化に対応して、自ら学び自ら考える力などの「生きる力」を育成することは引き続き重要である。数学教育においても、小学校、中学校及び高等学校を通じて、心身の発達に応じ、社会生活を営む上で必要な一般的な教養としての数学的資質・能力などを育て、将来、どのような進路に進んでも必要に応じ積極的に数学にかかわる態度を身に付けさせることは重要である。高等学校における数学教育においては、数学的な知識や技能の「量」だけでなく、いかにしてそれらを身に付けたのかなど学習の「質」を問う必要がある。それは、様々な場面で身に付けた知識や技能を活用しようとするとき、それらを身に付けたときの学習の「質」が影響するからである。高等学校における数学の学習を通して、数学的な見方や考え方のよさなどの数学のよさを認識させ、将来の学習や生活に数学を積極的に活用できるようにするとともに、知的好奇心、

豊かな感性、健全な論批判力、直観力、洞察力、論理的な思考力、想像力、根拠強く考え続ける力などの創造性の基礎を養うことや根拠に基づき自分で判断する力を育成することなどが特に大切である。数学は人間の思惟により創り出されるものであり、数学的な事実に関しては誰もが対等な立場で議論をすることができる。そのような議論により、客観的・論理的に物事を説明する力は育成される。このような力は、他教科などの学習でも社会生活でも大いに役立ち、国際化や情報化が進展する今日のような時代においてとりわけ重要な能力であるといえる。また、数学は科学の言葉と言われる。それは、自然科学の様々な分野で様々な事象が、数学的に表現し処理されて研究されることを表している。しかし、現在、数学は、自然科学のみならず、社会科学や人文科学でも積極的に活用されている。これは、数学が抽象的で体系的であることによる。抽象的であるがゆえにその前提を満たすあらゆる事柄にその結果を適用することができ、体系的であるがゆえにその前提が明確でそれを満たすか否かの判断がしやすいのである。このような特長により、数学は生活の中で重要な役割を果たしており、それゆえ高等学校で数学を学ぶことは社会をよりよく生きる知恵を得ることにつながるのである。〈中略〉高等学校数学科では、数学の学習を単に内容の習得にとどめるのではなく、数学的活動を重視し、すべての高校生の人間形成に資する数学教育を意図している。

*1 熊本大学教育学部

*2 熊本大学大学院教育学研究科

*3 秋田県立秋田高等学校

この学習指導要領解説に沿うような取り組みは著者が知る限り、全国の大学と高等学校が連携した授業実践の先行研究として、生物のミツバチの巣の表面積を題材にした他教科の内容を活用した実践、2次関数の最大・最小を題材にした問題の提示方法・展開を工夫した実践、曲線に接線を引く歴史的な手法を題材にした数学史を取り入れた実践などがある（岩井[2]）。また、2次関数の平行移動および2次関数の接線の傾きを題材にした中・高の関連を重視した教材の開発とその実践、地理の地図の図法を題材にした他教科との関連を重視した教材の開発とその実践なども行われている（渡辺[5]）。その他、平成24年から実施されている“課題学習”の数学活用問題の素材例として、平山（[1]）が下記の内容の実施を提唱している。

1. 金利計算（ローン計算、利息計算、税金計算、為替計算など）
⇒ 指数計算、等比数列の応用
2. 健康管理計算（BMI、運動、食事のカロリー計算など）
⇒ 1次関数、2次関数、不等式の利用
3. エコ計算問題（エコカー関係の計算、冷暖房費、地球温暖化問題、発電計算など）
⇒ 3角比、相似関係の利用
4. 測量問題（地球の円周の長さ、山の高さ、建物の高さ、各地点間の距離）
⇒ 3角比、相似関係の利用
5. スポーツ問題（テニスのサービス、バスケットボールのフリースローなど）
⇒ 3角比、2次関数、相似の利用
6. 折り返し問題（紙の折り返し、針金の折り曲げ、テープの折り返し）
⇒ 3角比、2次関数の応用
7. 統計問題（新聞、インターネット、情報誌など）
⇒ グラフ、確率などの利用

しかし、実際の教育現場はこのような趣旨が十分に考慮されないまま大学入試対策に重点を置いたものとなっているため、数学の学習は単なる問題の解法の記憶に留まり、数学の学習に興味・関心を見出せない生徒が多く見られる。これが数学を学ぶ意欲

の低下の要因だと考えられる。

この経緯を踏まえ、本研究では、数理モデルを用いることにより実際に日常生活の中に見られる自然・社会現象や物理現象を数理的に考察する場面を設け、数学に対する興味・関心を高め、数学のよさや数学の有用性を実感させることで学ぶ意欲を高めることをねらいとしている。

2. 指導内容及び方法

第1節で述べた目的を遂行するための指導内容として、今回は、自然・社会現象を記述する数理モデルのうち代表的な存在である微分方程式を取り扱った。微分方程式は線形型と非線形型に大別されるが、線形微分方程式の変数分離形、同次形、完全形、1階線形などの比較的簡単なものは、数学Ⅲで学習する不定積分の計算方法を習得していれば、求積法を活用することによって一般解やある初期条件の下での特殊解を導くことができる。また、この求積法は、現在では積分の応用として高校の教育課程において取り扱われている。今回の授業実践は、福岡県の某私立高等学校の第2学年生を対象として行った。このクラスは、第2学年で履修することになっている数学Ⅱの基礎解析学（微分積分学）は既習しているが、微分方程式の解として現れる代表的な指数関数、対数関数、三角関数などの関数に対する微分積分法は学習していない。このことを踏まえ、本授業実践の第1時間目の前半では、微分積分学の基本事項の復習として、現在の世界記録保持者ウサイン・ボルト（ジャマイカ、1986年～）の100m走を例に挙げ、100m内のある地点における瞬間的な速さを分析し微分の定義を改めて確認させたい。第1時間目の後半には、微分方程式が自然・社会現象を記述する数理モデルで数理科学上重要な地位にあることを述べ、第3時間目に医学、とりわけ我々の日常生活に密接な関係がある“健康（ダイエット法）”の事象解明について微分方程式の援用を予定していることに言及し、取り扱う予定の“変数分離形”と“1階線形”微分方程式の求積法を紹介する。

第2時間目の前半では、微分積分学において主要な関数でかつ微分方程式の解法で現れる指数関数 e^{kt} （ e は、 $e = 2.71828\cdots$ を満たすEuler数、 k はある定数である。）の歴史的な背景を教授するところから始める（桜井[4]）。後半は、上記の関数 e^t の導関数が、元の関数と同じであるという重要な事実を認識させるために演習形式で証明し、“合成関数の微分法”と“微分積分学の基本定理”を簡略的に教授しながら関数 e^{kt} 、 $k = 1, 2, \cdots$ の微分と積分を帰

納的に求める作業を行う。

第3時間目の前半は、ダイエットに関する基礎用語の解説（基礎代謝基準値，生活活動指数など（参考URL[1],[2]））を行う。前述した通り「ある条件下での体重の減少度」を計る微分方程式を立式し，次の2つの場合を順序立てて考察する。

1. 健康上の理由からダイエットを必要とし，その開始時刻から絶食する場合（数学的考察のために必要）。
2. 上記と同じく健康上の理由からダイエットを行い，毎日2000kcalの食事を摂取する場合
例・ご飯1杯：約186kcal,
・うどん1玉：約242kcal,
・カレーライス1人前：約800kcalなど。

1. 絶食の場合，毎日の体重減少を記述する微分方程式は，次の変数分離形

$$\frac{dw(t)}{dt} = -0.005w(t), \quad t \geq 0$$

（ $w(t)$ ：ある時刻における体重（kg））

で表現できることを理解させ，求積法により具体的な解を求め数学的考察（解の分析）の理解を促す。

次に，2. 毎日2000kcalの食事を摂取する場合の数理モデルは，次の1階線形微分方程式

$$\frac{dw(t)}{dt} = -0.005w(t) + 0.285, \quad t \geq 0$$

であることを同じく認識させ，求積法を用いて具体的な解を求め得られた解の分析を行う。

以上の指導内容と方法で，普段学習している数学が日常生活と深く関係していることを生徒に認識させることによって，学習指導要領解説にある“数学

のよさ”や“数学の有用性”を実感させ，数学に対する興味や関心が向上するように試みたい。

解法例：

(1)変数分離形：

$$\frac{dy}{dt} = f(t), \quad t \geq 0 \quad (f(t) : \text{連続関数 on } [0, \infty))$$

変数を分離する。

$$dy = f(t) dt$$

上式を積分する。

$$y(t) = \int f(t) dt + c_1 \quad (c_1 : \text{任意定数})$$

(2)1階線形微分方程式：

$$\frac{dy}{dt} + P(t)y = Q(t), \quad t \geq 0$$

（ $P(t)$ ， $Q(t)$ ：連続関数 on $[0, \infty)$ ）

両辺に指数関数

$$\exp \left\{ \int P(t) dt \right\}$$

を掛ける。

$$\begin{aligned} \exp \left\{ \int P(t) dt \right\} \frac{dy}{dt} + \exp \left\{ \int P(t) dt \right\} y \\ = Q(t) \exp \left\{ \int P(t) dt \right\} \end{aligned}$$

積の微分法により，

$$\frac{d}{dt} \left\{ \exp \left(\int P(t) dt \right) y \right\} = Q(t) \exp \left\{ \int P(t) dt \right\}$$

を得る。両辺を積分する。

$$y(t) = \exp \left[- \int P(t) dt \right] \left[\int Q(t) \exp \left\{ \int P(t) dt \right\} dt + c_2 \right]$$

（ c_2 ：任意定数）

可能ならば，上記の解法を授業実践に取り入れ，生徒に分かり易く解説することを心掛ける。

3. 授業の指導案及び実践

授業実践は平成28年1月13日(水)から14日(木)にかけて3単位時間，福岡県内の私立高等学校第2学年の1クラス（女子20名）で実施した。授業の流れと評価の観点は，以下のようものである。

○学習過程 [評価の観点]

[A] 関心・意欲・態度	[B] 数学的な見方や考え方	[C] 数学的な技能	[D] 知識・理解
自然・社会現象を記述する数理モデルである微分方程式に対する解析手法に関心をもつとともに，数学のよさと有用性の認識を高めることができる。	与えられた初期値問題の解を導き，得られた解の分析及び思考過程を多面的・発展的に考え，数学的な見方や考え方を身に付けている。	求積法の考え方をを用い，微分方程式の解を数学的に表現・処理し，事象を説明する方法などの技能を身に付けている。	微分方程式の解における基本的な概念，原理・法則，用語・記号などを体系的に理解し，基礎的な知識を身に付けている。

○指導案

・ 1 時間目

日時： 1 月 13 日(水) 13 時 25 分～14 時 15 分

過 程	配 当	学習活動	授業 形態	教師の指導・支援	評価の 観点
導 入	15 分	<p>1. 微分の復習をする.</p> <p>(1) 現在の世界記録保持者ウサイン・ボルトの 100m の具体例を用いて, 関数 $f(t)$ の導関数 $f'(t)$ が何を意味しているかを理解する.</p> <p>(2) 微分の定義を思い出させるために図を用いて, その数式が関数 $f(t)$ の微分を表現していることを直観的に確かめる.</p> <p>(3) 例として $f(t) = t^2$ を定義に従って微分し, 関数 $f(t) = t^n$ のとき, $f'(t) = nt^{n-1}$ が成立つのも定義から得られたものだと復習する.</p>	全体	<p>・生徒がイメージしやすいように図を用いて説明する.</p> $f'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}$	<p>[A 関]</p> <p>[B 見]</p> <p>[B 考]</p>
	30 分	<p>1. 微分方程式について学習する.</p> <p>(1) 微分方程式とは何か, なぜ微分方程式を考えるのかを学習する.</p> <p>(2) 実際に変数分離形の微分方程式の解法を見て, ワークシートに書き込む.</p> $f'(t) = kf(t) \quad (k: \text{定数})$	全体	<p>・美術品の真贋問題やダイエットなどに対する内容の例を紹介して, 数学が日常生活と密接に関わっていることを説明する.</p> <p>・微分方程式を解く過程で, 微分積分法を学ぶ意義を感じられるように指導する.</p> <p>・まだ習っていない関数の微分法積分法や自然対数, e (オイラー数) については深入りせずに説明する.</p>	<p>[B 見]</p> <p>[C 技]</p>
ま と め	5 分	<p>2. 本時のまとめ</p> <p>本時の復習を行い, 数学と日常生活との関わりを再確認する.</p>	全体	<p>・次の時間に微分方程式を考える際に重要な e (オイラー数) の説明することを示唆する.</p>	[A 態]

・ 2 時間目

日時： 1 月14日(木) 13時25分～14時15分

過 程	配 当	学習活動	授業 形態	教師の指導・支援	評価の 観点
導 入	10 分	1. 年利の話から e の歴史を知り, $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + n)^{\frac{1}{n}} = 2.71828 \dots$ という e の定義を表すとともに理解する.	全体	・実際に $n \rightarrow \infty$ となるように n に数字を代入し, その値が 2.71828... に近似していくことを, 表を用いて確認させる.	[A 意]
展 開	35 分	2. 本時の課題について考える. (1) 代表的な関数を列挙する. $f(t) = t^2, f(t) = t^3, \dots, f(t) = t^n$; $f(t) = \sin t, f(t) = \cos t, f(t) = \tan t$; $f(t) = \log_a t$ ($a > 0, a \neq 1$); 特に, $a = e$ のとき, $f(t) = \log_e t = \log t$; $f(t) = a^t$; 特に, $a = e$ のとき, $f(t) = e^t$. 3. $f(t) = e^t$ に対して微分と積分を行う. (1) $f(t) = e^{kt}$ ($k = 1, 2, \dots$) の微分に関して学習する. (2) 微分積分学の基本定理を用いて, $f(t) = e^t, f(t) = e^{2t}, \dots, f(t) = e^{kt}$ の積分を考える.	全体 個人 全体	・その関数がどのような事象を表しているかを説明し, 関数として捉えられるようにする. ・関数 $f(t) = e^t$ が微分しても形が変わらない特別な関数であることを強調する. ・証明に必要な変数変換の数式を提示して, 既習事項で解けそうな部分は解けるようにする. ・微分積分学の基本定理について説明し, 微分して $f(t) = e^{kt}$ となるような関数を求めさせる.	[D 知] [C 技] [C 技] [B 見]
ま と め	5 分	3. 本時の振り返りを行う.	全体	・次の授業でポイントとなる $f(t) = e^{kt}$ の微分, 積分について振り返らせる.	[A 態]

・ 3 時間目

日時： 1 月 14 日(木) 15 時 50 分～16 時 40 分

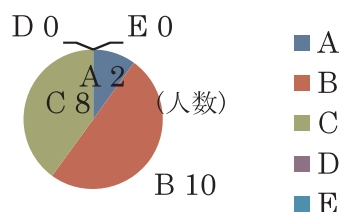
過 程	配 当	学習活動	授業 形態	教師の指導・支援	評価の 観点
導 入	5 分	1. ダイエット法の基礎用語を理解する.	全体	・微分方程式を立てるために、ダイエット法の基礎用語を説明する.	[A 意]
展 開	35 分	<p>2. 本時の課題について考える.</p> <p>(1) 授業者である井上の体重で絶食の場合の微分方程式を立て、得られた微分方程式が変数分離形となることを確認する.</p> $\frac{dw(t)}{dt} = -0.005w(t)$ <p>(2) 微分方程式を解いて、目標体重になるのにかかる日数を導き理解する.</p> <p>(約 80 kg ⇒ 約 70 kg : 必要な日数 25 日)</p> <p>(3) 井上の体重で毎日 2000kcal 摂取した場合の微分方程式を立て、得られた微分方程式が次の 1 階線形微分方程式となることを確認する.</p> $\frac{dw(t)}{dt} = -0.005w(t) + 0.285$ <p>(4) 微分方程式を解いて、毎日 2000kcal 摂取した場合は目標体重になるのにかかる日数と把握する.</p> <p>(約 80 kg ⇒ 約 70 kg : 必要な日数 115 日)</p>	全体	<p>・変数分離形の解法をワークシートを用いて復習させる.</p> <p>・$w(t)$: 井上のある時刻における体重(kg)であることを確認させる.</p> <p>・得られた解がどのような挙動をとるか、グラフから直観的に理解させる.</p> <p>・変数分離形と対応させて説明する.</p> <p>・1 階線形微分方程式の解法に関しては詳しく見せない.</p>	<p>[B 見]</p> <p>[D 理]</p> <p>[B 見]</p> <p>[D 理]</p>
ま と め	10 分	3. 本時の振り返りを行い、2 日間の授業実践の感想をアンケートに記入する.	全体	・微分方程式を用いることで体重変化だけでなく、その他にもたくさんの事象を数学的に捉えることができることを説明する.	[A 関]

4. アンケートの結果

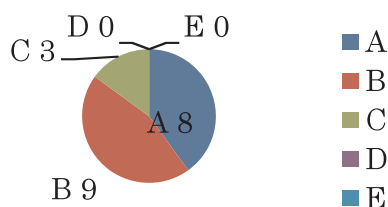
今回の授業実践の分析の際に使用したアンケート、及びその回答の結果を以下に示す. (1)から(8)までの各質問項目は 5 段階評価で回答を求めるものであり、A が肯定的評価で、E が否定的評価となっている (A : よくできた, B : できた, C : どちらでもない, D : あまりできなかった, E : できなかった). (9) は自由記述によるものである. アンケートの回収数は 20 で、段階ごとに回収数を円グラフと表を用いて表示する.

【各質問項目とその回答】

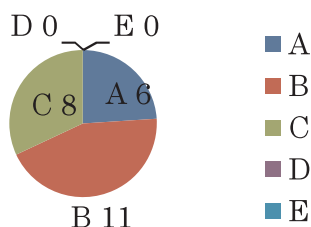
- (1) 微分方程式を学習することで微分方程式や微分、積分を学習することに意義を感じたか。



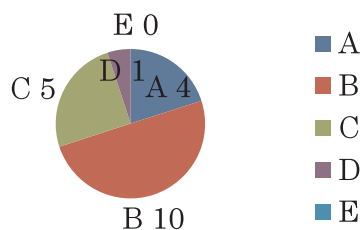
- (2) 微分方程式により、体重の減少が表現できることについて興味・関心を抱いたか。



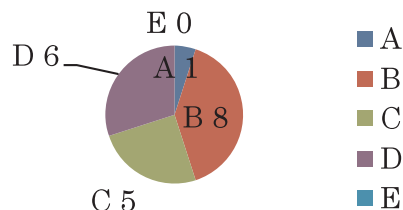
- (3) 微分方程式の学習を通して、数学が身近な日常生活に有効であることを実感できたか。



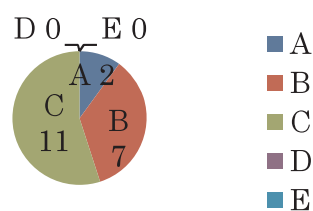
- (4) 微分方程式が未来予測を可能にすることについて興味・関心を抱いたか。



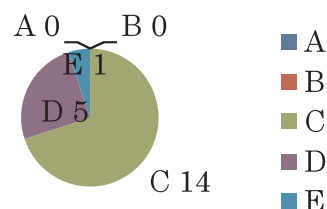
- (5) e (オイラー数) とはなにかを理解することができたか。



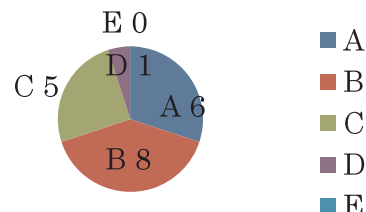
- (6) 内容に興味・関心がもてたか。



- (7) 内容の難易度は適切であったか。



- (8) 例及び演習問題は内容の理解に役立ったか。



- (9) 感想

・数学が身近な生活に役立つと知れて楽しかった。
・ダイエットと微分が関係していることに驚いた。

- ・意味なく習っていると思っていた数学が大事だと分かって良かった。
- ・微分の意味を考えたことがなかったけど、これから数学を考える良いきっかけになった。
- ・数学にちょっと親近感が湧いた。
- ・内容は難しくて理解できなかった。
- ・微分方程式の計算は難しかった。
- ・分からない部分が多く、難しかった。

5. 授業実践の分析とまとめ

第1時間目の前半の世界記録保持者ウサイン・ボルトの100m走を基に微分法の復習した内容に対しては、生徒達が頷く面も多々あったため“微分法の復習”に関しては成功したと思われる。しかし、後半の微分方程式の有用性と求積法の紹介では、アンケートの(1), (3), (4), (9)にあるように概ね生徒は理解しているようだが、微分方程式の解を導く過程を詳細に述べなかったため、生徒の表情から微分方程式に対する抵抗や戸惑いを感じ、その後の授業実践に悪い影響を与えたように思えた。第2時間目は、Euler数“ e ”に特化した授業であったが、アンケート(5)から生徒達はあまり理解できなかったと思われる。Euler数に対する内容理解の授業に関しては、今後の課題となった。本研究の主である第3時間目の授業に対しては、アンケート(2)-(4), (6), (9)から微分方程式の有用性を理解した上で数学に対する興味・関心と学ぶ意欲が向上したのではないかと思われる。また、アンケート(7)から本授業実践は、やや難しいと思われるためできるだけ理解し易くするための創意工夫が必要であることが分かった。

6. 今後の課題

今回の授業実践を通して、数学が日常生活に有用であることを実感し、少しでも数学を学ぶ意欲を向上させることができたのではないと思われる。今回の指導内容で記述したのは微分方程式に限定したものであったが、第1節の“はじめに”において述べたように日常生活には、多種多様の数学が活用されている。このことを踏まえ数学の学習を単なる問題の解法の記憶に留まることにならないように指導し、“数学のよさ”と“数学を学習する意義”を常に

認識させることができるような創意工夫された授業展開を今後も検討して行きたいと考える。

謝 辞

本研究の遂行のために授業実践の場を提供して下さった学校法人明光学園中学高等学校（福岡県大牟田市）教諭富永実咲先生に深く御礼申し上げます。次に、授業実践に協力して頂いた同学園第2学年の生徒の皆さん（20名）、そしてこの授業実践を支援してくれた国立大学法人熊本大学大学院教育学研究科の佐藤英樹さん、中島史人さん、吉田恭一郎さんに、この場を借りて、心より感謝申し上げます。

参考文献

- [1] 平山貴, 高等学校数学科における学習指導要領改訂の趣旨を生かした事例の提案一, 「新規の内容」, 「数学活用問題」, 「課題学習」とは何か一, 青森県総合学校教育センター 研究紀要, 2010年3月。
- [2] 岩井浩光, 高等学校における数学的活動に関する一考察, 岐阜大学大学院教育学研究科 教科教育専攻 数学教育専修 学位論文, 2001年。
- [3] 文部科学省「高等学校学習指導要領解説数学編理数編」, 実教出版, P. 5, 2009年12月。
- [4] 桜井進, 世界を変えた「数」, 朝日新聞出版, 2015年。
- [5] 渡辺昌文, 高等学校数学における関数指導に関する一考察, 岐阜大学大学院教育学研究科 教科教育専攻 数学教育専修 学位論文, 2000年。

参考URL

- [1] 厚生労働省「日本人の食事摂取基準（2015年版策定検討会）報告書」, <http://www.mhlw.go.jp/stf/shingi/0000041824.html>。
- [2] 厚生労働省「第6次改定日本人の栄養所要量について」, http://www1.mhlw.go.jp/shingi/s9906/s0628-1_11.html。

ダイエット法の基礎用語

○ダイエットの基本

消費カロリー (kcal) > 摂取カロリー (kcal)

まずは、現在の一日の消費カロリーを把握しよう

$$\text{消費カロリー (kcal)} = \frac{\text{基礎代謝基準値 (kcal/kg)} \times \text{体重 (kg)} \times \text{生活活動指数}}{\text{基礎代謝量 (kcal)}}$$

○基礎代謝基準値：体重 1 kg に対して必要とされる基礎代謝量の基準値

年齢	10-11 歳	12-14 歳	15-17 歳	18-29 歳	30-49 歳	50-69 歳	70 歳以上
男性	37.4	31.0	27.0	24.0	22.3	21.5	21.5
女性	34.8	29.6	25.3	22.1	21.7	20.7	20.7

厚生労働省 日本人の食事摂取基準（2015）参照<http://www.mhlw.go.jp/stf/shingi/0000041824.html>.

○生活活動指数：普段の生活において、どれだけの負荷が掛かっているかを表したもの

<p>I : 1.3 倍・・・低い</p> <p>散歩、買物など比較的ゆっくりした 1 時間程度の歩行のほか大部分は座位での読書、勉強、談話、また座位や横になってのテレビ、音楽鑑賞などを行っている場合。</p>	<p>III : 1.7 倍・・・適度</p> <p>生活活動強度 II（やや低い）の者が 1 日 1 時間程度は速歩やサイクリングなど比較的強い身体活動を行っている場合や、大部分は立位での作業であるが 1 時間程度は農作業、漁業などの比較的強い作業に従事している場合。</p>
<p>II : 1.5 倍・・・やや低い</p> <p>通勤、仕事などで 2 時間程度の歩行や乗車接客、家事等立位での業務が比較的多いほか大部分は座位での事務、談話などを行っている場合。</p>	<p>IV : 1.9 倍・・・高い</p> <p>1 日のうち 1 時間程度は激しいトレーニングや木材の運搬、農繁期の農耕作業などのような強い作業に従事している場合。</p>

厚生労働省 日第 6 次改定日本人の栄養所要量について

参照：http://www1.mhlw.go.jp/shingi/s9906/s0628-1_11.html.