

高等学校数学から小学校算数へ向けての面積学習の応用

谷川 智幸*¹・佐藤 英樹*²

Application of area learning from high school mathematics to elementary school mathematics

Tomoyuki Tanigawa and Hideki Satou

(Received October 5, 2017)

In order to understand easily how to obtain the formula of circle area to be learned at elementary school, we implement the classes practice for a class high school with the quadrature by parts which does not learn so much in high school mathematics.

Key words : 区分求積法 基礎的・基本的な知識・技能 数学的な思考力・表現力
小学校算数 高等学校数学

1. はじめに

本研究は、小学校算数において学習する“円の面積”の求め方（取り尽くし法）を詳細に分かり易く教授するための方法を見出すことが目標である。この目標の遂行のための橋頭堡として、まず高等学校で学習することになっているが余り取り扱われていない“区分求積法”の習得を課題に熊本県立某高等学校において授業実践を実施した。本論文では、その授業実践の報告と今後の課題について述べる。

2. 研究目的

全国の大学と高等学校が連携した授業実践の先行研究としては、円周率の求め方に関する計算方法を考察する実践、ウェブ教材を題材にした数学概念の提示方法を工夫した教材開発の実践（小山 [2]）、その他、数式処理ソフトを活用した三角関数とその応用に関する教育実践（藤井 [5]）などがある。また、積分に関する指導要領の現状と今後の展開を示唆している先行研究として、積分の導入の現状と問題点の指摘（藤本 [6]）がある。例えば、「現在の指導では、生徒に理解させにくい点、生徒に積分の意図を伝えにくい点を指摘するとともに、生徒の興味関心を高めるという意図で、区分求積法によって面積や体積を指導するための

教材を豊富に提示する」（新上 [1]）。「不定積分を定義する必然性が乏しく、生徒たちにとっては、何のためにこのような逆演算を定義するのかわからないままに過ぎてしまうのが実情ではなかろうか。また、積分法なるものが、何を究明しようとして成立しえた学問であるかも与えられずに話を進めなければならないのが実情である」（利根川 [4]）。「面積計算などの応用上は、ほとんどの場合、区分求積法を持ち出すまでもなく微分の逆算によって計算が可能であるから、実用上の必要性に乏しいにもかかわらず高度に抽象化された区分求積法の学習に対して、多くの学習者がインセンティブを感じないのも無理なからぬところがある」（金子 [3]）。さらに授業実践としては、区分求積法をテーマとした図入り教材の効果として検証した授業に対して次のような結果を示している。「図の教育効果が期待された『長方形の面積和の収束』を理解させる場面で予想に反して学習者が大きな支障をきたしていないことが確認される一方、理解したことを数式表現として正確に再現できないという問題がむしろ本質的であることが判明している。具体的には、定積分が図形の面積を表すことや、面積を求めるためには領域を長方形によって細分化して近似していけばよいといった、大まかなイメージは相当数の学習者に支障なく受容されるにもかかわらず、その数式としての表現

*¹ 熊本大学教育学部

*² 熊本大学大学院教育学研究科

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\Delta x_k \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(x_k)\Delta x_k$$

(ただし, a, b は実数)

を記述する場面になると, 図的情報からの理解と数式表現による記述とが乖離してしまい, 他の学習項目と比較してパフォーマンスを著しく悪化させることが強く示唆されている。」(金子 [3]). さらに金子は, 厳密な数式表現を伴った区分求積法の学習が必要となる事例を紹介している。

I. 速度から距離を求める問題

- ① 縦軸・横軸にプロットされる量はいずれも単位をもった物理量であり, さらにこれらの積として得られる物理量はまた違った単位をもつ物理量となるなど, 学習者の立場からすると, 区分求積法の学習で現れるような単純な長さや面積と比べ, イメージしづらい。
- ② 領域が長方形の場合であれば, 時間と速度の積が移動距離になることをイメージしやすいが, そうでない場合, 領域の面積によって「表される」物理量のイメージを掴むためには区分求積法の本格的な理解が前提となり, 概して難しい。

その他にも, 区分求積法を学習する動機づけを与えるための応用例として, 変量が具体的な単位を持つ物理量であるようなケースを提示している。

II. 放射線の被曝量

III. 薬剤の実質的な効果の定量化

しかし, 実際の教育現場はこのような趣旨が十分に考慮されないまま大学入試対策に重点を置いたものとなっているため, 数学の学習は単なる計算に留まり, 計算の図形的意味を見い出せない生徒が多く見られる。これが数学的な見方や考え方, 数学的に表現する能力が育まれない要因だと考えられる。

この経緯を踏まえ, 本研究では, 積分の導入に区分求積法を用いることにより計算の図形的意味を考察し, 自分の考えを数学的に表現する場面を設ける。これに加え, 自分の考えを数学的に根拠を明らかにして説明したり, 議論したりする言語活動を充実させることで, 基礎的・基本的な知識・技能の定着を図り, 数学的な思考力・表現力を高めることをねらいとしている。

3. 指導内容及び方法

今回は, リーマン積分の理論化の基盤となり, 計算の図形的意味を表現する題材のうち代表的な存在である区分求積法を取り扱った。アルキメデスの発想を基とした区分求積法の発想自体は, 紀元前の段階で既に得られていたにも関わらず, 微分積分学の基本定理の発見によって系統的な積分の計算が可能となるまでは

長い年月を要しており, 細い長方形の細分化した面積の収束和を求めればよいという区分求積法は, 小学校で円の面積公式を導いたときの円を多数の合同な扇形に分割し求めたことから, それほど理解は難しくないと考えられる。つまりは, 長方形の面積で必要となるものを文字を用いて求めることから, 自分が理解したことを正確に数学的表現できる場としては良い機会になる。現在では, 微分の逆演算として積分を定義し, グラフの面積を媒介して不定積分と定積分を結びつける指導が行われている。すなわち, 関数 $f(x)$ の原始関数 $F(x)$ を $F'(x)=f(x)$ を満たす関数と定義したうえで, 定積分 $\int_a^b f(x)dx$ を

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

と定義する方法である。これは, 本来の積分の起源として区分求積法によって定積分を定義し, 微分積分学の基本定理によって証明される内容を, 定積分の定義として利用するという時系列とは全く逆の進め方になっている。区分求積法の導入にあたっては, 数学Ⅲで学習する無限級数の一部を用いるが, 数学Ⅱで数列と極限を学習することからそれほど支障を来たさないと考える。

今回の授業実践は, 熊本県の某公立高等学校の第2学年を対象として行った。このクラスは, 第2学年で履修することになっている数学Ⅱの基礎解析学(微分積分学)と数学Bの数列・ベクトルは既習しているが, 区分求積法で用いる無限級数については学習していない。また, 普段の授業では積極的に班活動を行わないクラスである。そのため, 各時間に適宜班活動や話し合う時間を設け, 根拠を明らかにして, 自分の考えを分かり易く説明したり, 互いに自分の考えを表現し伝え合ったりする機会を確保する。

このことを踏まえ, 本授業実践の第1時間目の前半では, 質問する, 説明する(積極的側面)やチームで協力する, チームに貢献する(協同的側面)などの学習態度をはじめに伝える。次に, 長方形の細分化を利用して面積を究明する意味づけとして土地の面積を例に挙げ, いくつかの条件のもとで長方形型の付箋紙を切り貼りする活動を行う。活動内容としては, クリアファイルに土地の面積を表す実線を書いておき, 長方形型の付箋紙を切り貼りした紙をクリアファイルに入れ比較する。長方形型の付箋紙の幅を1.5cm, 2.5cm, 5cmと限定し, どの幅が一番土地の面積に近いのか問う。このようにし, 土地の面積への近似を分析し, 活動過程や結果として表れた上からの評価と下からの評価の2つがあるという重要な事実があることに対し, 実感を伴った認識をさせるためにコンピュータを用いて図で示しながら確認する。第1時間目の後半では,

微分積分学の復習として土地の面積を積分の計算によって求めた後、前半の発想を用いてどのようにしてその値に近似できるのか疑問を投げかける。

第2時間目の前半では、図のみで長方形の個数の増加に伴う求める面積への近似の様子を確認したうえで、具体的な長方形の個数において長方形の面積和を計算し、長方形の面積和の求め方を理解する。その後、長方形の個数を増やしていくと求める値に近づくことを数値のみで実感させるために図と数値の変化に対してコンピュータを用いて確認し、第3時間目を行う理論的かつ一般的な証明の足掛かりにする。また、長方形の面積和を求める際には、学習態度として全員が理解できるという目標の下、協力するよう促す。第2時間目の後半では、数学Ⅱでは無限(∞)についての扱いはないので、第3時間目の証明に用いる極限值に焦点を当て、簡略的に教授しながら様々な極限值を演習形式で求める。

第3時間目の前半では、n個の長方形の面積和を求める際に必要な数列の和の公式と極限値の計算を確認し穴埋め式で求める。授業を進めるにあたっては、適宜助言を与えながら、計算が主とならないように配慮して進めていく。手順としては、上からの評価に関して長方形の個数、横の長さ、たての長さを確認した後に、各長方形の面積、長方形の面積和そして極限値を生徒とともに求める。第3時間目の後半では、その後、個々

に生徒が下からの評価の場合を自力または班員と協力しながら一緒に求める。全員が理解できた班から理解できていない各班へ班員を派遣し積極的な議論を行うよう促す。すべての班、つまりクラス全員が理解できるよう班を越えた学び合いを行う。その後、区分求積法の発想の起源やそれに携わった数学者たちを紹介し、先人たちの功績が現在の数学の基盤になっていることを伝える。最後には、区分求積法の内容を中心とした動画の紹介と今までの歴史や概念を整理し、ニュートンの微分積分学の基本定理の有用性の確認を行う。

以上の指導内容と方法で、本来の積分の成り立ちと概念を認識し、問題が解けるだけでなく、計算過程や結果の意味が分かること、さらに新しい概念、定理そして公式を実感とともに自分自身で導き、活用することによって、学習指導要領解説([7])にある“基礎的・基本的な知識・技能”や“数学的な見方や考え方”を習得し、数学的な思考力や表現力が向上するように試みたい。

4. 授業の指導案

授業実践は平成28年12月1日(木)から5日(月)にかけて3単位時間、熊本県内の某公立高校第2学年の1クラス(43名)で実施した。授業の流れは、以下のようなものである。

○指導案
・1時間目

日時：12月1日(木)8時45分～9時35分

| 過程 | 時間 | 生徒の学習活動 | 授業形態 | 教師の指導・支援 | 備考 |
|-----|-----|---|----------|--|------------|
| 導入 | 5分 | ○川のほとりに家を建てる図を見て、曲線と直線で囲まれた面積を求める意味づけを行う。 | 一斉 | ○家を建てる図を提示し関心をもたせる。 | |
| 展開1 | 20分 | 課題① 長方形を用いて土地の面積にできるだけ近づけよ。 | | | |
| | | 課題①を考える。 (1) 太めの帯状リボン(長方形の紙)を切り貼りして、ルール通りに課題を解決する。 (2) 各班の結果を発表し、気づきを述べる。 | 班 一斉 | ○長方形を用いて、ルール通りに求める面積にできる限り近づけることを意識させる。 ○全体に発表させ、上からの評価と下からの評価があることを確認し、両方を認めさせる。 | ワークシート |
| | | (3) 長方形の幅を縮めるほど、求める面積に近づくことを理解する。 | 一斉 | ○プロジェクターを用いて、長方形の幅を変化させる。 | プロジェクター |
| 展開2 | 10分 | 課題② $y=x^2$ を $[0,1]$ 上で積分せよ。 | | | |
| | | 課題②を考える。 (1) 計算して求める。 (2) 課題①の考えをもとに課題②を考える。 | 個人 個人 | ○計算結果に対して、区分求積法を用いてどのようにして近付けるか改めて考えさせる。 | ワークシート |
| まとめ | 5分 | 本時のまとめをする。 (1) リフレクションカードを記入し、本時の授業を通して学んだことを発表する。 | 一斉 | ○長方形を足し合わせれば、面積を求めることができることを確認する。 | リフレクションカード |

・2時間目

日時：12月2日（金）8時45分～9時35分

| 過程 | 時間 | 生徒の学習活動 | 授業形態 | 教師の指導・支援 | 備考 |
|-----|-----|--|--------------|--|---------------------|
| 導入 | 5分 | ○ 長方形の面積の総和が1/3にどのようにして近づけるか確かめる. | 一斉 | ○ 長方形の幅を変化させ、どのようにして求める面積に近づけるか理解させる. | プロジェクター |
| 展開1 | 30分 | <p style="text-align: center;">課題① $\int_0^1 x^2 dx$ において長方形が5, 10個のときの面積の和を求めよ.</p> <p>課題①を考える. (1) $n = 5$ の場合を上からの評価と下からの評価と分け、電卓を用いて求める. (2) $n = 10$ の場合を上からの評価と下からの評価と分け、電卓を用いて求める. (3) $n = 5, 10, \dots, 125, \dots, 1000, \dots$ の場合を、図の変化とともに値の変化も確認する.</p> | 班 班 一斉 | ○ 長方形5個のうち2個を生徒と一緒に求める. ○ 全員が理解できるように周りと協力するよう促す. ○ プロジェクターで上からの評価と下からの評価の場合に分け、図と値を変化させる. ○ 区分求積法を考え出した当時の数学者たちの功績を紹介する. | 電卓 電卓 プロジェクター |
| 展開2 | 10分 | <p style="text-align: center;">課題② $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}$ はどんな値に近づくか求めよ.</p> <p>○ 次の極限を理解する. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}$</p> | 一斉 | ○ n の値を1, 10, 100, …と大きくしていく、0に近づくことを実感させる. | プロジェクター |
| まとめ | 5分 | <p>本時のまとめをする. (1) リフレクションカードを記入し、本時の授業を通して学んだことを発表する.</p> | 一斉 | ○ 実際に電卓を利用しないで計算した場合の手間や長方形の数とともに面積の総和の値の変化を確認する. | リフレクションカード |

・3時間目

日時：12月5日（月）8時45分～9時35分

| 過程 | 時間 | 生徒の学習活動 | 授業形態 | 教師の指導・支援 | 備考 |
|-----|-----|---|--------|---|--------------|
| 導入 | 5分 | ○ 長方形が5個、10個のときの計算過程や結果を確認する. | 一斉 | ○ 長方形が5個、10個のときの計算過程や結果を確認させる. | プロジェクター |
| 展開1 | 35分 | <p style="text-align: center;">課題① $\int_0^1 x^2 dx$ において長方形が n 個のときの面積の和を求めよ.</p> <p>課題①を考える. (1) 上からの評価の場合で求める.</p> <p>(2) 下からの評価の場合で求める. 自力で解答を導き、できた人から答え合わせをし、正解者を増やすために周りの生徒と協力する.</p> | 班 班 | ○ 上からの評価の場合を生徒と一緒に求め、ワークシートの穴埋めをする. ○ 極限に簡単に触れ、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{6} \left(2 + \frac{3}{n^2} + \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{3}$ を導く. ○ 解答を教卓に準備しておき、できた人から解答を取らせる. また周りの生徒と協力するよう促す. ○ 区分求積法を考え出した当時の数学者たちの功績を紹介する. | 電卓 ワークシート |
| まとめ | 10分 | <p>本時のまとめをする. (1) リフレクションカードを記入し、本時の授業を通して学んだことを発表する.</p> | 一斉 | ○ 区分求積法をまとめた動画を紹介する. | プロジェクター |

5. アンケート結果

今回の授業実践の分析の際に使用したアンケート、及びその回答の結果を以下に示す。(1)から(7)までの各質問項目は4段階評価で回答を求めるものであり、Aが肯定的評価で、Dが否定的評価となっている(A:よくあてはまる、B:あてはまる、C:あまりあてはまらない、D:全くあてはまらない)。(8)は自由記述によるものである。アンケートの回収数は39で、段階ごとに回収数を表を用いて表示する。

【各質問項目とその回答】

(1) 積分が実際にどんなことをしているのか(長方形の和であること)を理解できましたか。

| 段階 | A | B | C | D |
|-----------|----|----|---|---|
| 回答 | 21 | 18 | 0 | 0 |
| 平均値: 3.53 | | | | |

(2) ニュートンが発見した積分の計算の有用性や利便性を感じましたか。

| 段階 | A | B | C | D |
|-----------|----|----|---|---|
| 回答 | 22 | 16 | 1 | 0 |
| 平均値: 3.53 | | | | |

(3) プロジェクター(パソコン)で長方形の数が増える様子を見た方がより理解がすすむと感じましたか。

| 段階 | A | B | C | D |
|-----------|----|----|---|---|
| 回答 | 29 | 10 | 0 | 0 |
| 平均値: 3.74 | | | | |

(4) 積分について興味・関心は抱きましたか。

| 段階 | A | B | C | D |
|-----------|---|----|---|---|
| 回答 | 9 | 28 | 2 | 0 |
| 平均値: 3.17 | | | | |

(5) 内容の難易度は適切でしたか。

| 段階 | A | B | C | D |
|-----------|----|----|---|---|
| 回答 | 19 | 19 | 1 | 0 |
| 平均値: 3.46 | | | | |

(6) 最後のまとめの動画は分かりやすかったですか。また、自分で見ることができるなら見てみようと思いますか。

| 段階 | A | B | C | D |
|-----------|----|----|---|---|
| 回答 | 17 | 18 | 4 | 0 |
| 平均値: 3.33 | | | | |

(7) 区分求積法を図を用いて説明することができますか。

| 段階 | A | B | C | D |
|-----------|---|----|---|---|
| 回答 | 6 | 26 | 5 | 2 |
| 平均値: 2.92 | | | | |

(8) 感想

(a) 「1番最初の授業のシールをはってどれが1番求めたい土地の大きさに近づけるのかの授業では、実際にやってみることで楽しく、またより理解が深められたので、すごいよかったです。」

(b) 「難しい内容だったけれど、昔の人が努力して公式を導きだしてくれたおかげで今の計算ができるのかなと思いました。また昔の人に感謝したいなと思いました。今回の積分の面積の証明みたいなことをしたけれど他にも理屈が知れるととっても数学が楽しくなるのかなと思いました。」

(c) 「曲線のグラフの面積を求めるためには、長方形の幅をできる限り小さくする。めんどくさい面積の求め方が分かった。」

(d) 「長方形の幅をかえるだけで、なめらかになるとはじめて知りました。積分や数列のやり方もまたできたからよかったです。」

(e) 「現代の計算法は、いろいろな人の努力によって簡単に求めることができること。」

(f) 「数学だけではなく、どんな人が発見したのかも知れて、少し興味がわいた。」

6. 授業実践の分析

第1時間目の前半では、長方形の幅を縮めれば求める面積に近づくことは多くの生徒が予想をたてられていた。そのことを確認するために、長方形型の付箋紙を切り貼りしていく活動は、アンケート(8)にあるように実物を用いることで区分求積法に抵抗なく取り組め、理解が深められていたようだ。さらに、Geogebraによる長方形の収束の動きを見せることは、アンケート(3)や生徒から声があがった様子から効果的だと思われる。第1時間目の後半では、計算によって求めた土地の面積の値に長方形の収束の値(面積和)が近づくことは前半で確認したので概ねの生徒が納得していたようだが、それが何故かは理解していないようで、生徒が疑問をもって授業が終わったように思われる。

第2時間目の前半では、具体的な長方形の個数を定めた面積の和は容易に求められていたため、第1時間目の終わりにもった疑問の解決につながっていることに気づいた生徒が多くいたように見えた。第2時間目の後半に取り扱った極限に関しては、 $n \rightarrow 0$ が既習事項だったことから $n \rightarrow \infty$ には抵抗なく理解が進んでいた。しかし、極限の性質については証明を行わなかったため本質的な理解は今後の課題となった。

第3時間目において、第2時間目を足がかりとして長方形の面積和を一般的に表す場面では、アンケート

(5), (7) であるようにつまづきがでており, 教え合いの時間の確保や理解し易いような創意工夫が必要だと分かった. しかし, 区分求積法や微分積分学の基本定理に携わった数学者たちの功績の紹介はアンケート(2), (8) から数学や数学史への興味・関心を向上させることができたのではないと思われる. 第3時間目の終わりに, 生徒に見せたまとめの動画に関しては, アンケート(6)にあるようあまり効果がないことが分かった.

7. 今後の課題と小学校算数へ向けての課題

今回の授業実践を通して, 積分に関する新たな概念を習得し, 積分の歴史的成り立ちや微分積分学の基本定理の背景を歴史的時系列にそって学ぶことで, 少しでも数学への興味・関心を引き出したのではないと思われる. その中でも区分求積法を習得した知識・技能を活用し, 体系的な思考, 数や文字式そして図などの表現を自分自身でできたことは数学的な思考力・表現力を養うことができたと思われる. しかし, それらを用いて説明したり, 議論したりするなどの言語活動の時間が乏しく, コミュニケーションを図る機会の確保が必要だと考える. このことを踏まえ, “数学の基礎的・基本的な知識・技能”と“数学のよさ”を実感させることができるような創意工夫された授業展開を今後も検討していきたい. また, 今回の授業実践における生徒の反応から, 小学生に対しても数学史と重ねて教えること, グラフを用いて教えることが理解の深化に有用であることを確信した. しかし, 高校生でも抽象的で理解が難しい“極限の概念”を小学生にどのように教えるかが今後の課題となる. この抽象的な概念を習得することができれば, 小学生に対しても区分求積法のある程度の理解, さらに, 円の面積の求め方(取り尽くし法)の理解が可能になり算数に対する興味・関心を一層引き出すことができると確信した.

謝辞

まず, 本研究の遂行のために授業実践の場を提供して下さった熊本県立東稜高校(熊本県熊本市)松本和光先生ならびに小田達也先生や数多くの先生方に深く御礼申し上げます. 次に, 貴重な時間を割いて授業実践に協力して頂いた同学校第2学年の生徒の皆さん(43名), そしてこの授業実践を影で支えて下さった国立大学法人熊本大学大学院教育学研究科の中島史人さん, 吉田恭一郎さん, 鶴野一さんに, この場を借りて, 心より感謝申し上げます.

参考文献

- [1] 新上勇, 興味・関心をもたせる数学の指導法について—区分求積法を中心として—, 広島大学附属高等学校研究, 1984年.
- [2] 小山陽一ほか, 工学基礎教育における分かり易く親しみやすいウェブ教材の開発, 金沢工業大学, 2006年.
- [3] 金子真隆, 積分概念の導入に関する教科書調査について—高等学校学習指導要領の変遷をふまえて—, 東邦大学, 2014年.
- [4] 利根川誠, 積分の導入と問題点「算数・数学教育実践講座8 関数概念の発展と利用II」, pp.199-202, 算数・数学教育実践講座刊行会.
- [5] 藤井利江子ほか, 数式処理ソフトを活用した三角関数とその応用に関する教育実践, 日本大学, 2013年.
- [6] 藤本義明, 区分求積法をいかした積分法の指導, 広島大学附属高等学校研究, 1990年.
- [7] 文部科学省「高等学校学習指導要領解説数学編理数編」, 実教出版, 2009年.