

対数学習における高等学校数学から小学校算数への応用

谷 川 智 幸^{*1}・中 島 史 人^{*2}

Application of high school mathematics to elementary school mathematics
in logarithm learning

Tomoyuki TANIGAWA and Fumihito NAKAJIMA

Abstract

The aim of this paper is to investigate whether elementary school students can understand the number of digits of “big numbers” such as “one million” and “one billion” with help of the property of “logarithm” and the learning tool called “KEISANJYAKU”.

To confirm the usefulness of the “KEISANJYAKU”, we first carried out the classes practice on the property of logarithm with “KEISANJYAKU” which can count the number of digits of “big numbers” in a class of high school as connection to classes at elementary schools.

Key words : 対数 計算尺 対数のイメージ 学ぶ意義

1. はじめに

対数は、溶液のイオン分子数で酸性度を測るpH、星の明るさを示す等級、地震のエネルギーを表すマグニチュードなどに採用されている。つまり対数は、余りにも桁外れでイメージしにくい数を感じ覚的に把握できるようにするものである。本研究の目的は、高等学校数学Ⅱにおいて学習する対数を小学校算数に導入し、児童が興味を持っている一、十、百、千、万、……、無量大数、……、不可説不可説転（ふかせつふかせつてん）などの自然数に対する桁数の算出に“対数の性質”が役立つことを理解させることである。この目的を遂行するための橋頭堡として、初めに“計算尺を利用した対数学習”を課題にした授業実践を熊本県立某高等学校において実施し、生徒の反応を確認しながら、如何に小学校算数に応用すべきかを模索した。本論文では、その授業実践の報告と今後の課題について述べる。

2. 対数学習と計算尺の関係

計算尺とは、対数を利用した計算機である（上野[1]：2015）。今回は、計算尺推進委員会作成の計算尺（参考URL：[1]，図1）を例に説明する。

一般的に計算尺は3本の定規を、上、真ん中、下

計算尺 Learner Edition 表面相当

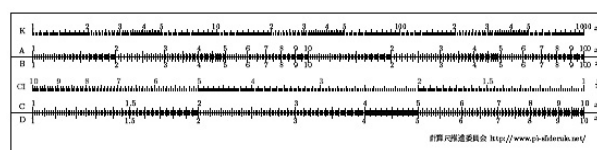


図1：計算尺

と並べたような3つの部分から成り、上下の2つは固定されている固定尺といい、真ん中は左右にスライドできるようになっている滑尺という。目盛りが4つあり、上からK尺、A尺、B尺、CI尺、C尺、D尺と名前がついている。A尺とB尺、C尺とD尺はそれぞれ同じ目盛りである。A・B尺はC・D尺を $\frac{1}{2}$ に縮小して2つ、K尺はC・D尺を $\frac{1}{3}$ に縮小して3つ連続して並べた目盛りである。CI尺はC尺の左右を逆にした目盛りである。目盛りは、対数によって目盛りがつけられている対数目盛りとなっている。対数目盛りとは、基点となる「1」から $\log_{10} 2$, $\log_{10} 3$, ..., $\log_{10} X$ の距離だけ離れたところに2, 3, ..., Xのようにとった目盛りのことである（図2）。

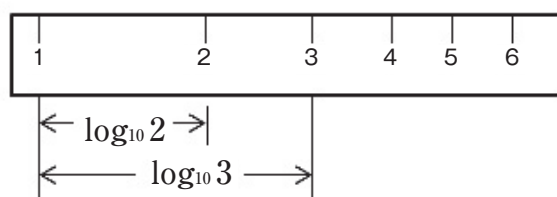


図2：対数目盛り

*1 熊本大学教育学部

*2 熊本大学大学院教育学研究科

そのように目盛りをとったものを対数尺という。このため、計算尺をスライドさせるだけで掛け算や割り算ができる。また、累乗や累乗根の数値も容易に求められる。今回は、計算尺の使い方の5つを紹介する。

① かけ算

基点が目盛り1であるから、一方の対数尺を固定して、もう一方の動かす対数尺の基点の目盛り1を固定した対数尺の目盛り2の位置に合わせる。固定した対数尺における基点から目盛り2までの距離は $\log_{10} 2$ 、動かす対数尺における基点から目盛り3までの距離は $\log_{10} 3$ であるから、固定した対数尺における基点から $\log_{10} 2 + \log_{10} 3$ の距離にあたる目盛りを読むと6と分かる(図3)。

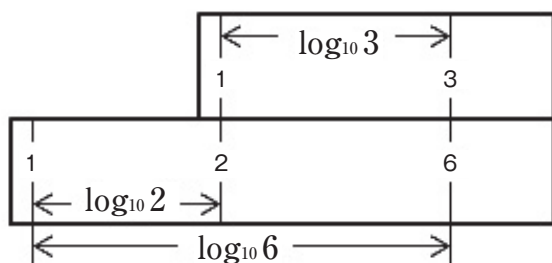


図3：①かけ算

② かけ算（目外れ）

①の方法で計算尺を使った時、長さが足りずに目盛りが読めない場合がある。このような時を目外れという。例えば、3と4に対して①の方法をC・D尺で行った時には目外れする。目外れのときは、固定した対数尺の3の位置に動かす対数尺の10を合わせて、同対数尺の4の位置を見る。固定した対数尺における基点から目盛り3までの距離は $\log_{10} 3$ 、動かす対数尺における基点から目盛り4までの距離 $\log_{10} 4$ であるから、固定した対数尺における基点から $\log_{10} 3 - \log_{10} 10 + \log_{10} 4$ の距離にあたる目盛りを読むと1.2と分かる。このとき、10をかけると12が分かる(図4)。

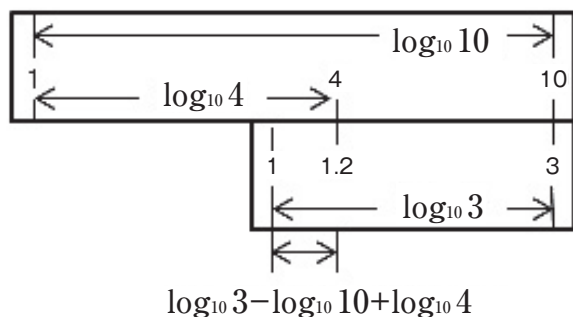


図4：②かけ算（目外れ）

③ わり算

一方の対数尺を固定して、固定した対数尺の目盛り6に、もう一方の動かす対数尺の目盛り2を合わせる。固定した対数尺における基点から目盛り6までの距離は $\log_{10} 6$ 、動かす対数尺の基点から目盛り2までの距離は $\log_{10} 2$ であるから、固定した対数尺における基点から $\log_{10} 6 - \log_{10} 2$ の距離にあたる目盛りを読むと3と分かる(図5)。

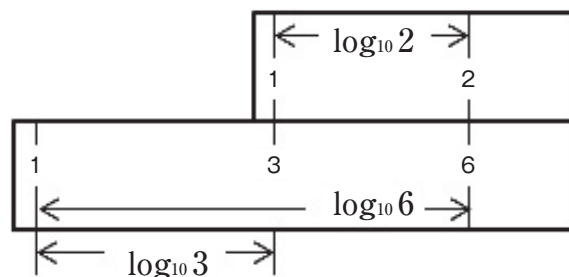


図5：③わり算

④ わり算（目外れ）

2と5に対して④の方法をC・D尺で行うと目外れする。このとき、固定した対数尺の2の位置に動かす対数尺の5を合わせて、同対数尺の10の位置を見る。固定した対数尺の基点から目盛り2までの距離は $\log_{10} 2$ 、動かす対数尺における基点から目盛り5までの距離は $\log_{10} 5$ であるから、固定した対数尺における基点から $\log_{10} 2 - \log_{10} 5 + \log_{10} 10$ の距離にあたる目盛りを読むと4と分かる。このとき、10で割ると0.4が分かる(図6)。

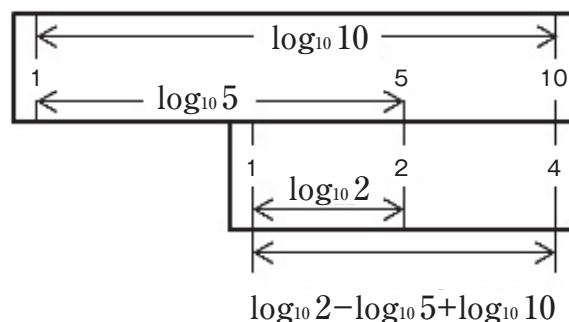


図6：④わり算（目外れ）

⑤ 累乗・累乗根

A・B尺、K尺はそれぞれC・D尺を $\frac{1}{2}$ 、 $\frac{1}{3}$ に縮小した対数目盛りとなっているので、C・D尺における基点から目盛り2までの距離は $\log_{10} 2$ 、その上のA・B尺における同じ位置にあるのは $2\log_{10} 2$ に当たる目盛り4、同じく、K尺では $3\log_{10} 2$ に当たる目盛り8であることが分かる。逆にK尺、A・B尺の方からC・D尺を見ると3乗根、2乗根が分かる(図7)。

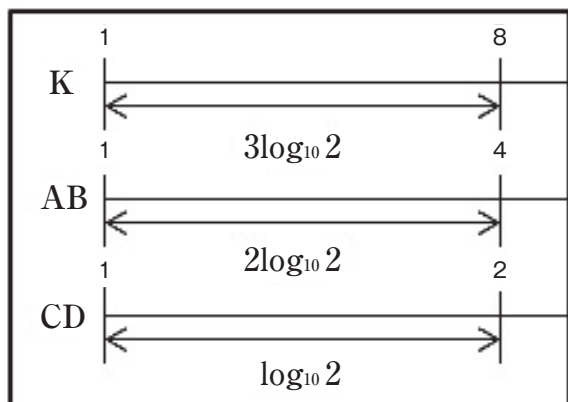


図7：⑤累乗・累乗根

3. 計算尺を用いた対数学習について

ここでは、計算尺を用いた学習について考えていく。計算尺を用いる中で乗除計算や累乗・累乗根の計算ができることを発見し、それに疑問を持ち、理由を対数の性質によって説明する学習が期待できる。この学習は、対数の性質が計算尺に応用されていることを知り、対数は形式的・機械的な計算を行うものというイメージから、応用できる有用なもの、学ぶ意義のあるものとして認識されることを狙いとする。計算尺を授業で用いる際に、以下のように大きく3つの学習活動が考えられる。

- (1) 計算尺の目盛りについて考える活動
- (2) 乗除計算ができる理由を考える活動
- (3) 累乗・累乗根の計算ができる理由を考える活動

(1) 計算尺の目盛りについて考える活動について

まず、計算尺の目盛りが対数目盛りであることを理解する必要がある。そのための学習活動として、直線上に常用対数の長さに印をつける活動を行う。あらかじめ直線の両端をそれぞれ0と1にして、0.01の間隔で目盛りをとった数直線を用意する。その数直線に $\log_{10} 1 = 0$, $\log_{10} 2 = 0.3010$, $\log_{10} 3 = 0.4771$, ..., $\log_{10} 10 = 1$ のところに印をつける。これによって、対数の値をただの数から長さとして再認識できる。また、真数部分だけに注目し、真数が大きくなるにつれて数直線上の間隔が狭くなることを計算尺の目盛りと比較させながら気付かせることで、対数の位置に印を付ける活動が計算尺のC・D尺の目盛りを作る活動であることが分かり、計算尺の目盛りが対数目盛りであることを実感する。

(2) 乗除計算ができる理由を考える活動について

計算尺をスライドさせて目盛りを読ませる活動を

行う。例えば、固定したD尺のXの目盛りにC尺の1の目盛りをスライドさせ、そのままC尺のY目盛りを見て、その下のD尺の目盛りをZとする。このX, Y, Zを記録させることで $Z = XY$ となっていることを見出させる。ここで生徒は計算尺をスライドさせるだけでかけ算ができることを発見し、驚きを覚える。計算尺の目盛りが対数目盛りであることと長さの関係が $\log_{10} X + \log_{10} Y = \log_{10} Z$ となることから、対数の性質 $\log_a X + \log_a Y = \log_a XY$ によって $Z = XY$ となることを説明できる。わり算のときも同様である。この活動によって、対数の性質を暗記するのではなく、実感を伴った理解ができることを期待できる。

(3) 累乗・累乗根の計算ができる理由を考える活動について

計算尺をスライドさせないでK尺、A・B尺、C・D尺の同じ位置にある目盛りを読む活動を行う。C・D尺の目盛りをXとするとA・B尺は X^2 、K尺は X^3 となっていることに気づかせる。C・D尺の右端の10目盛りが $\log_{10} 10$ を示しているとする、A・B尺、K尺それぞれの右端は $\log_{100} 100$, $\log_{1000} 1000$ であり、底が100, 1000の対数によって目盛りが付けられていると解釈できる。A・B尺、K尺の目盛りがそれぞれ底100, 1000の対数目盛りであることから、長さの関係 $\log_{10} X = \log_{100} X^2 = \log_{1000} X^3$ が成立つと予想し、これを底の変換公式を利用して証明する活動が考えられる。この活動によって、計算尺の仕組みを解明するという目的意識を持って底の変換公式を用いることができ、対数の計算が意味を持ったものだと認識されることが期待できる。

このように、計算尺を使いながらその仕組みを対数で考えていく活動は、対数の計算を実感を伴いながら理解させ、そのような対数の計算が意味のあるものだと認識させることができると期待される。さらに、対数が計算機である計算尺に応用されている有用なものであることを実感させることも期待できる。

4. 授業実践の内容と指導案

今回の授業実践は、熊本県内の某高等学校の第2学年を対象として行った。このクラスは、第2学年で履修することになっている数学Ⅱは既習済みである。このことを踏まえ、本授業実践の第1時間目では、指数関数における対数の定義、対数の性質、常用対数の復習を行う。第2時間目の前半では、計算尺を紹介し、名称を確認する。次に0から1までの

数直線上に $\log_{10} 1$ から $\log_{10} 2$, $\log_{10} 3$, \dots , $\log_{10} 10$ までの常用対数の位置に印を付ける活動によって計算尺の目盛りが対数目盛りになっていることに気づかせる。後半は、計算尺の使い方を教え、目盛りを記録する活動の中で、かけ算になっていることに気づき、その理由を対数を用いて説明する活動を行う。第3時間目の前半は、第2時間目のかけ算の場合と同様にしてわり算について行う。後半は、簡単なかけ算とわり算の問題を計算尺を用いて、答えを求めさせた後に筆算で答えを確認させることにより、計

算尺では誤差が出ることに気づかせる。また、 $2.1 \times 3.9 \div 4.5 \times 5 \div 9.1$ を筆算で答えを確かめた後で計算尺を使って計算してみることで面倒な筆算が計算尺をスライドさせるだけで答えを求めることができる有用性について強調する。

平成28年12月1日から5日に3単位時間、熊本県内某高等学校第2学年の1クラス（男子22名、女子20名）で実施した。授業の流れは、以下のようなものである。

○指導案

【1 時間目】

平成 28 年 12 月 1 日（木）第 3 時限目 10 時 35 分～11 時 20 分 2 年 7 組教室

過程	配当	生徒の学習活動	授業形態	教師の指導・支援	備考
導入	5	<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; display: inline-block;"> $2.1 \times 3.9 \div 4.5 \times 5 \div 9.1$ </div> 1. 上の計算を昔の人が楽に計算していた方法を考える。	一斉	○ 計算尺を対数が応用されているものとして紹介し、対数について興味を持たせる。	計算尺
展開	35	2. 対数の復習をする。 (1) 対数の定義を復習する。 (2) 対数の性質（積・商の対数）を復習する。 (3) 常用対数について復習する。	個人 一斉 一斉 個人 一斉 個人	○ 対数の定義を用いて、対数何を表しているか、ということについて触れる。 ○ 対数が実数を表していることを伝えたり、指数法則の復習をしたりする。 ○ 真数が1や底と同じ数である対数の値を対数の意味を強調しながら押さえる。 ○ 底が同じ対数では、加法が乗法、減法が除法になっていることを抑える。 ○ 常用対数の値が限りなく続くときもあることを押さえ、対数が実数であることを伝える。	ワークシート
まとめ	5	3. 本時のまとめをする。	個人	○ 対数の定義、対数の性質について確認する。	アンケート

【2 時間目】

平成 28 年 12 月 2 日（金）第 2 時限目 9 時 45 分～10 時 35 分 2 年 7 組教室

過程	配当	生徒の学習活動	授業形態	教師の指導・支援	備考
導入	5	1. 前時の復習をする。	一斉	○ 対数の定義、性質について思い出させる。	

展開 1	20	2. 計算尺について知る. (1) 計算尺に触れ, 気づいたことを挙げる. (2) 計算尺の名称について確認する. (3) 目盛りが対数目盛りになっていることを確認する.	一斉 一斉 一斉 個人	○ 計算尺を観察したり, 実際に動かしてみたりする時間をとる. ○ 固定尺, 滑尺, K 尺, A 尺, B 尺, C 尺, D 尺など. ○ 対数目盛りを数直線によって理解させる.	計算尺 ワークシート
	20	3. 課題①を考える. <div>課題①: D 尺の X 目盛りに C 尺の 1 を合わせます。その後, C 尺の Y 目盛りの下の D 尺の目盛りを Z とします。</div> (1) 計算尺でかけ算ができることに気づく. (2) 計算尺でかけ算ができる理由を考える.	 個人 個人 一斉	 ○ 目外れして目盛りが読めないときは除外させる. ○ 図を使って, 対数の性質を用いた式を導かせる.	ワークシート 計算尺の模型
まとめ	5	4. 本時のまとめをする.	一斉	○ 計算尺の目盛りが対数目盛りであることや計算尺でかけ算の計算ができることに触れる.	アンケート

【3 時間目】

平成 28 年 12 月 5 日 (月) 第 4 時限目 11 時 45 分～12 時 35 分 2 年 7 組教室

過程	配当	生徒の学習活動	授業形態	教師の指導・支援	備考
導入	10	1. 前時までの復習をする.	一斉	○ かけ算を求める計算尺の使い方を確認させる.	計算尺
展開 1	15	2. 課題②について考える. <div>課題②: D 尺の X 目盛りに C 尺の Y 目盛りを合わせます。その後, C 尺の 1 の下の D 尺の目盛りを Z とします。</div> (1) 計算尺でわり算ができることに気づく. (2) 計算尺でわり算ができる理由を考える.	 個人 個人 一斉	 ○ かけ算の時と同様に考えるように促す.	ワークシート 計算尺の模型
	15	3. 計算尺を使って計算をする. (1) 問題 1 に取り組む. (2) 問題 2 に取り組む. <div>問題 2 : $2.1 \times 3.9 \div 4.5 \times 5 \div 9.1$</div>	個人 一斉 個人 一斉	○ 目盛りの都合上, 誤差が出ることに触れる. ○ 計算尺の使い方がわからない生徒が多い場合は途中まで実演する. ○ 筆算で答えを出してから計算尺で計算することで, 計算尺の便	ワークシート

				利さを実感させる。	
ま と め	10	4. 今回までのまとめをする。	一斉	○ 対数と計算尺の関係について抑える。	アンケート

5. アンケートの結果

今回の授業実践の分析の際に使用した事前、事後アンケート、及びその回答の結果の主要なものを以下に示す。すべて自由記述によるものであり、事前と事後の1から5までは共通項目となっている。事前アンケートの回収数は42枚、事後アンケートの回収数は41枚である。

○各質問項目

【共通項目】

1. 「対数」とは何ですか。一言で表現してください。
2. 対数の定義を書いてください。
3. 次の式を簡単にしてください。
(1) $\log_a M + \log_a N$ (2) $\log_a M - \log_a N$
4. 対数を使うと何が分かるようになりますか、また、どんなことが可能になりますか。
5. 対数の良さとは何だと思いますか。

【事前アンケート】

6. 対数や対数の学習のイメージはどのようなものですか。
7. 対数の学習で印象に残っているものは何ですか。
8. その他、対数に関連することで覚えていることがありましたら書いてください。

【事後アンケート】

6. 今回の三回の授業で対数や対数の学習のイメージはどのように変わりましたか。
7. 計算尺でかけ算・わり算が計算できるのはどうしてですか。説明してください。
8. 計算尺を使うことで対数への興味・関心は高まりましたか。
9. 今回の授業で対数について新しく分かったことがあったら書いてください。
10. 今回、計算尺という道具を使いながら対数を学習しましたが、今までより対数について理解は深まりましたか。また、どのようなところがよく分かり、どのようなことがよく分かりませんでしたか。

○回答

【共通項目】

「4. 対数を使うと何が分かるようになりますか、

また、どんなことが可能になりますか。」に対して、事前アンケートでは、「答え」（3名）や「桁数」（2名）、「問題が解ける」（1名）などが見られた。事後アンケートでは、「計算が楽になる」（5名）、「かけ算やわり算を速く解ける」（3名）、「計算尺を使うことができる」（3名）などの記述が見られた。

「5. 対数の良さとは何だと思いますか。」に対して、事前アンケートでは、「簡単」（2名）、「桁数が分かる」（1名）だったのに対し、事後アンケートでは、「logで簡単に計算できる」（7名）、「計算を速くできるようになる」（4名）などが多かった。

【事後アンケート】

「6. 今回の三回の授業で対数や対数の学習のイメージはどのように変わりましたか。」に対して、変化前と変化後を書いているものは「難しいから楽しいに変わった」（2名）という記述が見られた。変化後しか書いていないものは、「楽しい」（6名）、「面白い」（5名）、「応用できる、使える」（5名）などが見られたが、中には、「より難しく感じた」（2名）という記述もあった。

「8. 計算尺を使うことで対数への興味・関心は高まりましたか。」に対して、「少し」（8名）、「高まった」（33名）であり、生徒全員が少なからず興味・関心が高まったと感じている。

「10. 今回、計算尺という道具を使いながら対数を学習しましたが、今までより対数について理解は深まりましたか。また、どのようなところがよく分かり、どのようなことがよく分かりませんでしたか。」に対して、「深まった」と回答しているのは5名だった。分かったところは「logの計算」（7名）、「計算尺の使い方」（6名）、少数ではあるが分からなかったところは、「計算尺の使い方」（2名）という意見があった。また、「計算尺に対数が使われていることは分かったがいまいちピンとこない」（1名）などの意見もあった。

6. 授業実践の分析

アンケートの結果をみると、共通項目の4より、対数を使うことで計算の答えが分かる程度の認識しなかったものが、計算を速く楽にできるようにな

るという認識に変わっていることが分かる。また、5を見ても、対数の良さとして計算を簡単に速くできることと感じているのが分かる。事後アンケートの項目を見ると、6では対数のイメージが「難しい」という否定的なものから、「面白い」、「楽しい」といった肯定的なものに変化していることが分かる。8では生徒の全員が少なからず対数への興味・関心が上昇していることが分かる。また、アンケートの他の項目の中には、計算尺に強く興味を持っている生徒も見られた。10では、授業で計算尺の使い方について取り上げているので、「使い方」が分かったと答えているのは当然だと言えるが、その中で「logの計算」が分かったとしていることから、計算尺を用いる中で対数の和が真数の積の対数に、対数の差が真数の商の対数になるという対数の性質を実感を伴いながら学習していると考えられる。しかし、計算尺の使い方や対数がどのように応用されているのか理解できていない生徒がいるのも事実である。この原因として、対数目盛りを理解するための学習活動が適切でないことや、計算尺の使い方を理解させるための手立てが不足していること、授業展開が適切でないことなどが考えられる。

7. 本稿のまとめと今後の課題

今回、対数が用いられた道具である計算尺を操作するような学習活動を取り入れた対数学習によって、対数のイメージはどのように変わるのか、生徒は対数の学ぶ意義や対数の価値を実感することができるのか実証的に解明することを心掛けてきた。

計算尺を使っていく中で、乗除の計算ができることに疑問を持ち、計算尺で計算ができる仕組みを対数によって考える活動を取り入れることで、計算尺の使い方を学びながら、対数の和が真数の積の対数に、対数の差が真数の商の対数になるという対数の性質を実感を伴って理解できることが分かった。また、対数に対する興味・関心も向上することが分かった。さらに、この学習活動によって、対数を難しく、計算が面倒であると否定的なイメージが、対数は有用なものであり、対数の学習は楽しさや面白さを感じ

じるといった肯定的なイメージに変化したことが分かった。今後の課題は、今回実践できなかった累乗・累乗根の計算ができる理由を考える活動についても授業実践を行い、効果を明らかにすることである。また、今回行った授業を改善して、より効果的な授業展開を検討していくことである。さらに、今回は計算尺を用いた対数学習について考えてきたが、対数関数を中心とした対数学習も模索していきたい。

最後に、今回の授業実践における生徒の反応から、授業展開において工夫する必要があると思われるが、小学生に対しても計算尺を活用すれば“対数”に対する理解が容易に深まり、“大きな数の桁数”の算出に関する抵抗もなくなるのではないかと確信した。今後、小学校算数において計算尺を活用した“大きな数の桁数”に関する授業実践を試み、児童の“数(自然数)”に対する興味・関心を引き出したい。

謝辞

本研究のために授業実践の場を提供してくださった熊本県立東稜高等学校(熊本市東区)教諭松本和光先生、教諭山崎智子先生に深く御礼申し上げます。先生方には、生徒の数学に対する習熟度や指導方法など細部まで多大な指導助言を賜りました。次に貴重な時間を割いて授業実践に協力して頂いた同高等学校第2学年の生徒の皆さん(42名)、そしてこの授業実践を陰で支えてくれた国立大学法人熊本大学大学院教育学研究科の佐藤英樹さん、吉田恭一郎さんに、この場を借りて、心より感謝申し上げます。

参考文献

- [1] 上野健爾,『指数と対数, 実例で基礎からよくわかる! こんなに便利な指数・対数・ベクトル』(ニュートン別冊), ニュートンプレス, pp. 6-63, 2015年.

参考URL

- [1] 計算尺推進委員会,
<http://www.pi-sliderule.net/sliderule/make/pdf.pdf>.