別紙様式８

研　究　主　論　文　抄　録

論文題

Bijective proofs of the identities on the values of inner products of the Macdonald polynomials

(Macdonald 多項式の内積値に関する恒等式の全単射証明)

熊本大学大学院自然科学教育部　理学専攻　数学コース

（　主任指導　山田　裕史　教授　）

論文提出者　西山　雄太

主論文要旨

　有限個の互いに独立な変数 x_1,x_2,⋯,x_n に関する多項式を考える．このような多項式には，変数の置換により n 次対称群が作用する．この作用により不変な多項式は対称多項式と呼ばれる．対称多項式の変数は有限個であるが，変数の個数に関する逆極限を考えることにより，可算無限個の変数に関しても同様のものを考えることができる．これにより得られる可算無限個の変数に関する対称多項式の類似物は，特に対称関数と呼ばれる．対称関数の全体は線形空間をなし，その基底を構成するものとして，基本対称関数，完全対称関数，冪和対称関数，Schur 関数などが知られている．これらの基底は，自然数の分割を用いて添え字づけられる．対称多項式や対称関数の係数体は有理数体 Q として考えるのが最も基本的であるが，1 変数，あるいは 2 変数の有理関数体 Q(t)，Q(q,t)とした設定での研究も盛んに行われている． Q(t)上の対称関数としては， Schur 関数の一般化である Hall-Littlewood 関数が重要である．さらに Q(q,t)上の対称関数としては，Hall-Littlewood 関数のさらなる一般化である Macdonald 関数が知られている．対称関数やその空間には各種の組合せ論や表現論と関連する構造があり，それらについての研究が広く行われている．対称関数の空間には，Hall 内積と呼ばれる内積がそれぞれの係数体に応じて導入されている．ここで，ある対称関数の内積を複数の方法で計算することにより，その値の複数の表示が得られることがある．例えば，Q(t)上で長さ 1 の分割に対応する基本対称関数同士の内積を考える．この内積の値は，2 通りの方法で計算できる．第一の方法はこの基本対称関数を 1 のみを成分とする分割に対応する Hall-Littlewood 関数とみなしてその性質を利用するものである．そして，第二の方法はこの基本対称関数を冪和対称関数で展開するものである．Q(t)上の場合と同様に，Q(q,t)上での長さ 1 の分割に対応する基本対称関数同士の内積も 2 通りの方法で計算できる．この場合には，Hall-Littlewood 関数の役割を Macdonald 関数が担うことになる．

　このように，対称関数の内積には値の複数の表示が得られるものがある．そこで Q(t)あ

るいは Q(q,t)上の対称関数のそのような内積から，1 変数 t，あるいは 2 変数 q,t に関する有理関数の恒等式を得ることができる．特に，長さ 1 の分割に対応する基本対称関数同士の内積から得られる恒等式は，対称群の類等式の一般化とみなすことができる．長さ 1 の分割に対応する完全対称関数同士の内積からも，同様の方法で同じ恒等式が得られる．また, 長さ 1 の分割に対応する基本対称関数と完全対称関数の内積からも恒等式が得られる．これにより得られる恒等式は，対称群の偶置換と奇置換の個数が等しいことを示す式の一般化となっている．これらの恒等式の両辺は，1 変数 t，あるいは 2 変数 q,t に関する形式的冪級数であると考えることができる．そこでこれらの恒等式には，両辺のそれぞれの次数の係数が等しいことを直接示すことによる新しい証明が存在することが期待できる．この論文では，この方針による恒等式の新しい証明を与えている．

論文の第 1 章では，恒等式の 1 変数の場合の証明を扱っている．なお，上述の第一の方法により得られる内積の値を恒等式の左辺，第二の方法により得られるものを右辺としている．ここでは基本対称関数同士の内積から得られる恒等式の場合について述べる．元の対称関数の次数を n とすると，左辺の d 次の係数は，自然数 d の長さ n 以下の分割の個数を n の階乗倍したものに等しい．この数は，d 個のマス目を持つ幅が n 以下の Young 図形を描き, その第 1 列から第 n 列に n 個の数字を割り当てることで得られる図形の個数である．右辺の d 次の係数も，この論文で新たに導入されているある種の図形の（符号付きの）個数として与えられる．この図形は Young 図形と同じように正方形のマス目を縦横に連ねたものであり, 恒等式の左辺に対応する図形と同様に幅が n 以下でマス目の個数は d である．また，各列に数字が割り当てられているのも同じである．しかしこの図形は下方向の凹みを許容しており，また縦方向に区切り線が入っているところなどが Young 図形と異なっている．この区切り線は，それぞれの部分の幅が左から右に単調減少となるように入れられる．この両辺に対応する図形の集合の間に全単射を構成することにより，恒等式を証明することができる．この全単射は図形の区切り線や各部分の順序などを適切に操作することによって構成される．基本対称関数と完全対称関数の内積から得られる恒等式についても，同様の方法で証明が得られる．

論文の第 2 章では，恒等式の 2 変数の場合の証明を与えている．2 変数の場合の証明も，1 変数の場合と同様に全単射を用いて得られる．すなわち恒等式の両辺の，変数 t について d 次，変数 q について e 次の係数をある種の図形の（符号付きの）個数とみなし，対応する図形の集合の間に全単射を構成する．この係数に対応する図形は，1 変数の場合と同様に幅が n 以下，マス目の個数が d の図形であり，各列に数字が割り当てられているのも同じである．ただし，ここでは更に図形の中の e 個の列が“塗られて”いる．ここで塗られる列のパターンは，図形に入れられた区切り線と対応するようになっている．両辺の各次数に対応するこのような図形の集合の間に全単射を構成することで，恒等式を証明することができる．